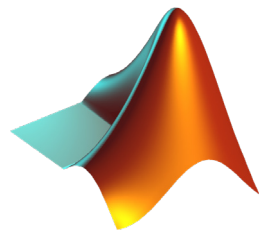
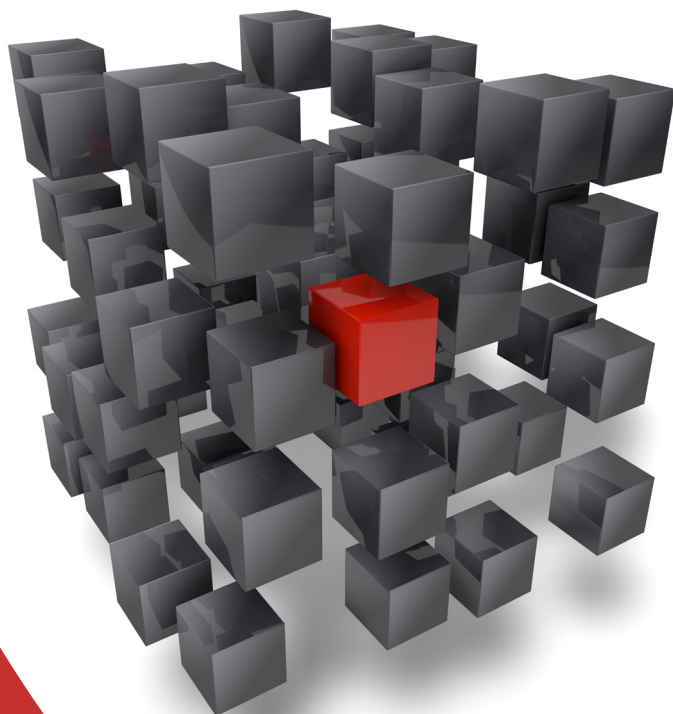


Matlab, matrices y transformaciones geométricas en el plano y en el espacio



Valentín Gregori Gregori | Bernardino Roig Sala



Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala

Matlab, matrices y transformaciones geométricas en el plano y en el espacio

Colección *Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:

Gregori Gregori, V.; Roig Sala, B. (2021).

Matlab, matrices y transformaciones geométricas en el plano y en el espacio.

Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

Autoría

Valentín Gregori Gregori

Bernardino Roig Sala

Editorial Universitat Politècnica de València

www.lalibreria.upv.es / Ref.: 6702_01_01_01

ISBN: 978-84-9048-585-9

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es



Matlab, matrices y transformaciones geométricas en el plano y en el espacio

Se permite la reutilización y redistribución de los contenidos siempre que se reconozca la autoría y se cite con la información bibliográfica completa. No se permite el uso ni la generación de obras derivadas.

Autores

VALENTÍN GREGORI GREGORI

Catedrático de universidad que ejerce la docencia como profesor de matemáticas en la Escuela Politécnica Superior de Gandía de la Universitat Politècnica de València. Ha dirigido varias tesis doctorales y ha publicado algunos libros docentes y un gran número de artículos de investigación sobre topología general y métrica fuzzy en revistas internacionales.

BERNARDINO ROIG SALA

Profesor titular en la Escuela Politécnica Superior de Gandía de la Universitat Politècnica de València; también lo ha sido en otras universidades presenciales y no presenciales, impartiendo asignaturas de la rama de las matemáticas. Es autor de libros y publicaciones docentes y especialista en mecánica computacional y otras aplicaciones numéricas de la matemática en donde es autor de numerosas publicaciones de investigación.

