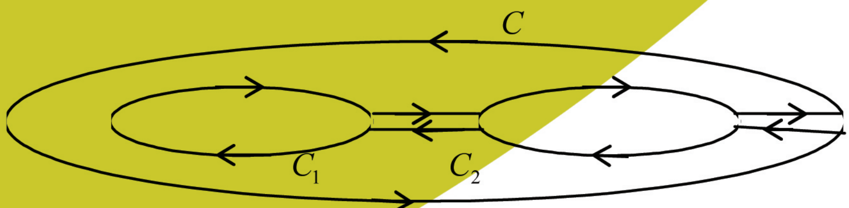
FUNDAMENTOS DE VARIABLE COMPLEJA Y APLICACIONES

Luis Manuel Sánchez Ruiz
Matilde Pilar Legua Fernández

3ª edición



EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Luis Manuel Sánchez Ruiz
Matilde Pilar Legua Fernández

Fundamentos de variable compleja y aplicaciones

3ª edición

2017

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Primera edición, 2006
Segunda edición, 2010
Tercera edición, 2017

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0625_04_03_07

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-593-4
Impreso bajo demanda

Índice General

Prólogo

Suele considerarse a Girolamo Cardano (1501–1576) como el introductor de los complejos con sus *soluciones intrigantes.* Sin embargo hoy día en muchas aplicaciones de la matemática, física e ingeniería es necesario manejar funciones de variable compleja, por ejemplo en estadística, teoría de la relatividad especial o restringida, en las transformaciones de Lorentz, teoría de fluidos, termodinámica, sistemas de control, etc.

Con esta publicación se pretende satisfacer las necesidades básicas que puedan tener los alumnos de ingeniería en variable compleja y algunas de sus aplicaciones. Con su estudio debe alcanzarse una familiaridad y soltura en su manejo que hagan lejanos algunos de los términos con los que se ha nombrado a los complejos en el pasado como "números sofisticados, inexplicables, sin sentido, imposibles o incomprensibles".

Se ha incluido los resultados teóricos que dan el soporte matemático necesario para abordar los problemas que aparecen y, aunque se ha evitado dar demostraciones que sean excesivamente tediosas o complicadas de desarrollar; se han incluido si ayudan a conseguir una formación adecuada para abordar temas o aplicaciones no tratados en este texto.

Entre los temas no tratados citaremos los cuaterniones de Sir William Rowan Hamilton (1805–1865) cuyas leyes de composición se hallan inscritas en el puente del Canal Brougham en Dublin, y confirma el hecho de que la matemática, que a veces ha ido detrás de la técnica en la resolución de problemas, otras ha ido por delante ya que los cuaterniones son utilizados en el software del sistema de control de los transbordadores espaciales *Shuttle.*

A lo largo del texto hay una amplia exposición de ejemplos que facilitan la comprensión de los diferentes temas presentados. Finaliza cada capítulo con una selección de ejercicios cuya resolución se recomienda para verificar que se ha entendido la materia desarrollada.

Las *series de Laurent* y aplicaciones del *teorema de los residuos* son expuestos extensamente en multitud de aplicaciones de las que resaltamos el cálculo de *integrales impropias*, *transformadas directas e inversas de Fourier y transformadas inversas de Laplace y Zeta.* Otras aplicaciones son ilustradas con ejemplos y su desarrollo completo genera asignaturas de ingeniería como son la *resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias* y *en derivadas parciales* y los *sistemas de control.*

Agradecemos las sugerencias recibidas de Dolors Roselló respecto de la edición anterior y que son incorporadas en diversos capítulos de este texto. También ha mejorado esta edición gracias a los alumnos que con sus dudas y querer saber han señalado los temas en los cuales tenían una mayor dificultad. Fruto de sus demandas es una nueva sección con ejercicios resueltos en cada uno de los temas. Esperamos que este texto facilite el trabajo de aprendizaje de los futuros usuarios de la variable compleja y sus aplicaciones.

Los autores

Capítulo 1

Funciones complejas

1.1 Funciones elementales

1.1.1 Variable compleja

Denotando por $\mathbb{C}$ al cuerpo de números complejos con las operaciones suma y producto, y $\mathbb{R}$ al subconjunto de números reales, si $x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$,

$$z = (x, y) = x + iy$$

es la representación cartesiana y binómica, respectivamente, de $z \in \mathbb{C}$. Su **conjugado**, denotado por z^* (o $\overline{z}$) es el complejo $z^* = x - iy$.

