

# LECCIONES BREVES DE ÀLGEBRA

Valentín Gregori Gregori | Bernardino Roig Sala | Almanzor Sapena Piera





Valentín Gregori Gregori  
Bernardino Roig Sala  
Almanzor Sapena Piera

# Lecciones breves de Álgebra

Colección *Punto de Partida*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Gregori Gregori, V.; Roig Sala, B.; Sapena Piera, A. (2020). *Lecciones breves de Álgebra*. Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

© Valentín Gregori Gregori  
Bernardino Roig Sala  
Almanzor Sapena Piera

© Editorial Universitat Politècnica de València  
Venta: [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 6622\_01\_01\_01

ISBN: 978-84-9048-920-8 (versión impresa)

ISBN: 978-84-9048-921-5 (versión electrónica)

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

## **Autores**

### **VALENTÍN GREGORI GREGORI**

Catedrático de universidad que ejerce la docencia como profesor de matemáticas en la Escuela Politécnica Superior de Gandía de la Universitat Politècnica de València. Ha dirigido varias tesis doctorales y ha publicado algunos libros docentes y un gran número de artículos de investigación sobre topología general y métrica fuzzy en revistas internacionales.

### **BERNARDINO ROIG SALA**

Profesor titular en la Escuela Politécnica Superior de Gandía de la Universitat Politècnica de València; también lo ha sido en otras universidades presenciales y no presenciales, impartiendo asignaturas de la rama de las matemáticas. Es autor de libros y publicaciones docentes y especialista en mecánica computacional y otras aplicaciones numéricas de la matemática en donde es autor de numerosas publicaciones de investigación.

### **ALMANZOR SAPENA PIERA**

Profesor titular de la Universitat Politècnica de València adscrito a la Escuela Politécnica Superior de Gandía, aunque ha impartido clases en distintas escuelas. Ha publicado varios libros docentes dedicados a diferentes asignaturas relacionadas con el álgebra lineal y la estadística. En el ámbito de la investigación, posee varias publicaciones dentro del campo de los espacios métricos difusos y sus aplicaciones al filtrado de imágenes en color.

## Resumen

Con esta publicación presentamos un texto elemental de Álgebra Lineal dirigido a los alumnos de Grado en primer curso de ingenierías en el que se ha tenido en cuenta la diversidad de procedencia de los alumnos. El libro está escrito en un lenguaje sencillo y en el que las demostraciones sólo aparecen de forma esporádica, lo cual facilita su lectura. No obstante, la argumentación de los contenidos es continua y rigurosa en su exposición. Los autores han puesto especial atención en la presentación didáctica de la materia en forma breve que, para su mejor comprensión, contiene una gran cantidad de ejercicios resueltos y también propuestos. Los siete capítulos que componen el programa son: teoría de conjuntos, espacios vectoriales, matrices, aplicaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y diagonalización de matrices.

## Presentación

La Universidad Española emprendió la década pasada una etapa inédita con el denominado Plan Bolonia. En dicho plan el tiempo del que dispone el profesorado para la impartición de la docencia matemática se ha reducido drásticamente. De esta manera la clásica clase magistral del siglo anterior se vuelve, en ocasiones, menos expositiva y más orientada hacia la búsqueda de conocimientos en los que el universitario deberá involucrarse de una manera más activa.

El presente libro es una versión abreviada de la segunda edición del libro Lecciones de Álgebra. Se trata pues de un texto elemental sobre Álgebra Lineal concebido para los alumnos del grado en telecomunicaciones que se gradúan en estos nuevos planes aunque básicamente el contenido corresponde al curso que los autores han impartido en la Escuela Politécnica Superior de Gandia en anteriores cursos académicos. El poco tiempo de que se dispone para su impartición queda patente, en cierta manera, en la ausencia de demostraciones que sólo aparecen esporádicamente en el desarrollo del capítulo. Ello, sin embargo, permite una lectura fluida del texto.

No obstante lo dicho en el párrafo anterior, y aun usando terminología sencilla, la argumentación de los contenidos del texto es constante y rigurosa en su exposición. Los epígrafes que aparecen en letra pequeña contienen demostraciones o ponen énfasis en algunos aspectos matemáticos, y su lectura no es imprescindible para la comprensión del texto. En ocasiones, el uso de la letra cursiva nos permite eludir la formalización de conceptos, cuando éstos parecen intuitivos.