Resumen

Este texto está pensado para la realización de prácticas informáticas matriciales y de geometría para alumnos de primer curso con Matlab u Octave. Aparte de exponer las bases operativas y matriciales, también quiere ayudar a la comprensión de lo que son las transformaciones semejantes con un conjunto ágil y estructurado de comandos. En el primer capítulo realiza una introducción general al entorno de cálculo. En el segundo se tratan las matrices, su operatividad y aplicaciones. En el tercero se realiza una representación de curvas y figuras sencillas en el plano euclídeo utilizando distintos tipos de coordenadas (cartesianas y polares) mientras que en el quinto se realiza en el espacio (en cartesianas, cilíndricas y esféricas). En los capítulos cuarto y sexto se presentan las transformaciones geométricas en el plano y en el espacio euclídeo, respectivamente, desde una perspectiva de cálculo e interpretación geométrica. Finalmente se incluyen las soluciones de los ejercicios de autoevaluación propuestos en cada capítulo.

Presentación

Este texto está pensado para la realización de prácticas informáticas matriciales y de geometría de alumnos de primer curso, especialmente para los alumnos de la asignatura de Álgebra Matricial y Geometría del Grado en Tecnologías Interactivas que imparte el Departament de Matemàtica Aplicada en la Escola Politècnica Superior de Gandia de la Universitat Politècnica de València. En vistas a ello, la redacción utilizada en el texto es menos sobria que la usual en otros textos de matemáticas de los mismos autores.

La enseñanza de la geometría en los niveles previos a la universidad ha quedado reducida a cálculos geométricos sobre figuras *planas* más o menos regulares. Ello implica la existencia de lagunas en la mayoría de estudiantes que generan carencias en el tratamiento geométrico de imágenes. Este texto, aparte de exponer las bases operativas y matriciales, también quiere aportar su grano de arena a la comprensión de lo que son las transformaciones semejantes poniendo a disposición del lector un conjunto ágil y estructurado de comandos. En todo momento se añaden gráficas que ayudan a interpretar las ideas expuestas.

El texto está orientado para ejecutar todos los comandos en Matlab® en alguna de las últimas versiones aunque, como no se utiliza ninguna función especial en el desarrollo del texto (excepto alguna nota complementaria o alternativa), es compatible con Octave, con versiones más antiguas de Matlab® y, con algunos cambios, con otros entornos de cálculo como, por ejemplo, Scilab. Para los cálculos simbólicos en Octave se requiere instalar Python y sus librerías *Mpmath* y *SymPy* y cargarlas dentro de Octave con los comandos *pkg install -forge symbolic* y *pkg load symbolic*.

La formación necesaria para entender este libro son los conocimientos matemáticos de bachillerato requeridos para poder entrar a cualquier ingeniería o titulación científica y se ha escrito de modo que sea asequible para lectores de menor nivel matemático. Se pueden utilizar los procedimientos habituales de copia/pega de los comandos como si fueran funciones predefinidas para seguir con facilidad todo el libro.

En todo momento se indican los procedimientos matemáticos utilizados argumentados de forma coherente, pero no se demuestran, aunque en algunos casos se justifiquen. El lector puede encontrar las bases matemáticas necesarias en los libros “Álgebra Matricial” y “Geometría euclídea” de Estruch, Gregori y Roig incluidos en la bibliografía.

Los comandos se diferencian claramente del texto para evitar confusiones. Se han marcado en negrita los lugares en donde se define un concepto y se han referenciado en un índice al final del texto para facilitar su localización. Este documento se ha creado con enlaces que permiten navegar con facilidad por las diferentes secciones, referencias e índices. Cada visualizador suele tener un botón (léase combinación de teclas) para volver atrás cuando ya se ha visitado una referencia. Una forma habitual es “ALT”+“←” o “COMMAND”+“←”.

