

00 PRESENTACIÓN Y MOTIVACIÓN

0.1 OBJETIVOS

0.2 MODELOS MATEMÁTICOS PARA LOS ELEMENTOS ESTRUCTURALES SIMPLES

0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE LOS PUENTES

01 EL MODELO VIGA EN EL ANÁLISIS DE TABLEROS

1.0 MOTIVACIÓN

1.1 LIMITACIONES DEL MODELO

1.1.1 Respuesta cualitativa de la viga cajón

1.1.2 Ámbito general del modelo viga

1.1.3 Cuantificación del arrastre de cortante

1.1.4 Cuantificación de la distorsión

1.1.5 Cuantificación de la torsión

1.1.6 Definición de la luz efectiva

1.1.7 Resumen operativo

1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS

1.2.1 Topología del modelo: barras, nodos y enlaces

1.2.2 Parámetros mecánicos de las barras

1.2.3 Matriz de rigidez de las barras

1.3 SECCIONES MIXTAS Y PAREDES RETICULADAS

1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO

1.4.1 Desplazamientos del tablero

1.4.2 Tensiones en servicio

1.5 PUENTES OBLICUOS Y PUENTES CURVOS

1.5.1 Puentes oblicuos

1.5.2 Puentes curvos

ANEXO A: parámetros mecánicos de la sección en cajón unicelular

ANEXO B: parámetros mecánicos de la sección doble viga

02 EL MODELO EMPARRILLADO EN EL ANÁLISIS DE TABLEROS

2.0 MOTIVACIÓN

2.1 MODELADO DEL TABLERO

2.1.0 Una cuestión previa: la acción de membrana de la losa

2.1.1 Tableros de vigas y losa

2.1.2 Tableros de vigas celulares

2.1.3 Tableros losa macizos

2.1.4 Tableros losa aligerados

- 2.2 DISPOSICIÓN DE LA MALLA PARA PLANTAS MÁS GENERALES
- 2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS
 - 2.3.1 Introducción de acciones
 - 2.3.2 Interpretación de resultados

03 EL CÁLCULO LOCAL EN EL ANÁLISIS DE TABLEROS

- 3.0 MOTIVACIÓN
- 3.1 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO LOCAL
- 3.2 TÉCNICAS DE EMPARRILLADO Y DE ELEMENTOS FINITOS
- 3.3 MÉTODOS SIMPLIFICADOS DE EVALUACIÓN DE LA FLEXIÓN LOCAL DEL PISO DEL TABLERO

04 EL MODELO LOSA EN EL ANÁLISIS DE TABLEROS

- 4.0 MOTIVACIÓN
- 4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA
 - 4.1.1 Variables estáticas de la flexión
 - 4.1.2 Variables cinemáticas de la flexión
 - 4.1.3 Relaciones constitutivas
 - 4.1.4 Formulación del problema de equilibrio
 - 4.1.5 Solución del problema de equilibrio
 - 4.1.6 Ejemplo

4.2 MODELADO MECÁNICO DE TABLEROS LOSA

4.3 MODELADO NUMÉRICO DE TABLEROS LOSA

4.4 COMENTARIOS FINALES

05 EL MODELO LÁMINA PLEGADA EN EL ANÁLISIS DE TABLEROS

5.0 MOTIVACIÓN

5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA

5.1.1 Presentación del método

5.1.2 Variables estáticas en cada panel

5.1.3 Variables cinemáticas en cada panel

5.1.4 Relaciones constitutivas

5.1.5 Formulación del problema de equilibrio

5.2 MODELADO MECÁNICO DE TABLEROS DE PARED DELGADA

5.3 MODELADO NUMÉRICO DE TABLEROS DE PARED DELGADA

5.4 COMENTARIOS FINALES

06 ANÁLISIS DE SISTEMAS COMPLEJOS PUENTES ARCO Y PUENTES ATIRANTADOS

6.0 MOTIVACIÓN

6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO

6.1.1 Morfología de puentes arco

6.1.1.1 Puentes arco metálicos de tablero superior

6.1.1.2 Puentes arco metálicos con distintas disposiciones del tablero

6.1.1.3 Puentes arco metálicos de tablero inferior

6.1.1.4 Puentes arco de hormigón

6.1.2 Modelado estructural de puentes arco

6.1.2.1 Respuesta de las piezas curvas

6.1.2.2 Respuesta no lineal de la viga-columna

6.1.2.3 Respuesta no lineal de la viga-tirante

6.1.2.4 Análisis no lineal de puentes arco

6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS

6.2.1 Morfología de puentes atirantados

6.2.1.1 Puentes atirantados con tirantes aislados y tablero metálico

6.2.1.2 Puentes atirantados con tirantes múltiples y tablero metálico o mixto

6.2.1.3 Puentes atirantados con tablero de hormigón pretensado

6.2.2 Modelado estructural de puentes atirantados

6.2.2.1 Respuesta no lineal del cable

6.2.2.2 Respuesta no lineal del tirante

6.2.2.3 Análisis no lineal de puentes atirantados

6.3 ANÁLISIS COMPLETO DEL PUENTE

6.3.1 Ejemplo 1: modelado de un puente arco

6.3.2 Ejemplo 2: modelado de un puente atirantado

07 LAS ACCIONES SEGÚN LA IAP-11

7.1 MOTIVACIÓN

7.2 PRINCIPIOS GENERALES DE PROYECTO

7.3 ACCIONES PERMANENTES

7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)

7.5 ACCIONES ACCIDENTALES (A)

7.6 BASES PARA LA COMBINACIÓN DE ACCIONES

7.7 CRITERIOS PARA LA COMPROBACIÓN DE ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO

7.8 PRUEBAS DE CARGA

BIBLIOGRAFÍA

- 0.1 Objetivos**
- 0.2 Modelos matemáticos para los elementos estructurales simples**
- 0.3 El modelado estructural y las formas resistentes de los puentes**

00 Presentación y motivación

❑ OBJETIVOS GENERALES DEL CURSO

Directamente dirigido a los futuros de Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, así como a los ingenieros estructuralistas implicados en, o motivados por, el análisis de los puentes, este curso pretende proporcionar criterios claros y sólidos para **abordar correctamente el modelado estructural de los puentes** y las acciones asociadas, derivadas de la aplicación de la normativa vigente (IAP-11) y saberlo **resolver técnicamente** dentro de unos límites aceptables de complejidad (*pongamos $L < 200$ m*)

❑ OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Su contenido apunta a los siguientes **objetivos específicos**:

- 1) Exponer la conexión existente entre la abstracción de los modelos matemáticos para el análisis de estructuras simples, la intuición implícita en el modelado estructural, así como presentar la estrategia de análisis de una construcción real, que requiere en general el manejo de varios modelos, globales y locales, para reproducir adecuadamente el comportamiento resistente del puente en sus distintas fases (construcción y servicio)

00 Presentación y motivación

❑ OBJETIVOS ESPECÍFICOS (continuación)