Los autores se han esmerado sobre todo en la exposición didáctica del texto que han estructurado en capítulos. La exposición de resultados de cada capítulo se ilustra con ejemplos que aclaran los conceptos. Al término de cada capítulo se dan ejercicios resueltos con todo detalle, y después se proponen unos pocos que motiven al estudioso.

Los siete capítulos que componen el programa que se desarrolla, en este orden son: teoría de conjuntos, espacios vectoriales, matrices, aplicaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y diagonalización de matrices.

Para la comprensión del texto sólo se requieren nociones elementales de bachillerato.

Los autores agradecerán cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones sucesivas.

*Los autores*

# Notación

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

$\forall$	Cuantificador universal. Se lee “para todo” o “para cada”
$\exists$	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
$\iff$	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
$\equiv$	Equivalencia (o cambio convencional de notación)
$\Rightarrow$	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
$\square$	Indica final de una demostración
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
$\in$	Símbolo de pertenencia
$\subset$	Símbolo de inclusión
$\cup$	Símbolo de unión
$\cap$	Símbolo de intersección
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
$\mathbb{N}^*$	El conjunto $\mathbb{N}$ sin el cero
$\mathbb{Z}$	El anillo de los números enteros
$\mathbb{Q}$	El cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	El cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	El cuerpo de los números complejos
$\mathbb{K}$	Cuerpo ( $\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$ , generalmente)



# Sumario

<b>1</b>	<b>TEORÍA DE CONJUNTOS</b>	<b>13</b>
1.1	EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS . . . . .	13
1.1.1	Conjuntos . . . . .	13
1.1.2	Ejemplos . . . . .	14
1.1.3	Nota . . . . .	15
1.1.4	Representaciones gráficas . . . . .	15
1.1.5	Unión, intersección y complementación de conjuntos . . . . .	15
1.1.6	Ejemplos . . . . .	17
1.1.7	El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos . . . . .	18
1.1.8	Partición . . . . .	19
1.2	PRODUCTOS CARTESIANOS . . . . .	19
1.2.1	Producto cartesiano . . . . .	19
1.2.2	Ejemplos . . . . .	19
1.3	APLICACIONES . . . . .	20
1.3.1	Correspondencias . . . . .	20
1.3.2	Ejemplo . . . . .	20
1.3.3	Nota . . . . .	21
1.3.4	Ejemplo (Reencuentro del Álgebra y la Geometría) . . . . .	21
1.3.5	Aplicaciones . . . . .	22
1.3.6	Ejemplo . . . . .	22
1.3.7	Clasificación de aplicaciones . . . . .	22
1.3.8	Ejemplo . . . . .	23
1.3.9	Inversa de una aplicación biyectiva . . . . .	23
1.3.10	Ejemplo . . . . .	24
1.3.11	Composición de aplicaciones . . . . .	24
1.3.12	Ejemplo . . . . .	25
1.4	COMBINATORIA . . . . .	26
1.4.1	Variaciones con repetición . . . . .	26
1.4.2	Ejemplo . . . . .	26
1.4.3	Variaciones ordinarias . . . . .	26