Al final de cada capítulo se proponen ejercicios para verificar la comprensión del capítulo. Se asume que se está en una situación de trabajo real en donde se dispone del entorno de cálculo habitual con su ayuda incorporada y que se puede consultar este texto. El único límite existente es la comprensión de los temas desarrollados. Se aconseja no consultar información por internet (excepto puntualmente) dado que el libro es autocontenido y la información existente en la red muchas veces no es adecuada. Los ejercicios propuestos son creativos mientras que los de autoevaluación se presentan a modo de prueba test de los contenidos. Una vez realizados estos últimos, se pueden verificar las respuestas en el apéndice A. En cada una de las preguntas solo hay una opción o respuesta que se adecúa al enunciado y, si no se indica lo contrario, se pide la respuesta que es cierta. Una pregunta correcta suma 1 punto, una incorrecta resta $1/3$ y una no contestada suma 0. Si el tiempo utilizado en responder cada pregunta (sin consultar las respuestas) es inferior a 5 minutos se ha alcanzado una buena comprensión del capítulo, si está entre 5 y 10 minutos el nivel de comprensión es ajustado y, si es superior a 10 minutos, es insuficiente.

El texto consta de seis capítulos y un apéndice. El primer capítulo realiza una introducción general al entorno de cálculo como si se tratase de una calculadora gráfica de amplias prestaciones en los distintos campos del cálculo científico. En el segundo capítulo se tratan las matrices, su operatividad y aplicaciones como, por ejemplo, en la fotografía digital. En el tercer capítulo se realiza una representación de puntos y figuras sencillas en el plano euclídeo utilizando distintos tipos de coordenadas (cartesianas y polares) mientras que en el quinto capítulo se realiza en el espacio (en cartesianas, cilíndricas y esféricas). En los capítulos cuarto y sexto se presentan las transformaciones geométricas en el plano y en el espacio euclídeo, respectivamente, desde una perspectiva de cálculo e interpretación geométrica. Ello permite conocer la esencia del funcionamiento de las transformaciones geométricas. Aunque la metodología propuesta se puede aplicar a cualquier transformación, nos centramos con las semejanzas por ser la base de ellas. En el apéndice se incluyen las soluciones de los ejercicios de autoevaluación propuestos en cada capítulo.

Los autores agradecen cualquier sugerencia para la mejora de este texto.

Los autores.

Notación

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

\forall	Cuantificador universal. Se lee “para todo.” “para cada”
\exists	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
\iff	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
\equiv	Equivalencia (o cambio convencional de notación)
\Rightarrow	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
\in	Símbolo de pertenencia
\subset	Símbolo de inclusión
\cup	Símbolo de unión
\cap	Símbolo de intersección
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
\mathbb{N}^*	El conjunto \mathbb{N} sin el cero
\mathbb{Z}	El anillo de los números enteros
\mathbb{Q}	El cuerpo de los números racionales
\mathbb{R}	El cuerpo de los números reales
\mathbb{R}^+	El conjunto de los números reales estrictamente positivos
\mathbb{C}	El cuerpo de los números complejos

Ténganse presentes las siguientes abreviaturas utilizadas para referenciar otros sitios en el texto:

ec.	Ecuación
sec.	Sección

Sumario

1. Introducción al entorno de cálculo	11
1.1. EL ENTORNO DE CÁLCULO	11
1.1.1. Ventana de comandos	11
1.1.2. Operadores aritméticos	12
1.1.3. Comandos	13
1.1.4. Formatear un resultado numérico	14
1.1.5. Asignación de valores a variables	15
1.2. VARIABLES VECTORIALES Y MATRICIALES	17
1.2.1. Definición y construcción de vectores y matrices	17
1.2.2. Ejemplos constructivos	19
1.2.3. Operaciones matriciales	20
1.2.4. Ejemplos de operatividad matricial	21
1.2.5. Operaciones elemento a elemento	23
1.2.6. Ejemplos operativos elemento a elemento	24
1.2.7. Ejemplo de cálculo de valores estadísticos	25
1.3. FUNCIONES	26
1.3.1. Funciones elementales predefinidas	26
1.3.2. Definición de nuevas funciones	27
1.3.3. Ejemplo de función vectorial de dos variables	30
1.4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES	31
1.4.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales	31
1.4.2. Resolución de sistemas de ecuaciones	31
1.4.3. Ejemplo de resolución de sistemas	32
1.5. GRÁFICOS BIDIMENSIONALES	33
1.5.1. Dibujo de puntos y polígonos con plot y fill	33