El **módulo** o **valor absoluto** de z,

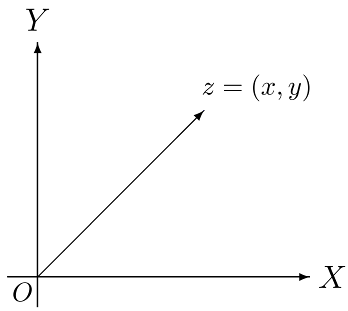
$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

es la distancia entre el afijo de z y el origen $O(0, 0)$.

El **argumento** de $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es el ángulo α formado por el eje real y el vector definido por el origen de coordenadas y el afijo de z. Se representa arg z y toma los infinitos valores reales dados por

$$\arg z = \arctan \frac{y}{x}$$

teniendo en cuenta el cuadrante en que se halla el afijo de z los cuales difieren entre sí en múltiplos enteros de 2π.



Definición 1.1.1 *La* ***determinación principal*** del argumento *de* z*,* $\operatorname{Arg} z$*, es el único valor de* $\arg z$ *tal que* $\operatorname{Arg} z \in]-\pi, \pi]$*. Dado* $\alpha_0 \in \mathbb{R}$*, se define* ***determinación*** α_0 del argumento *de* z*, y se denota* $\arg_{\alpha_0} z$*, como el único valor de* $\arg z$ *tal que*

$$\arg_{\alpha_0} z \in \left]\alpha_0 - \pi,\ \alpha_0 + \pi\right].$$

Evidentemente $\operatorname{Arg} z = \arg_0 z$*.*

Recordamos que si $z \in \mathbb{C}$ tiene módulo r y argumento α, entonces z puede representarse en las siguientes formas

r_α	$r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$
forma polar	**forma trigonométrica**

Ejemplo 1.1.2 *Representar en forma polar* $-1 - i\sqrt{3}$ *y hallar la determinación* $\frac{15\pi}{4}$ *de su argumento.*

Sol.: El módulo es

$$\left|-1 - i\sqrt{3}\right| = \sqrt{1+3} = 2.$$

Teniendo en cuenta que $-1 - i\sqrt{3}$ está en el tercer cuadrante,

$$\arg(-1 - i\sqrt{3}) = \arctan\sqrt{3} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Por tanto en forma polar es $-1 - i\sqrt{3} = 2_{-\frac{2\pi}{3}}$.

La determinación $\frac{15\pi}{4}$ corresponde al valor del argumento que pertenece al intervalo

$$\left]\frac{15\pi}{4} - \pi, \frac{15\pi}{4} + \pi\right] = \left]\frac{11\pi}{4}, \frac{19\pi}{4}\right],$$

luego

$$\arg_{\frac{15\pi}{4}}(-1 - i\sqrt{3}) = -\frac{2\pi}{3} + 4\pi = \frac{10\pi}{3}. \ \blacksquare$$

Definición 1.1.3 *Se llama* ***variable compleja*** *a todo símbolo* z *que representa a cualquier elemento de un conjunto* $D \subseteq \mathbb{C}$*.*

Dada una variable compleja $z = x + iy$, se representan por $\operatorname{Re} z$ e $\operatorname{Im} z$ respectivamente a las variables reales correspondientes a las partes real x e imaginaria y de z.

Diremos que ω es una **función de la variable compleja** z, y la representamos $\omega = f(z)$, cuando los valores $f(z)$ de ω dependan de $z \in D$. La función ω tendrá una parte real u y una parte imaginaria v, cada una de las cuales dependerá de x e y, es decir,

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y).$$

La función $\omega = f(z)$ establece una aplicación entre el conjunto D de puntos del plano z donde está definida f, sobre otro conjunto D_1 del plano donde se representan los valores ω que toma f. El conjunto D_1 se llama **imagen** del conjunto D.

1.1.2 Función exponencial

Definición 1.1.4 *La función **exponencial** compleja se define como*

$$\boxed{\exp(z) = e^z = e^{x+yi} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y),\ x, y \in \mathbb{R}} \tag{1.1}$$

Por tanto el módulo de e^z es $e^{\operatorname{Re} z}$ y su argumento $\operatorname{Im} z$.