1.4.4	Ejemplo . . . . .	27
1.4.5	Permutaciones . . . . .	27
1.4.6	Ejemplo . . . . .	27
1.4.7	Combinaciones . . . . .	27
1.4.8	Ejemplo . . . . .	28
1.4.9	Nota . . . . .	28
1.4.10	Permutaciones con repetición . . . . .	28
1.4.11	Números combinatorios. Propiedades . . . . .	28
1.4.12	Triángulo de Tartaglia . . . . .	29
1.4.13	Binomio de Newton . . . . .	30
1.4.14	Ejemplo . . . . .	30
1.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	31
1.6	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	36
<b>2</b>	<b>ESPACIOS VECTORIALES</b>	<b>37</b>
2.1	ESPACIOS VECTORIALES . . . . .	37
2.1.1	El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ . . . . .	37
2.1.2	Representaciones geométricas . . . . .	38
2.1.3	Subespacios vectoriales . . . . .	39
2.1.4	Subespacios de $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$ . . . . .	39
2.1.5	Combinaciones lineales . . . . .	39
2.1.6	Rectas vectoriales en $\mathbb{R}^n$ . . . . .	40
2.1.7	Ejemplo . . . . .	40
2.1.8	Interpretaciones geométricas . . . . .	41
2.1.9	Dependencia lineal . . . . .	42
2.1.10	Ejemplos . . . . .	42
2.1.11	Consecuencias . . . . .	43
2.2	BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL . . . . .	43
2.2.1	Base de un espacio vectorial . . . . .	43
2.2.2	Teorema de la dimensión . . . . .	43
2.2.3	Bases canónicas . . . . .	44
2.2.4	Teorema de la base incompleta . . . . .	44
2.3	PROCESO DE REDUCCIÓN DE GAUSS . . . . .	44
2.3.1	Lema . . . . .	45
2.3.2	Nota . . . . .	45
2.3.3	Ejemplo . . . . .	45
2.3.4	Proceso de reducción de Gauss . . . . .	46
2.3.5	Ejemplo . . . . .	46
2.3.6	Suma de subespacios . . . . .	47
2.3.7	Nota . . . . .	47
2.3.8	Ejemplo . . . . .	47

2.4	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	48
2.5	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	52

### **3 MATRICES** **53**

3.1	EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES . . . . .	53
3.1.1	Matriz . . . . .	53
3.1.2	Ejemplos . . . . .	54
3.1.3	El grupo abeliano $(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$ . . . . .	54
3.1.4	El espacio vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}$ . . . . .	55
3.1.5	Ejemplos . . . . .	55
3.1.6	Base de $\mathcal{M}_{m \times n}$ . . . . .	55
3.1.7	Ejemplo . . . . .	55
3.2	EL ANILLO DE LAS MATRICES CUADRADAS . . . . .	56
3.2.1	El producto de matrices . . . . .	56
3.2.2	Ejemplo . . . . .	56
3.2.3	El anillo de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ . . . . .	57
3.3	TIPOS ESPECIALES DE MATRICES . . . . .	57
3.3.1	Matriz inversible . . . . .	57
3.3.2	Ejemplos . . . . .	58
3.3.3	Matrices triangulares . . . . .	58
3.3.4	Ejemplo . . . . .	59
3.3.5	Traspuesta de una matriz . . . . .	59
3.3.6	Ejemplos . . . . .	59
3.3.7	Nota . . . . .	59
3.3.8	Propiedades de la matriz traspuesta . . . . .	60
3.3.9	Otros tipos de matrices . . . . .	60
3.4	RANGO DE UNA MATRIZ . . . . .	60
3.4.1	Definición . . . . .	60
3.4.2	Teorema . . . . .	60
3.4.3	Ejemplo . . . . .	60
3.5	MATRICES ELEMENTALES . . . . .	61
3.5.1	Matrices elementales . . . . .	61
3.5.2	Ejemplos . . . . .	61
3.5.3	Cálculo de la inversa de una matriz mediante matrices elementales . . . . .	62
3.5.4	Ejemplo . . . . .	62
3.5.5	Teorema . . . . .	63
3.5.6	Inversas de matrices triangulares . . . . .	63
3.5.7	Ejemplo . . . . .	63
3.5.8	Descomposición $LU$ . . . . .	63
3.5.9	Ejemplo . . . . .	64
3.5.10	Matrices escalonadas. Descomposición $LS$ . . . . .	64