1.5.2.	Dibujo de funciones con fplot	34
1.5.3.	Otros comandos de representación gráfica	35
1.5.4.	Ejemplo de función definida a trozos	36
1.5.5.	Circunferencias y elipses	38
1.6.	GRÁFICOS TRIDIMENSIONALES	39
1.6.1.	Dibujo de puntos y curvas con plot3 y fplot3	40
1.6.2.	Dibujo de funciones y superficies con fsurf	41
1.7.	EJERCICIOS	42
1.7.1.	Ejercicios propuestos	42
1.7.2.	Ejercicios de autoevaluación	43
2.	Matrices y ecuaciones	47
2.1.	MATRICES	47
2.1.1.	Definiciones	47
2.1.2.	Operaciones con matrices	49
2.1.3.	Ejemplos de operaciones matriciales	52
2.1.4.	Ejemplo de ecuación matricial	52
2.2.	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES	54
2.2.1.	Definiciones y teorema de Rouché-Fröbenius	54
2.2.2.	Resolución de un sistema compatible determinado	54
2.2.3.	Resolución de un sistema compatible indeterminado	55
2.2.4.	Resolución de un sistema sobredeterminado	57
2.2.5.	Ejemplo de regresión polinómica	58
2.3.	APLICACIÓN DE LAS MATRICES A LAS IMÁGENES DIGITALES	60
2.3.1.	Matrices e imágenes digitales	60
2.3.2.	Ejemplo de tratamiento de imágenes digitales	63
2.4.	EJERCICIOS	64
2.4.1.	Ejercicios propuestos	64
2.4.2.	Ejercicios de autoevaluación	65
3.	Figuras y curvas en el plano euclídeo	69
3.1.	COORDENADAS EN \mathbb{R}^2	69
3.1.1.	Coordenadas cartesianas	69
3.1.2.	Coordenadas homogéneas	70

3.1.3.	Coordenadas polares y números complejos	70
3.2.	PARAMETRIZACIONES EN \mathbb{R}^2	72
3.2.1.	Curva regular parametrizada	72
3.2.2.	Parametrización de recta y segmento	73
3.2.3.	Parametrización de circunferencia y elipse	74
3.2.4.	Parametrización de espirales	75
3.3.	FIGURAS EN EL PLANO REAL	75
3.3.1.	Ejemplo de figura plana	75
3.3.2.	Ejemplo de figura parametrizada	76
3.3.3.	Ejemplo de un trozo de pizza	77
3.3.4.	Ejemplo de representación de un polígono regular	78
3.3.5.	Ejemplo de representación de una recta	80
3.3.6.	Ejemplo de representación de circunferencias y elipses .	80
3.3.7.	Ejemplo de representación paramétrica de espirales . . .	81
3.3.8.	Ejemplo de representación de curvas en coordenadas po- lares	82
3.3.9.	Ejemplo de trayectoria delimitada por puntos	84
3.4.	VECTOR TANGENTE A UNA CURVA PARAMETRIZADA .	85
3.5.	EJERCICIOS	86
3.5.1.	Ejercicios propuestos	86
3.5.2.	Ejercicios de autoevaluación	87
4.	Transformaciones geométricas en el plano	91
4.1.	TRANSFORMACIONES EN \mathbb{R}^2	91
4.1.1.	Transformaciones del plano	91
4.1.2.	Isometrías y semejanzas	92
4.1.3.	Transformación afín	92
4.1.4.	Producto de transformaciones afines	93
4.1.5.	Caracterización de una transformación afín	94
4.2.	SEMEJANZAS EN EL PLANO REAL	95
4.2.1.	Traslaciones	95
4.2.2.	Giros y simetrías respecto a un punto	96
4.2.3.	Simetrías respecto un eje	97
4.2.4.	Homotecias	99
4.2.5.	Productos habituales de semejanzas en \mathbb{R}^2	100