- 2) Delimitar el **ámbito de aplicación** y la **parametrización** de los modelos estructurales básicos, más usuales en el análisis de tableros de puentes: viga, emparrillado, losa y lámina plegada
- 3) Presentar los **modelos locales** requeridos para paliar las deficiencias del cálculo global procesado con algunos de los modelos anteriores (viga y emparrillado)
- 4) Extender el modelado a **tipologías más complejas**, como los puentes arco y los puentes atirantados, para las cuales resulta necesario incorporar la no-linealidad geométrica a la formulación
- 5) Por último, introducir la **normativa de acciones** vigente en puentes de carretera (IAP-11)

00 Presentación y motivación

LA ABSTRACCIÓN

□ LOS MODELOS MATEMÁTICOS

- Nuestra **formación estructural** se inicia invariablemente con el estudio de los elementos estructurales simples por la **vía más económica**: el **modelo físico-matemático**. De ese modo, la respuesta frente a cargas estáticas de los elementos esbeltos usualmente empleados en nuestras construcciones da lugar a la **teoría de la estática lineal de vigas, arcos, placas o láminas**, dependiendo del desarrollo espacial del elemento y de si posee curvatura o no
- Por esta vía, se puede obtener **soluciones analíticas cerradas** para determinadas geometrías y condiciones de contorno sencillas (*sección y curvatura constantes, apoyos rectos...*)
- Además, como nuestras estructuras consisten en general en **armazones** o ensamblajes de piezas simples, este primer nivel de formación se complementa con la **extensión de la formulación teórica** al caso de los **sistemas** (*de barras, de placas, híbridos...*) mediante **formulación matricial**

00 Presentación y motivación

LA ABSTRACCIÓN

□ LOS MODELOS MATEMÁTICOS

- Con estas herramientas básicas, nuestra **capacidad de cálculo** en el ámbito de los puentes resulta muy **limitada** si se considera la extraordinaria riqueza formal de estas construcciones, originada tanto por la búsqueda de formas resistentes más eficientes como por la creciente intencionalidad arquitectónica. Ello obliga a prescindir de soluciones analíticas cerradas en beneficio de **soluciones numéricas**: las formulaciones unificadas mediante **EF**, que exigen un tercer nivel de formación estructuralista
- **La abstracción** en este proceso, consiste en **adoptar un conjunto de modelos matemáticos** para el análisis, basados en la morfología de la **estructura física** o real, y podemos anticipar que el grado de abstracción decrece a medida que el modelo se hace más sofisticado

00 Presentación y motivación

LA INTUICIÓN Y LA EXPERIENCIA

❑ LOS MODELOS ESTRUCTURALES

- La elaboración de un modelo estructural que proporcione una **buena estimación** de la respuesta resistente de un puente requiere **intuición** y **experiencia**. Como veremos en los próximos temas, en algunas ocasiones el proceso tiene cierta dosis heurística (*reglas empíricas...*) que intentaremos minimizar
- Una condición necesaria para el éxito consiste en estar familiarizado con los **límites de aplicación** de los modelos simples. Solo así evitaremos errores en origen, que comprometan la validez de todos los resultados posteriores
- Finalmente, la **eficiencia** del proceso de análisis así como las **particularidades** del procedimiento constructivo requieren que tanto el **modelado** como el alcance de los **resultados** se organicen por **niveles** como veremos a continuación

00 Presentación y motivación

UNA ESTRATEGIA PARA EL ANÁLISIS

❑ LOS MODELOS ESTRUCTURALES: modelos globales y modelos locales

01 SELECCIÓN DEL MODELO GLOBAL. Se *adapta* al *esqueleto resistente* del puente. Por ello suele configurarse como sistema espacial de barras (*una excepción: los tableros de pared delgada de gran anchura y luces moderadas*)

02 DEFINICIÓN DE LOS MODELOS LOCALES COMPLEMENTARIOS. Se asocian a todos los fenómenos no captados por el modelo global, siendo los más comunes:

- Flexión local del piso (*bajo la acción de los vehículos pesados de la SCU*)
- Difusión de las tensiones de membrana (*arrastre de cortante*)
- Abolladura de las chapas comprimidas

00 Presentación y motivación

UNA ESTRATEGIA PARA EL ANÁLISIS

03 SELECCIÓN DE LOS DISTINTOS NIVELES DE ANÁLISIS

▪ **Fase de estudio o proyecto básico:** *modelado estructural global*, requiere seleccionar los modelos más adecuados para el sistema primario y las subestructuras, sin olvidar modelar los aparatos de apoyo (*conexiones elásticas y desconexiones*). En esta fase todos los cálculos se realizan en *régimen lineal*

▪ **Fase de proyecto de construcción**

(1) El puente en servicio: *modelado estructural local*, para chequear acciones locales, abolladura... También corresponden a esta fase las pertinentes *comprobaciones no-lineales* y de *estabilidad global*

(2) El puente en construcción: *chequeo resistente* de las distintas fases constructivas