3.5.11	Ejemplo . . . . .	65
3.6	MATRICES POR BLOQUES . . . . .	66
3.6.1	Matrices por bloques . . . . .	66
3.6.2	Ejemplo . . . . .	67
3.7	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	68
3.8	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	73
<b>4</b>	<b>APLICACIONES LINEALES</b>	<b>75</b>
4.1	APLICACIONES LINEALES . . . . .	75
4.1.1	Aplicaciones lineales . . . . .	75
4.1.2	Propiedades . . . . .	76
4.1.3	Ejemplos . . . . .	76
4.1.4	Ejemplo . . . . .	76
4.1.5	Núcleo . . . . .	77
4.1.6	Teorema (caracterización de aplicaciones inyectivas) . . . . .	77
4.1.7	Nota (caracterización de aplicaciones suprayectivas) . . . . .	77
4.1.8	Ejemplo . . . . .	77
4.1.9	Proposición . . . . .	78
4.1.10	Proposición . . . . .	78
4.1.11	Teorema de la dimensión (de aplicaciones lineales) . . . . .	78
4.1.12	Corolario (idoneidad de las aplicaciones lineales) . . . . .	78
4.2	MATRICES Y APLICACIONES LINEALES . . . . .	78
4.2.1	Matriz asociada a una aplicación lineal . . . . .	78
4.2.2	Ejemplo . . . . .	80
4.2.3	Rango de una aplicación lineal . . . . .	80
4.2.4	Ejemplo . . . . .	80
4.2.5	Matriz de la aplicación identidad $I$ . . . . .	82
4.2.6	Isomorfismo entre aplicaciones lineales y matrices . . . . .	83
4.2.7	Nota . . . . .	83
4.2.8	Proposición . . . . .	83
4.3	APLICACIONES LINEALES Y MATRICES INVERSIBLES . . . . .	83
4.3.1	Proposición . . . . .	83
4.3.2	Nota . . . . .	83
4.3.3	Proposición . . . . .	84
4.3.4	Composición de aplicaciones lineales . . . . .	84
4.3.5	Ejemplo . . . . .	84
4.3.6	Proposición . . . . .	84
4.3.7	Teorema . . . . .	84
4.3.8	Corolario . . . . .	85
4.4	CAMBIOS DE BASE . . . . .	85
4.4.1	Expresión matricial del cambio de base en un espacio vectorial . . . . .	85

4.4.2	Ejemplo . . . . .	86
4.4.3	Matrices asociadas a una aplicación lineal . . . . .	87
4.4.4	Nota . . . . .	88
4.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	88
4.6	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	93
<b>5</b>	<b>DETERMINANTES</b>	<b>95</b>
5.1	DETERMINANTE DE ORDEN $n$ . . . . .	95
5.1.1	Signatura de una permutación . . . . .	95
5.1.2	Determinante de orden $n$ . . . . .	96
5.1.3	Determinante de orden 3 y de orden 2 . . . . .	97
5.1.4	Ejemplos . . . . .	97
5.1.5	Propiedades de los determinantes de orden $n$ . . . . .	98
5.1.6	Ejemplos . . . . .	99
5.2	DESARROLLO DE UN DETERMINANTE . . . . .	100
5.2.1	Menor complementario y adjunto . . . . .	100
5.2.2	Ejemplo . . . . .	101
5.2.3	Proposición . . . . .	101
5.2.4	Proposición (desarrollo de un determinante) . . . . .	101
5.2.5	Proposición (determinante de una matriz triangular) . . . . .	102
5.2.6	Cálculo práctico de determinantes . . . . .	102
5.2.7	Ejemplo . . . . .	102
5.3	MATRIZ INVERSIBLE . . . . .	103
5.3.1	Proposición . . . . .	103
5.3.2	Teorema . . . . .	103
5.3.3	Corolario . . . . .	104
5.3.4	Nota . . . . .	104
5.3.5	Proposición . . . . .	104
5.3.6	Cálculo de la matriz inversa . . . . .	104
5.3.7	Ejemplo . . . . .	105
5.3.8	Aplicación al cálculo del rango de una matriz . . . . .	105
5.3.9	Ejemplo . . . . .	106
5.4	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	106
5.5	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	110
<b>6</b>	<b>SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES</b>	<b>113</b>
6.1	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	113
6.1.1	Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	113
6.1.2	Solución de un sistema de ecuaciones lineales . . . . .	114
6.1.3	Matriz ampliada . . . . .	115
6.1.4	Proposición . . . . .	115