Las partes real u e imaginaria v de $\exp(z)$ son

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \operatorname{sen} y.$$

Esta definición relaciona los números trascendentes e y π con la unidad imaginaria i mediante la fórmula

$$e^{\pi i} = -1.$$

Recordamos la representación en *forma exponencial* $re^{i\alpha}$ de $r_\alpha \in \mathbb{C}$,

r_α	$r(\cos\alpha + i \operatorname{sen}\alpha)$	$re^{i\alpha}$
polar	*trigonométrica*	*exponencial*

Ejemplo 1.1.5 *Representar $-1+i$ en forma exponencial y hallar e^{-1+i}.*

Sol.: Como

$$|-1+i| = \sqrt{2}, \arg(-1+i) = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z},$$

la representación de $-1+i$ en forma exponencial es

$$-1+i = \sqrt{2}\, e^{\frac{3\pi}{4} i}.$$

Por otra parte $\exp(-1+i)$ en forma polar, exponencial y binómica es

$$\exp(-1+i) = (e^{-1})_1 = e^{-1}\, e^{i} = e^{-1}\, \cos 1 + ie^{-1} \operatorname{sen} 1. \ \blacksquare$$

1.1.3 Función logaritmo y función potencial

La exponencial compleja puede tomar cualquier valor complejo z diferente de 0. Los complejos w que hacen que

$$\exp(w) = z$$

constituyen el **logaritmo neperiano** de z. Se representa

$$\omega = \ln(z) \ \ (\text{o } \log z).$$

Hallemos la expresión binómica de los $w = u + iv = \ln(z)$. De

$$z = e^{w} = e^{u+iv} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{ll} |z| = e^{u} & \rightarrow \quad u = \ln|z|. \\ \arg z = v. & \end{array} \right.$$

En consecuencia,

$$\boxed{\ln(z) = \ln|z| + i \arg z,\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.}$$

Por tanto $\mathrm{Re}(\ln z)$ está unívocamente definida pero $\mathrm{Im}(\ln z)$ es una función multivaluada que toma infinitos valores.

Dado $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, se llama **determinación** α_0 (resp. **principal**) de $\ln(z)$ al valor obtenido al tomar dicha determinación en el argumento como parte imaginaria de $\ln z$. Se denota

$$\boxed{(\ln(z))_{\alpha_0} = \ln|z| + i \arg_{\alpha_0} z \ (\text{resp. } \mathrm{Ln}\, z = (\ln(z))_0 = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z).}$$

La determinación principal de $\log z$ también se denomina **valor principal** y representa por $\operatorname{Log} z$.

Si $z \in \mathbb{R}^+$, entonces $\mathrm{Ln}\, z$ es el logaritmo neperiano usual definido en el campo real.

Ejemplo 1.1.6 *Calcular* $\mathrm{Ln}\,(z)$ *y* $\ln z$ *para* $z = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Sol.: La representación en forma exponencial de z es

$$z = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

y los logaritmos pedidos son

$$\begin{aligned} \mathrm{Ln}\,(z) &= \ln e^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + i\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\pi}{4}, \\ \ln z &= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.\ \blacksquare \end{aligned}$$

Nota 1.1.7 *Observemos que dado* $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\exp\,(\ln z) = z$$

se simplifica a z *mientras que no lo hace*

$$\ln\,(\exp\,(z)) = \mathrm{Re}\,z + i\,(\mathrm{Im}\,z + 2k\pi)\,,\ \ k \in \mathbb{Z}.\ \blacksquare$$

Nota 1.1.8 *Dados* $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *se verifica que*

$$\begin{aligned} \ln(z_1 z_2) &= \ln z_1 + \ln z_2, \\ \ln(z_1/z_2) &= \ln z_1 - \ln z_2. \end{aligned}$$

Sin embargo puede ser cierto o falso $\mathrm{Ln}\,(z_1 z_2) = \mathrm{Ln}\,z_1 + \mathrm{Ln}\,z_2$ o que $\mathrm{Ln}\,(z_1/z_2) = \mathrm{Ln}\,z_1 - \mathrm{Ln}\,z_2$. Así por ejemplo

$$\mathrm{Ln}\,(-i) = -\frac{\pi}{2}\,i \begin{cases} \neq \mathrm{Ln}\,(-1) + \mathrm{Ln}\,(i) = \pi i + \frac{\pi}{2}\,i = \frac{3\pi}{2}\,i. \\ = \mathrm{Ln}\,(2) + \mathrm{Ln}\left(\frac{-i}{2}\right) = \ln 2 + \left(-\ln 2 - \frac{\pi}{2}\,i\right) = -\frac{\pi}{2}\,i. \end{cases}$$