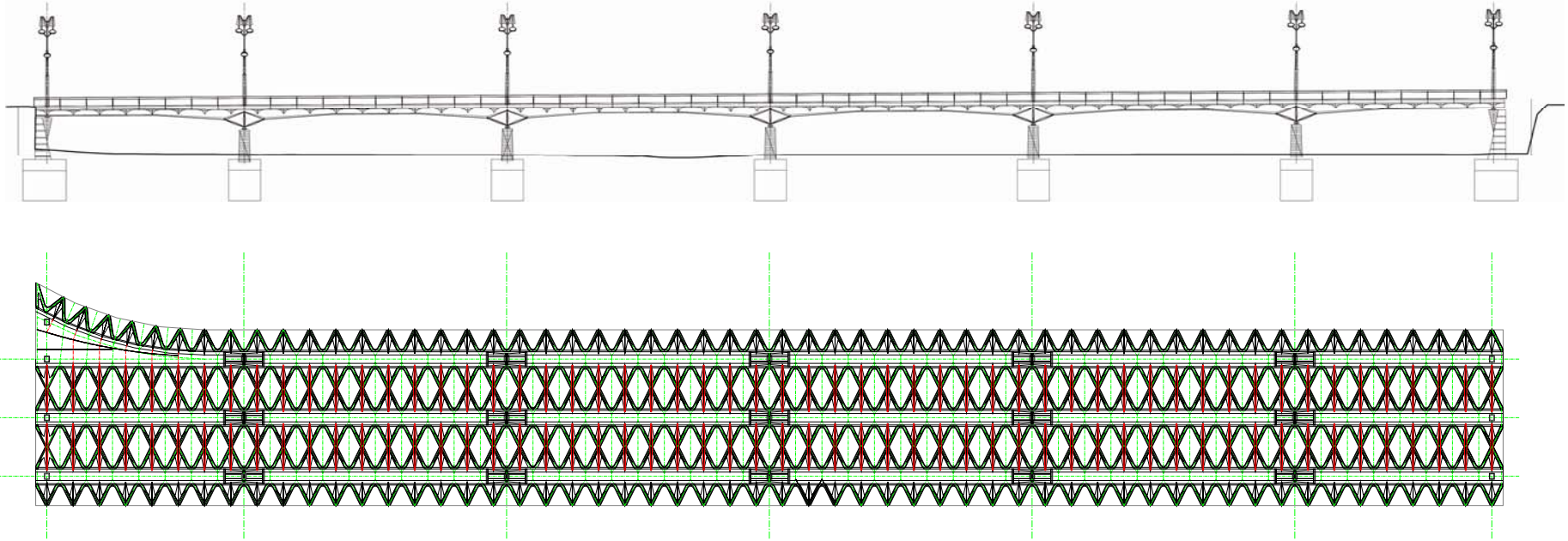
00 Presentación y motivación



<0.6.1 UN EJEMPLO: propuesta para el Nou Pont de Fusta>

**<0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE
LOS PUENTES>**

00 Presentación y motivación

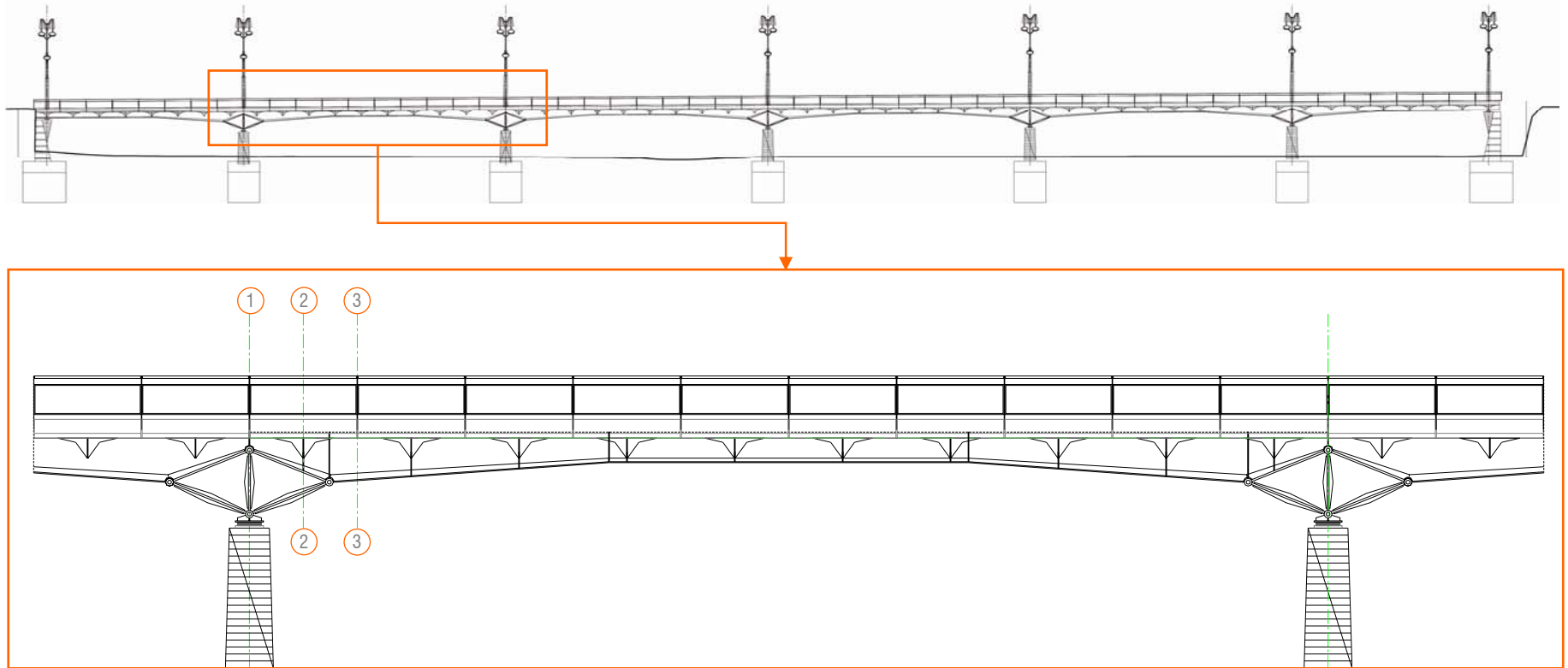


▪**Organización estructural.** Alzado del puente y planta del sistema resistente del tablero: tres vigas cajón longitudinales y forjado reticular oblicuo en acero, con losa de HA sobrepuesta