6.1.5	Ejemplo . . . . .	115
6.1.6	Clasificación de sistemas . . . . .	116
6.1.7	Teorema de Rouché-Fröbenius . . . . .	116
6.1.8	Ejemplos . . . . .	117
6.2	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	119
6.2.1	Regla de Cramer . . . . .	119
6.2.2	Ejemplos . . . . .	120
6.2.3	Método de reducción de Gauss . . . . .	121
6.2.4	Ejemplo . . . . .	122
6.2.5	Sistema homogéneo . . . . .	123
6.2.6	Ejemplo . . . . .	123
6.2.7	Resolución de un sistema de Cramer por descomposición $LU$ . . . . .	124
6.2.8	Resolución de un sistema por descomposición $LS$ . . . . .	124
6.2.9	Interpolación polinómica . . . . .	125
6.2.10	Sistemas sobredeterminados . . . . .	126
6.3	ECUACIONES DE LOS SUBESPACIOS DE $\mathbb{R}^n$ . . . . .	126
6.3.1	Ecuaciones vectorial y paramétricas de un subespacio vectorial . . . . .	126
6.3.2	Nota . . . . .	127
6.3.3	Ecuaciones de un subespacio vectorial (Eliminación de parámetros) . . . . .	127
6.3.4	Ejemplo . . . . .	128
6.4	RESOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	130
6.4.1	Aproximaciones sucesivas . . . . .	130
6.4.2	Métodos iterativos. Convergencia . . . . .	130
6.4.3	Método de Jacobi . . . . .	131
6.4.4	Método de Gauss-Seidel . . . . .	132
6.4.5	Nota . . . . .	132
6.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	133
6.6	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	143
<b>7</b>	<b>DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES</b> . . . . .	<b>145</b>
7.1	SUBESPACIOS PROPIOS . . . . .	145
7.1.1	Introducción . . . . .	145
7.1.2	Vectores propios . . . . .	146
7.1.3	Nota . . . . .	146
7.1.4	Subespacio propio . . . . .	146
7.1.5	Ejemplo . . . . .	146
7.1.6	El polinomio característico . . . . .	146
7.1.7	Unicidad del polinomio característico . . . . .	147
7.1.8	Ejemplo . . . . .	148
7.2	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES . . . . .	148
7.2.1	Definición . . . . .	148

7.2.2	Proposición . . . . .	148
7.2.3	Nota . . . . .	148
7.2.4	Proposición . . . . .	149
7.2.5	Ejemplo . . . . .	149
7.2.6	Teorema (caracterización de los endomorfismos diagonalizables) . . . .	150
7.2.7	Ejemplo . . . . .	150
7.2.8	Nota . . . . .	150
7.2.9	Matriz de paso . . . . .	150
7.2.10	Potencia de una matriz . . . . .	150
7.2.11	Matrices simétricas . . . . .	151
7.2.12	Nota . . . . .	151
7.3	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	151
7.4	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	156
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>159</b>





# Capítulo 1

## TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece una (ingenua) introducción a la teoría de conjuntos que es suficiente para establecer y estudiar los conceptos que se definen a lo largo del texto. Se ha puesto especial interés en el concepto de aplicación, para concluir con unas nociones elementales de combinatoria.

El **Principio de Inducción** establece para una *proposición*  $\mathcal{P}_n$  donde  $n \in \mathbb{N}$ , que:

$$[\mathcal{P}_1 \text{ cierto y } (\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}) \text{ cierto}] \rightarrow (\mathcal{P}_n \text{ cierto}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

En este Principio se fundamentan las demostraciones por inducción y los conceptos que se definen por recurrencia (o inducción).

En la prueba de  $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$  se asume (**hipótesis de inducción**) que  $\mathcal{P}_n$  es cierta. En la práctica este Principio admite variantes, en cuanto a su aplicación.

### 1.1 EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

#### 1.1.1 Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos. Los conjuntos suelen denotarse con letras mayúsculas. Cuando se explicitan sus elementos, éstos, sin repetirse, se encierran entre llaves separados por comas. En ciertos contextos se utilizan los términos **sistema**, **colección** y **familia** como sinónimos de conjunto. Así se habla de “familia de conjuntos” en vez de “conjunto de conjuntos” y “sistema de vectores” en vez de “conjunto de vectores”.

Designaremos por  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{R}$  y  $\mathbb{C}$  a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Así, por ejemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un **conjunto unitario** es aquél que posee un único elemento. Esta terminología se extiende a conjuntos de dos o más elementos, de manera obvia.