Y la expresión $\ln z^2 = \ln z + \ln z$ no debe simplificarse a $2\ln z$, ya que dado $A \subset \mathbb{C}$, $2A$ es un subconjunto de $A + A$ pudiendo no coincidir con él como puede comprobarse con $A = \ln i$. $\blacksquare$

Definición 1.1.9 *Se define la* ***potencia de base y exponente complejo*** z^μ *como*

$$\boxed{z^\mu = \left(e^{\ln z}\right)^\mu = e^{\mu \ln z},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.}$$

Dado $\alpha_0 \in \mathbb{R}$, se llama *determinación* α_0 (resp. *principal*) de z^μ al valor obtenido al tomar dicha determinación en el logaritmo. Se denota

$$\boxed{(z^\mu)_{\alpha_0} = e^{\mu(\ln(z))_{\alpha_0}}, \text{ (resp. VP}(z^\mu) = (z^\mu)_0 = e^{\mu \operatorname{Ln} z}), \ z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.}$$

Nota 1.1.10 Si $z = r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha)$ y $\mu = m \in \mathbb{Z}$, entonces z^μ toma un único valor que se corresponde con la ***fórmula de Moivre***,

$$z^m = \boxed{(r(\cos\alpha + i\operatorname{sen}\alpha))^m = r^m\left(\cos(m\alpha) + i\operatorname{sen}(m\alpha)\right).}$$

Si $\mu = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ es irreducible, entonces z^μ toma q valores distintos que se corresponden con las raíces $q-$ésimas de z^p,

$$z^{\frac{p}{q}} = \boxed{\left(\sqrt[q]{(r_\alpha)^p}\right) = \left(\sqrt[q]{r^p}\right)_{\frac{p\alpha}{q}+\frac{2\pi k}{q}}, \ k = 0, 1, \ldots, q-1.}$$

Si μ es irracional o imaginario, obtenemos infinitos valores de z^μ. ■

1.1.4 Funciones trigonométricas e hiperbólicas

Si en (1.1) tomamos como z los imaginarios puros $yi, -yi$ obtenemos

$$\begin{aligned} e^{yi} &= \cos y + i\operatorname{sen} y, \\ e^{-iy} &= \cos y - i\operatorname{sen} y. \end{aligned}$$

Despejando,

$$\cos y = \frac{e^{yi} + e^{-yi}}{2}, \quad \operatorname{sen} y = \frac{e^{yi} - e^{-yi}}{2i}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Generalizando, se definen las funciones **trigonométricas**:

$$\boxed{\cos z = \tfrac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen} z = \tfrac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.}$$

De estas fórmulas se deducen las expresiones de $\tan z$, $\cot z$, $\sec z$, $\csc z$ siguiendo las definiciones de las correspondientes funciones reales en función de senos y cosenos. La restricción de estas funciones a $\mathbb{R}$ coincide con la correspondiente función de variable real, siendo sencillo comprobar que se verifican las fórmulas de suma y diferencia,

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(z_1 \pm z_2) &= \operatorname{sen} z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \operatorname{sen} z_2, \\ \cos(z_1 \pm z_2) &= \cos z_1 \cos z_2 \mp \operatorname{sen} z_1 \operatorname{sen} z_2, \\ \tan(z_1 \pm z_2) &= \frac{\operatorname{sen}(z_1 \pm z_2)}{\cos(z_1 \pm z_2)} = \frac{\tan z_1 \pm \tan z_2}{1 \mp \tan z_1 \tan z_2}. \end{aligned}$$

Las funciones seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante **hiperbólica** se definen mediante

$$\boxed{\begin{array}{lllllllll} \operatorname{senh} z & = & \frac{e^z-e^{-z}}{2}, & \cosh z & = & \frac{e^z+e^{-z}}{2}, & \tanh z & = & \frac{\operatorname{senh} z}{\cosh z}, \\ \coth z & = & \frac{1}{\tanh z}, & \operatorname{sech} z & = & \frac{1}{\cosh z}, & \operatorname{csch} z & = & \frac{1}{\operatorname{senh} z}. \end{array}}$$

Las *funciones trigonométricas* e *hiperbólicas* complejas satisfacen:

$$\boxed{\begin{array}{lllll} \operatorname{sen}(iz) & = & \frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} & = & i \operatorname{senh} z, \\ \cos(iz) & = & \frac{e^{-z}+e^{z}}{2} & = & \cosh z, \\ \tan(iz) & = & \frac{\operatorname{sen}(iz)}{\cos(iz)} & = & i \tanh z. \end{array}}$$