<0.3.1 UN EJEMPLO: propuesta para el Nou Pont de Fusta>

<0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE LOS PUENTES>

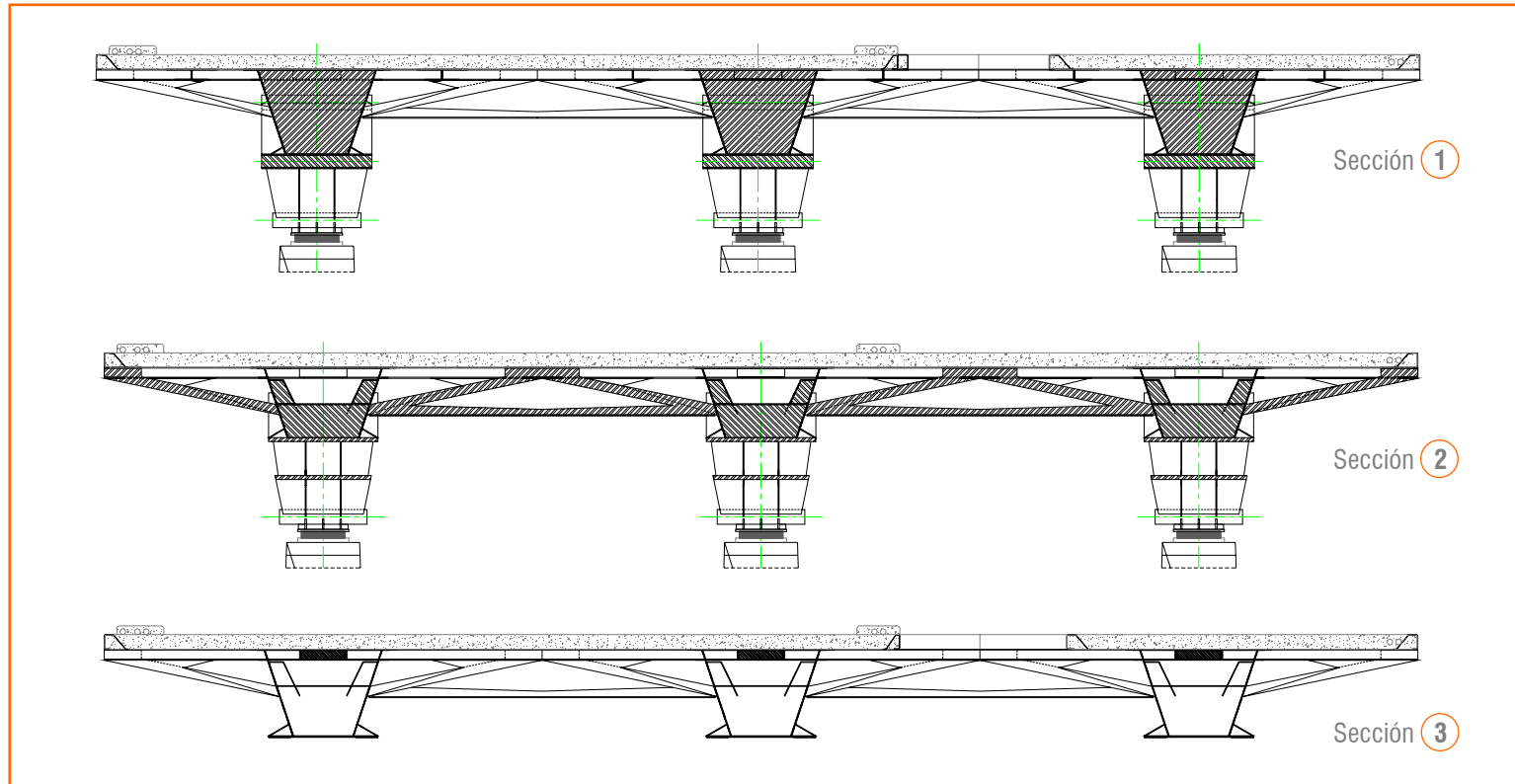
00 Presentación y motivación



<0.3.1 UN EJEMPLO: propuesta para el Nou Pont de Fusta>

<0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE LOS PUENTES>

00 Presentación y motivación

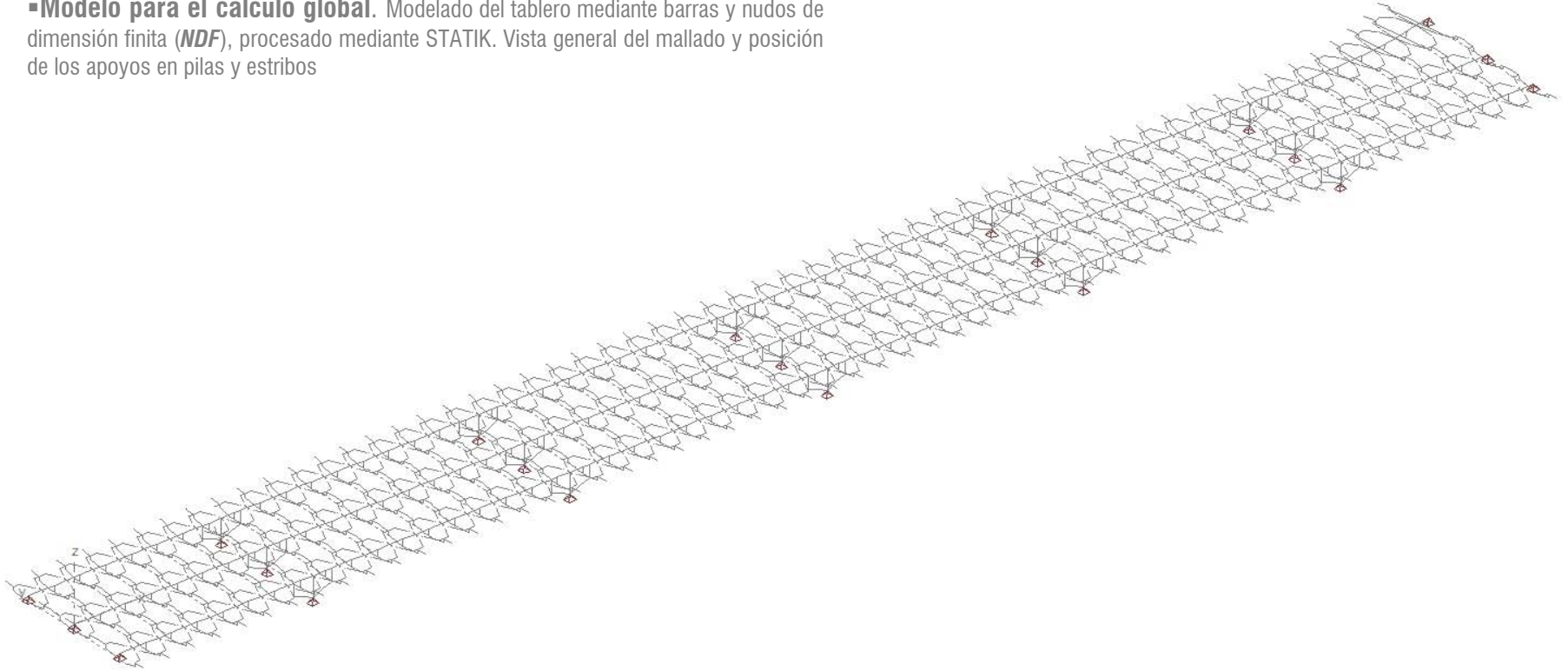


<0.3.1 UN EJEMPLO: propuesta para el Nou Pont de Fusta>

<0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE LOS PUENTES>

00 Presentación y motivación

■ **Modelo para el cálculo global.** Modelado del tablero mediante barras y nudos de dimensión finita (**NDF**), procesado mediante STATIK. Vista general del mallado y posición de los apoyos en pilas y estribos



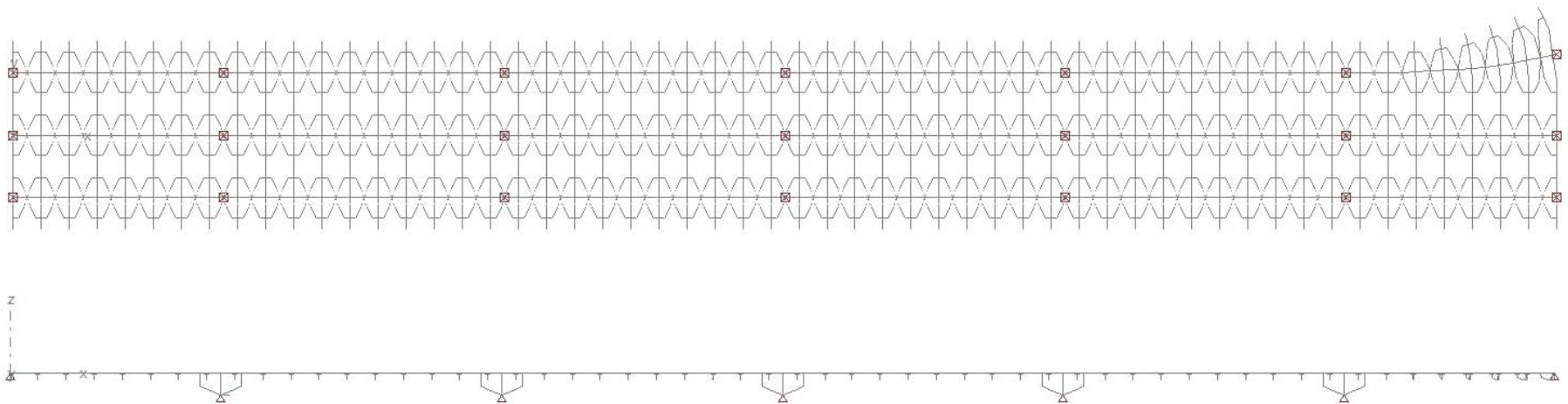
0.3.1.1 El modelo global

<0.3.1 UN EJEMPLO: propuesta para el Nou Pont de Fusta>

<0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE LOS PUENTES>

00 Presentación y motivación

■ **Modelo para el cálculo global.** Modelado del tablero mediante barras y nudos de dimensión finita (**NDF**), vistas en planta y alzado lateral