4.3.	EJEMPLOS DE SEMEJANZAS EN EL PLANO REAL	101
4.3.1.	Ejemplo de traslación	102
4.3.2.	Ejemplo de giro	103
4.3.3.	Ejemplo de simetría puntual	104
4.3.4.	Ejemplo de simetría axial	105
4.3.5.	Ejemplo de homotecia	107
4.3.6.	Ejemplo de cizallamiento o sesgado	108
4.3.7.	Procedimiento para el producto de semejanzas	109
4.3.8.	Ejemplo de producto de transformaciones afines	110
4.3.9.	Ejemplo de determinación de una transformación a partir de tres puntos	113
4.4.	EJERCICIOS	114
4.4.1.	Ejercicios propuestos	114
4.4.2.	Ejercicios de autoevaluación	115
5.	Curvas y superficies en el espacio euclídeo	119
5.1.	COORDENADAS EN \mathbb{R}^3	119
5.1.1.	Coordenadas cartesianas	119
5.1.2.	Coordenadas homogéneas	120
5.1.3.	Coordenadas cilíndricas	120
5.1.4.	Coordenadas esféricas	121
5.2.	PARAMETRIZACIONES EN \mathbb{R}^3	123
5.2.1.	Curva paramétrica	123
5.2.2.	Superficie paramétrica	124
5.3.	FIGURAS EN EL ESPACIO REAL	126
5.3.1.	Ejemplo de representación de una recta	126
5.3.2.	Ejemplo de curva parametrizada	127
5.3.3.	Ejemplo de trayectoria delimitada por puntos	128
5.3.4.	Ejemplo de superficie paramétrica	129
5.3.5.	Ejemplo de casquete esférico	131
5.3.6.	Ejemplo de paralelepípedo al espacio	132
5.3.7.	Ejemplo de representación aproximada de una superficie mediante una nube de puntos	133
5.3.8.	Ejemplo de un cilindro con tapas	134
5.3.9.	Ejemplo de un trozo de sandía	136

5.4.	VECTORES TANGENTES A CURVAS Y SUPERFICIES . . .	138
5.4.1.	Vectores tangentes a una curva parametrizada	138
5.4.2.	Vectores tangentes a una superficie parametrizada . . .	140
5.5.	EJERCICIOS	141
5.5.1.	Ejercicios propuestos	142
5.5.2.	Ejercicios de autoevaluación	142
6.	Transformaciones geométricas en el espacio	145
6.1.	TRANSFORMACIONES EN \mathbb{R}^3	145
6.1.1.	Transformaciones del espacio	145
6.1.2.	Isometrías y semejanzas	146
6.1.3.	Transformación afín	146
6.1.4.	Producto de transformaciones afines	147
6.1.5.	Caracterización de una transformación afín	148
6.2.	SEMEJANZAS EN EL ESPACIO REAL	148
6.2.1.	Traslaciones	149
6.2.2.	Simetrías respecto un punto	149
6.2.3.	Homotecias	150
6.2.4.	Giros sobre un eje y simetría axial	151
6.2.5.	Simetrías respecto un plano	154
6.2.6.	Productos habituales de semejanzas en \mathbb{R}^3	156
6.3.	EJEMPLOS DE SEMEJANZAS EN EL ESPACIO REAL . . .	157
6.3.1.	Ejemplo de traslación	159
6.3.2.	Ejemplo de simetría respecto un punto	160
6.3.3.	Ejemplo de homotecia	161
6.3.4.	Ejemplo de giro y simetría respecto un eje	162
6.3.5.	Ejemplo de simetría respecto un plano	163
6.3.6.	Ejemplo de cizallamiento o sesgado	165
6.3.7.	Procedimiento para el producto de semejanzas	167
6.3.8.	Ejemplo de producto de transformaciones afines	167
6.3.9.	Ejemplo de determinación de una transformación afín a partir de cuatro puntos	170
6.4.	TRANSFORMACIONES PERSPECTIVAS	172