Para expresar que un elemento  $a$  **pertenece** a un conjunto  $S$  (o que está en  $S$ ) se escribe  $a \in S$ . Si  $a$  no está en  $S$  se escribe  $a \notin S$ . Para expresar que un conjunto  $A$  está **contenido** (o **incluido**) en otro  $B$  (i.e., todo elemento de  $A$  está en  $B$ ) se escribe  $A \subset B$  (o  $B \supset A$ ), en tal caso se dice que  $A$  es un **subconjunto** de  $B$ . Si  $A$  no está incluido en  $B$  se escribe  $A \not\subset B$ .

Se designa por  $\emptyset$  al conjunto **vacío** que no posee elementos. Todo subconjunto no vacío  $S$  posee dos subconjuntos **impropios**:  $\emptyset$  y  $S$ . Los demás subconjuntos de  $S$  se llaman **propios**.

Dos conjuntos  $A$  y  $B$  son **iguales**, y se escribe  $A = B$ , cuando poseen los mismos elementos, lo cual sucede si  $A \subset B$  y  $B \subset A$ .

Un conjunto también se describe a través de una expresión caracterizadora de sus elementos dentro de un contexto (conjunto **referencial**). Así, el conjunto  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$  también se puede escribir de las dos formas siguientes:

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \quad \text{o} \quad \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 4\}.$$

### 1.1.2 Ejemplos

- (a) El conjunto  $V$  de las vocales es  $V = \{a, e, i, o, u\}$  (o también  $V = \{e, i, a, o, u\}$  pues el orden de aparición de los elementos es irrelevante).

Se tiene que  $\{a, e, o\} \subset V$  pero  $\{a, m\} \not\subset V$  pues  $m \notin V$ .

- (b)  $-2 \in \mathbb{Z}$  pero  $-2 \notin \mathbb{N}$

- (c) Se tienen las inclusiones *numéricas*  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ ,  $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$  y  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ . Sin embargo las inclusiones *contrarias* no se verifican.

- (d) El conjunto *binario*  $\{-1, 1\}$  se puede escribir  $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x^2 \leq 2\}$ .

- (e) Se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset.$$

Obsérvese que el conjunto  $\emptyset$  viene determinado por una condición imposible de cumplir.

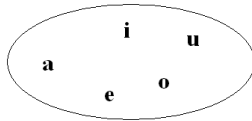
- (f) El conjunto  $\{0, 2, 4, \dots\}$  que contiene el 0 y los pares es el conjunto  $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$  por lo que habitualmente se representa por  $2\mathbb{N}$ . Análogamente si  $p \in \mathbb{N}^*$ ,  $p\mathbb{N}$  representa los naturales múltiples de  $p$ , que también suelen denotarse  $\dot{p}$ .

### 1.1.3 Nota

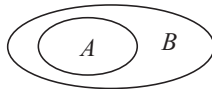
Si  $a \in S$  podemos escribir  $\{a\} \subset S$  pero la notación  $a \subset S$  es incorrecta. En la actualidad, en argumentaciones matemáticas, se acepta la notación  $a, b \in S$  para indicar que ambos elementos  $a$  y  $b$  pertenecen a  $S$ .

### 1.1.4 Representaciones gráficas

En ocasiones los conjuntos se describen (definen) mediante gráficos. Así, un **diagrama de Venn** es una representación gráfica plana de un conjunto, en la que sus elementos quedan encerrados por una línea, como se muestra en la figura siguiente en la que se representa el conjunto de vocales.



El gráfico siguiente *muestra* que  $A \subset B$ .



En un **diagrama lineal** los elementos del conjunto son los que resaltan sobre el segmento o la recta donde se representan. Este tipo de representación es interesante cuando se desea entrever un *orden* entre los elementos. En la figura inferior se representa en  $\mathbb{R}$  el conjunto  $I = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2\}$  que es el intervalo  $[1, 2[$ .



### 1.1.5 Unión, intersección y complementación de conjuntos

Sean  $A$  y  $B$  dos conjuntos. Se define la **unión** de los conjuntos  $A$  y  $B$ , y se denota  $A \cup B$  (se lee  $A$  unión  $B$ ), como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$

**Para seguir leyendo, inicie el proceso de compra, click aquí**