0.3.1.1 El modelo global

<0.3.1 UN EJEMPLO: propuesta para el Nou Pont de Fusta>

<0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE LOS PUENTES>

00 Presentación y motivación

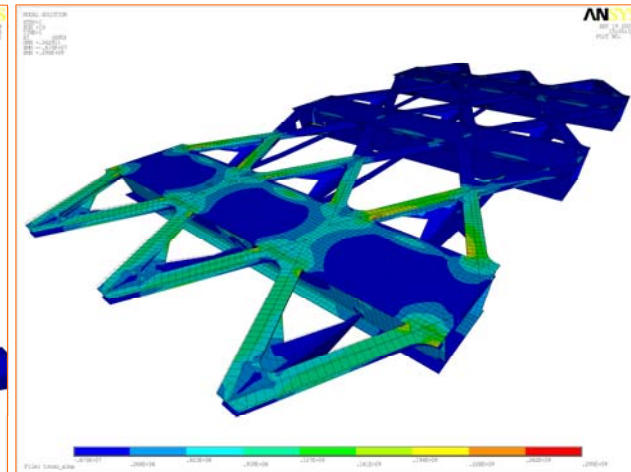
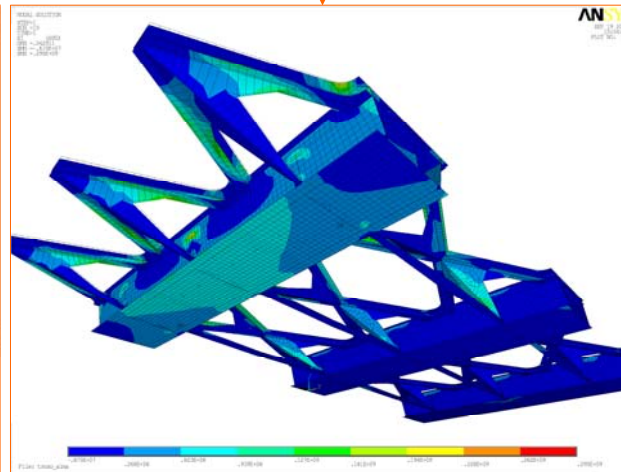
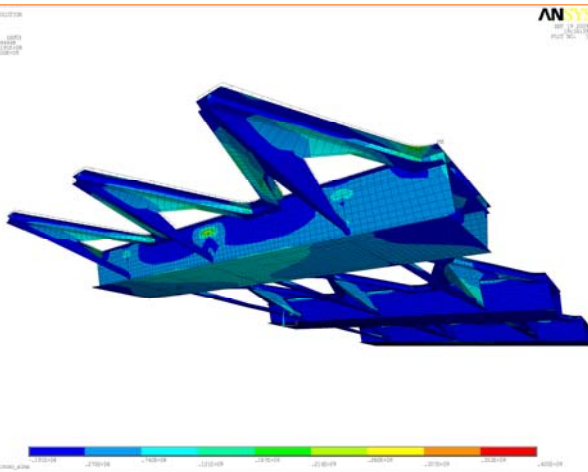
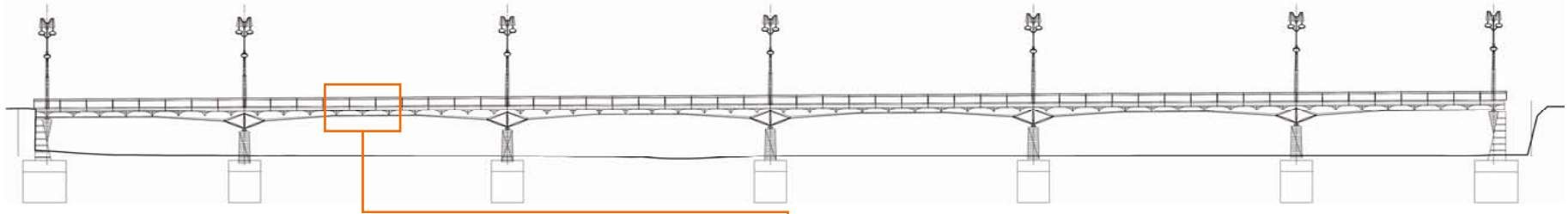


0.3.1.2 Modelos locales

<0.3.1 UN EJEMPLO: propuesta para el Nou Pont de Fusta>

<0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE LOS PUENTES>

00 Presentación y motivación



0.3.1.2 Modelos locales

<0.3.1 UN EJEMPLO: propuesta para el Nou Pont de Fusta>

<0.3 EL MODELADO ESTRUCTURAL Y LAS FORMAS RESISTENTES DE LOS PUENTES>

- 1.0 Motivación**
- 1.1 Limitaciones del modelo**
- 1.2 Análisis en servicio de puentes rectos**
- 1.3 Secciones mixtas y paredes reticuladas**
- 1.4 Predicción de la respuesta del tablero**
- 1.5 Puentes oblicuos y puentes curvos**

01 El modelo viga en el análisis de tableros

□ En el presente tema se presenta un primer *modelo estructural* apto para el análisis de tableros de puentes esbeltos, atendiendo básicamente a las siguientes cuestiones:

- Definición del *ámbito de aplicación*
- *Modelado* del tablero y *cálculo* de la respuesta (*plasmar y procesar el modelo*)
- *Interpretación* de los resultados

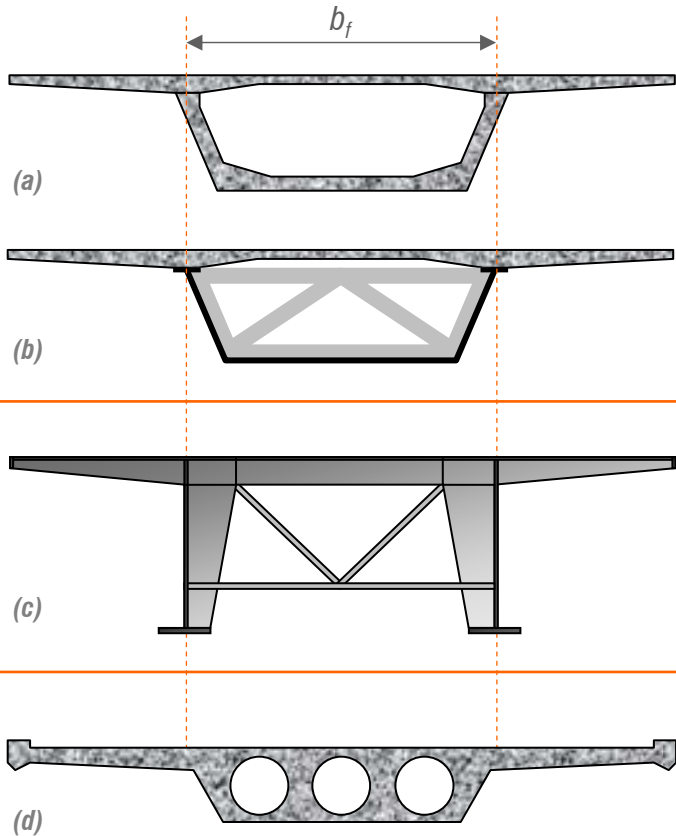
□ La primera cuestión requiere relacionar los *parámetros de forma* del tablero (h/L , B/L) con las *hipótesis básicas* sobre las que se asienta el modelo viga, o modelo 1D, pero antes de abordar esta tarea conviene indicar que:

- El modelo viga es el *más laborioso de plasmar*
- En contrapartida, el modelo viga es sin ninguna duda el *más sencillo de procesar*

01 El modelo viga en el análisis de tableros

- ❑ Los requisitos fundamentales que debe satisfacer un tablero para validar su análisis mediante la teoría de vigas son:
 - **Forma suficientemente alargada**, para que las tensiones normales σ_x^* puedan aproximarse mediante **distribuciones lineales** en sección transversal
 - **Sección transversal indeformable** en su plano
- ❑ En la práctica, la primera condición siempre se ve ampliamente satisfecha en **alzado** (en general $h/L \leq 1/10$) pero no así en **planta** puesto que el ancho viene en general impuesto (*dato funcional*)
- ❑ La segunda condición depende estrechamente de la morfología del tablero en **sección transversal**, siendo las **más usuales** en el contexto que nos interesa (*tableros de puentes con $L < 200$ m*)

01 El modelo viga en el análisis de tableros



▪ **Sección en cajón.** Puede ser de hormigón **(a)** o acero, o bien mixta **(b)**, unicelular o multicelular. En la actualidad el cajón unicelular es el más frecuente por ser de forma más sencilla (importante si se ejecuta in situ) y apto para proporcionar anchos de hasta 16 m (incluso más si se nerva o apuntala la losa superior) para $L \geq 50$ m

▪ **En todos los casos** presentados, la **aplicabilidad del modelo 1D** dependerá estrechamente del ratio b_f/L

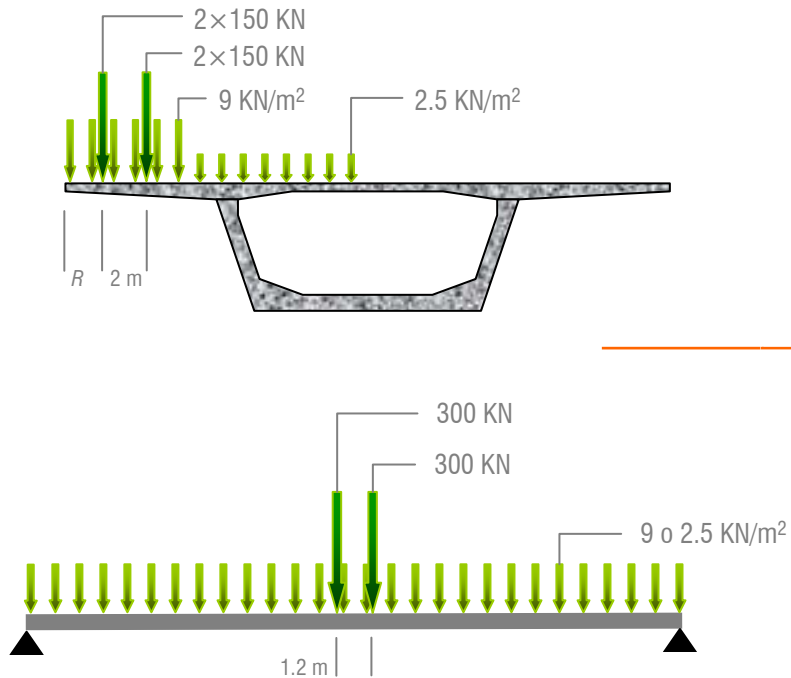
▪ **Sección en π , o doble-viga.** Su modelado como viga vendrá siempre asociado a soluciones en acero o mixtas, por la luz que les corresponde (adecuadas si $L \geq 75$ m)

▪ **Losa aligerada de ala ancha.** En hormigón pretensado, es una solución frecuente para el intervalo $L \in [25 \text{ m}, 45 \text{ m}]$

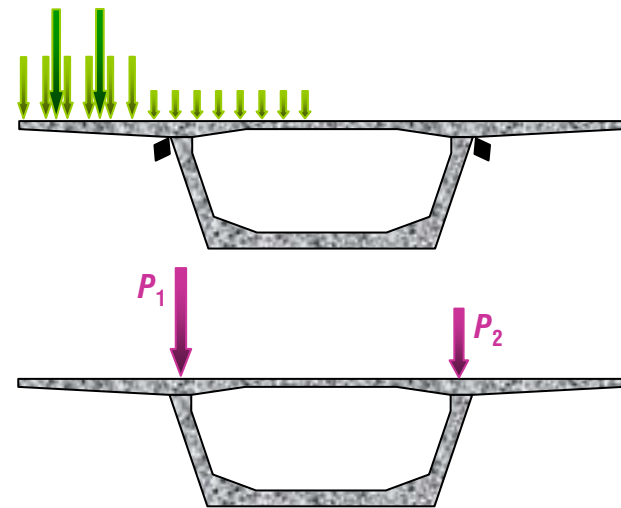
01 El modelo viga en el análisis de tableros

- ❑ Para relacionar el comportamiento de los tableros con los ya enunciados *requisitos de esbeltez longitudinal y rigidez de la sección transversal*, comenzaremos por realizar un **análisis cualitativo de la respuesta** de un tablero en cajón (de complejidad estructural suficiente para nuestros propósitos en el marco del modelo 1D), con el fin de identificar las acciones directamente relacionadas con ambas propiedades
- ❑ A continuación propondremos el denominado *ámbito general del modelo viga*, que justificaremos seguidamente **cuantificando** el **arrastre de cortante** y la **distorsión** de la sección transversal del tablero en una viga cajón simple
- ❑ Mostraremos con ello como el nivel de **arrastre de cortante** crece con el ratio b_f/L , luego pierde intensidad cuando la **esbeltez en planta** del tablero crece, mientras que la **distorsión** de la sección transversal del tablero se atenúa a medida que la correspondiente **esbeltez** aumenta. Con ello, el **ámbito del modelo** previamente fijado quedará plenamente justificado

01 El modelo viga en el análisis de tableros



(a) Proporciona prácticamente toda la flexión transversal y en particular la de la losa superior bajo la acción de las cargas de uso (*flexión local*)