1.2 Límites y continuidad

1.2.1 Nociones topológicas

Definición 1.2.1 *Dado $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ la* ***norma euclídea*** *de P es $\|P\| = \sqrt{x^2 + y^2}$. La* ***distancia*** *entre los puntos $P_1(x_1, y_1), P_2(x_2, y_2)$ es*

$$\mathrm{d}(P_1, P_2) = \|P_1 - P_2\| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Por la representación cartesiana de $\mathbb{C}$, el conjunto de complejos que distan $\epsilon > 0$ de $z_0 \in \mathbb{C}$ constituye la circunferencia $C_\epsilon(z_0)$,

$$C_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = \epsilon\}.$$

Ejemplo 1.2.2 *Interpretar el significado de:*
a) $|z - 2| = 3$; b) $3 < |z - (1 + i)| < 5$.

Sol.: a) La ecuación dada representa al conjunto de numeros complejos cuyos afijos distan de 2 tres unidades, es decir $C_3(2)$.

b) Esta expresión representa una corona circular comprendida entre las circunferencias $C_3(1 + i)$ y $C_5(1 + i)$. ■

En cada conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ consideramos los mismos conceptos topológicos que tienen los afijos de D en $\mathbb{R}^2$. Así, si $z_0 \in \mathbb{C}$ y $\epsilon > 0$ se define **disco abierto** (o bola abierta) de centro z_0 y radio ϵ al conjunto

$$D_\epsilon(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < \epsilon\}.$$

El conjunto $D_\epsilon^r(z_0) = D_\epsilon(z_0) \backslash \{z_0\}$ se llama **disco reducido** o agujereado de centro z_0 y radio ϵ.

Dado $D \subseteq \mathbb{C}$ y $z \in D$, se dice que D es un **entorno** de z y que z es un **punto interior** de D si existe algún $\epsilon > 0$ tal que $D_\epsilon(z) \subseteq D$. El conjunto formado por todos los puntos interiores a D se llama **interior** de D, y se representa por $\dot{D}$ o $\operatorname{int}(D)$. Un conjunto $D \subseteq \mathbb{C}$ es **abierto** si coincide con su interior, o equivalentemente si D es entorno de cada uno de sus puntos.

Se dice que z es un **punto de acumulación** de D si existen puntos de D, diferentes de z, tan próximos a z como se quiera, esto es, si dado cualquier $\epsilon > 0$ se verifica que $D_\epsilon^r(z) \cap D \neq \emptyset$. Un punto de acumulación de D puede no pertenecer a D, y puede haber puntos de D que no sean de acumulación de D. Se denomina **conjunto derivado** de D, y se representa por D', al conjunto formado por los puntos de acumulación de D.

Se dice que $z \in \mathbb{C}$ es un **punto frontera** de D si existen puntos tan próximos a z como se quiera tanto de D como de su complementario $D^c = \mathbb{C} \setminus D$. Se denomina **frontera** de D, y se representa por $\operatorname{Fr}(D)$ o ∂D, al conjunto formado por todos los puntos frontera de D. **Clausura** de D es el conjunto $\overline{D} = D \cup \operatorname{Fr}(D)$ (también se representa $\operatorname{cl}(D)$). y $D \subseteq \mathbb{C}$ se denomina **cerrado** si $D = \overline{D}$.

La clausura del disco $D_\epsilon(z_0)$ es el **disco cerrado** (o *bola cerrada*) de centro z_0 y radio ϵ, $\overline{D_\epsilon(z_0)} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{d}\,(z, z_0) \leq \epsilon\}$.

Ejemplo 1.2.3 *Hallar el conjunto derivado, interior y clausura de los siguientes conjuntos, indicando si son abiertos o cerrados:*

$$A = \{z : |z| < 2\}, \quad C = A \cup \{(1,2)\},$$
$$B = \{z : |z| \leq 2\}, \quad D = \{z : 1 < |z| \leq 3\}.$$

Sol.: $\operatorname{int}(A) = \operatorname{int}(B) = \operatorname{int}(C) = A$, $A' = B' = C' = B$, $\overline{A} = \overline{B} = B$, $\overline{C} = B \cup \{(1,2)\}$, $\operatorname{int}(D) = \{z : 1 < |z| < 3\}$, $D' = \overline{D} = \{z : 1 \leq |z| \leq 3\}$. Luego A es abierto, B cerrado, y C y D no son abiertos ni cerrados. ■

Para seguir leyendo haga click aquí