6.5. EJERCICIOS	174
6.5.1. Ejercicios propuestos	174
6.5.2. Ejercicios de autoevaluación	175
A. Soluciones de los ejercicios de autoevaluación	179
A.1. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 1	179
A.1.1. Soluciones	179
A.1.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	179
A.2. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 2	184
A.2.1. Soluciones	184
A.2.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	184
A.3. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 3	188
A.3.1. Soluciones	188
A.3.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	189
A.4. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 4	194
A.4.1. Soluciones	194
A.4.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	194
A.5. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 5	202
A.5.1. Soluciones	202
A.5.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	202
A.6. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 6	210
A.6.1. Soluciones	210
A.6.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	210
Referencias	227

Capítulo 1

Introducción al entorno de cálculo

Como se indica en la Presentación, el texto está orientado para ejecutar todos los comandos en Matlab en alguna de las últimas versiones aunque, como no se utiliza ninguna función especial en el desarrollo del texto (excepto en alguna nota complementaria o alternativa), es compatible con Octave, con versiones más antiguas de Matlab y, con algunos cambios, con otros entornos de cálculo como, por ejemplo, Scilab.

En este capítulo no se trata de entender los procesos matemáticos o algorítmicos que puedan estar detrás de los comandos, sino simplemente conocer las sintaxis de los comandos habituales que se requieren en este texto y qué se consigue con cada uno de ellos. Al final se incluyen algunos ejercicios propuestos y de autoevaluación. En la sección [A.1](#) se encuentran las soluciones y los posibles comandos a utilizar para la resolución de los ejercicios test incluidos en la autoevaluación de este capítulo.

1.1. EL ENTORNO DE CÁLCULO

1.1.1. Ventana de comandos

Al ejecutar el programa aparece la llamada pantalla o ventana de comandos. En ella aparece el menú general de la aplicación con todas sus opciones, así como el ***prompt*** (`>>`) para la entrada de comandos.

1.1.2. Operadores aritméticos

Para ejecutar un simple cálculo basta con escribir los comandos u órdenes al lado del *prompt* y pulsar la tecla *Enter*. Se devuelve la respuesta utilizando la expresión $\text{ans} = (\text{answer})$. Por tanto, una de sus aplicaciones es poder servir como una gran calculadora. Los símbolos utilizados para las operaciones algebraicas son:

$+$ para la suma.

$-$ para la diferencia.

$*$ para el producto.

$/$ para el cociente.

\wedge para la potencia.

Hay que tener en cuenta que, al combinar varios operadores en una misma entrada, hay unos **criterios de prioridad** entre las operaciones que, por defecto, determinan el orden de evaluación de la expresión y que se citan a continuación:

1. Primero se ejecutan las expresiones incluidas dentro de paréntesis.
2. Seguidamente se ejecutan las funciones.
3. Después las operaciones aritméticas: primero las potencias y luego los productos y cocientes de izquierda a derecha.
4. Por último, las sumas y restas también de izquierda a derecha.

Hay que tener también cuidado con los paréntesis y los corchetes, ya que se utilizan para cosas distintas. Ténganse siempre presente las siguientes observaciones:

- a. Si la expresión es un cociente o fracción y puede haber confusión, se sugiere introducir tanto el numerador como el denominador entre paréntesis: $(\dots) / (\dots)$.
- b. Cuando se desea realizar un producto es imprescindible escribir el signo $*$ (asterisco) en la orden correspondiente. No se asume por omisión.
- c. Cuando hay expresiones no simples en potencias, es conveniente utilizar paréntesis: $(\dots) ^ (\dots)$.

**Para seguir leyendo, inicie el
proceso de compra, click aquí**