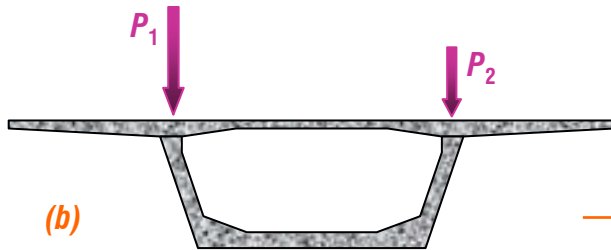


(b) Proporciona la *respuesta longitudinal* de la viga cajón

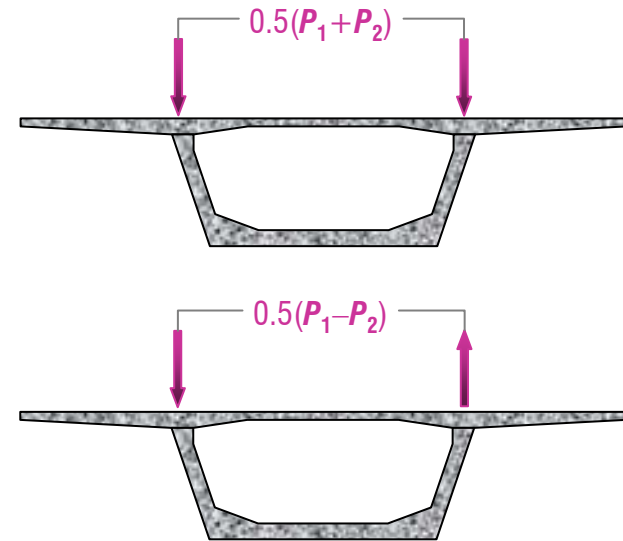
<1.1.1 RESPUESTA CUALITATIVA DE LA VIGA CAJÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros



(c) Esta acción proporciona la parte simétrica de la respuesta longitudinal, correspondiente a la **flexión del tablero**

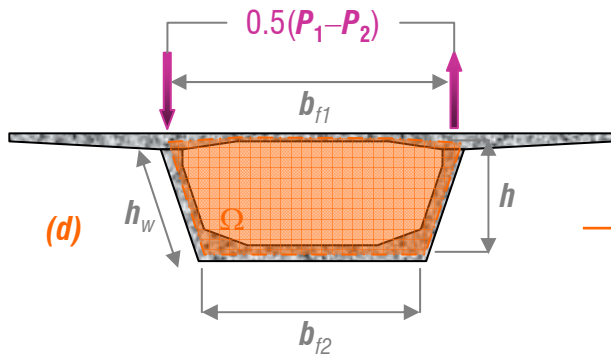


(d) Acción torsora, que induce la parte antisimétrica de la respuesta longitudinal, originando la **torsión** y la **distorsión**

<1.1.1 RESPUESTA CUALITATIVA DE LA VIGA CAJÓN>

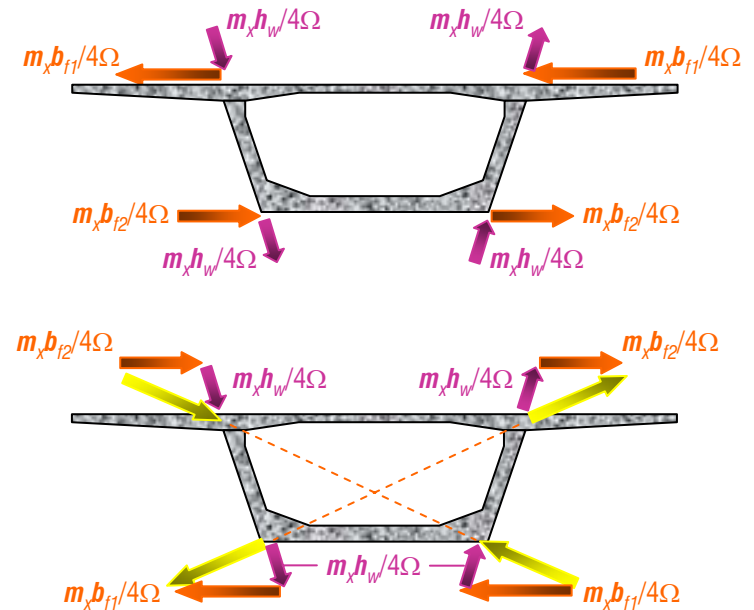
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros



acción resultante:
 $m_x = 0.5(P_1 - P_2)b_{f1}$
 $\Omega = 0.5(b_{f1} + b_{f2})h$

(d.1) Acción que da lugar a la torsión del tablero

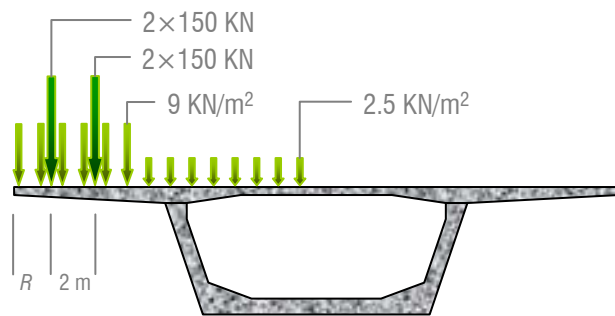


(d.2) Acción que da lugar a la distorsión del tablero

<1.1.1 RESPUESTA CUALITATIVA DE LA VIGA CAJÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros



▪ Si $b_f/L_{ef} \leq 1/6^*$, el **modelo viga** adecuadamente plasmado (*control de la distorsión y del arrastre de cortante, este último mediante anchos eficaces*) permitirá obtener una buena aproximación de las distribuciones de tensiones y movimientos de la estructura. Cada respuesta elemental (**flexiones local** y **global**, **torsión** y **distorsión**) se evaluará por separado, con la correspondiente teoría

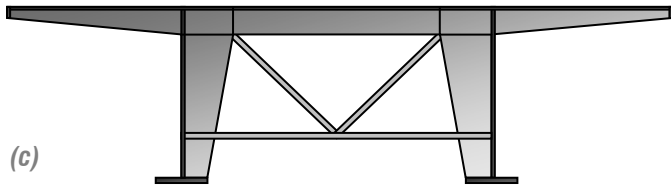
▪ En cambio, si $b_f/L_{ef} > 1/5$, el modelo **lámina plegada** integrará todas las respuestas, proporcionando los **esfuerzos de membrana** y el **campo de momentos** en cada una de las paredes del tablero

(*) La luz efectiva $L_{ef} \equiv \beta L$ se especificará más adelante, por ahora bastará suponerla igual a la luz de vano ($\beta=1$)

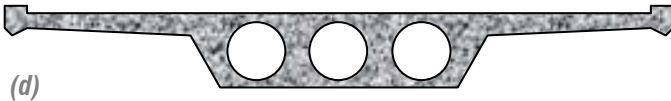
<1.1.2 ÁMBITO GENERAL DEL MODELO VIGA>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

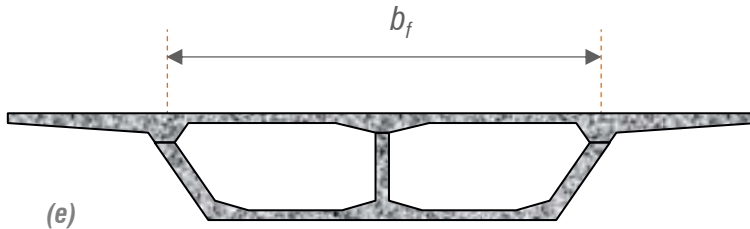
01 El modelo viga en el análisis de tableros



▪ **Sección en π .** La torsión y la distorsión pueden requerir una evaluación diferente (torsión *alabeada* o *mixta*, distorsión de la sección *abierta*), cuestionable si se dispone de arriostramientos reticulados en un plano inferior



▪ **Losa aligerada de ala ancha.** El cambio de forma de la sección se produce por flexión transversal del núcleo y de las alas. Ambos fenómenos se pueden analizar con la teoría de placas delgadas (modelo 2D)



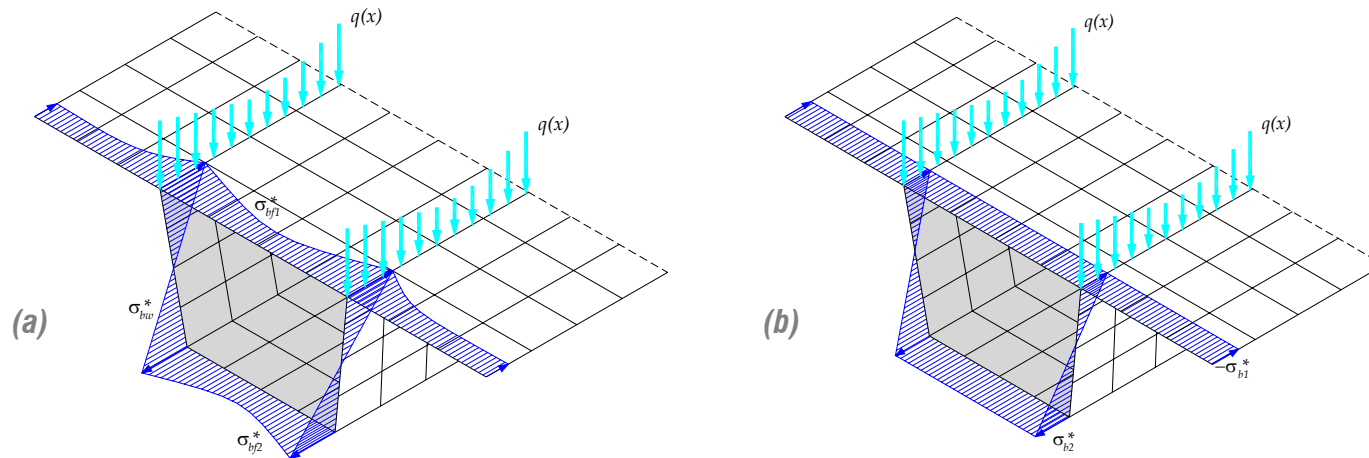
▪ **Cajón multicelular.** La necesidad de más almas se justifica por anchos mayores, que hacen menos factible el modelado 1D, aunque siga sujeto al ratio b_f/L_{ef}

<1.1.2 ÁMBITO GENERAL DEL MODELO VIGA>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización estática del arrastre de cortante.** Supongamos aplicadas densidades lineales de cargas verticales $q(x)$ según las líneas de unión alma-losa superior de una viga en cajón simplemente apoyada. La forma de la distribución de tensiones normales a lo largo de la fibra media de la sección transversal será análoga a la representada en **(a)**, con **picos** acentuados en las uniones alma-losa pero con leyes bastante lineales en las almas (*esta última observación solo es cierta en el ámbito de los tableros de puente, cuya esbeltez longitudinal suele seleccionarse en torno a los valores $L/h \sim 20$ a 25*), contrastando con la forma tradicional **(b)**, prevista por la teoría de vigas

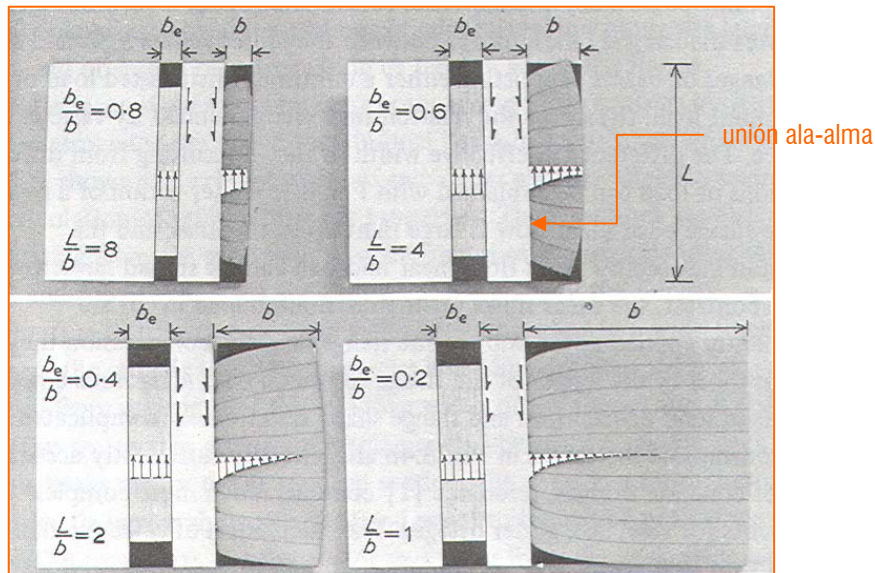


<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

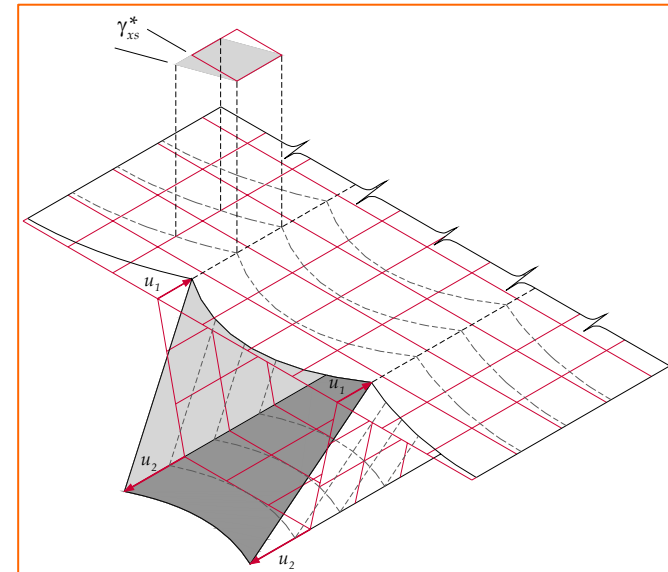
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización cinemática del arrastre de cortante.** La observación anterior puede justificarse de manera sencilla, así como la denominación escogida para este fenómeno, si recurrimos a la ilustración propuesta por E.C. Hambly en su libro “*Bridge deck behaviour*” (en nuestra opinión, sería más apropiado hablar de **arrastre de rasante**)



Tomado del libro de E.C. Hambly “*Bridge deck behaviour*”



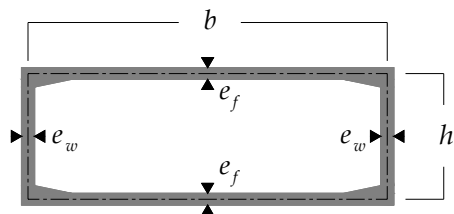
<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

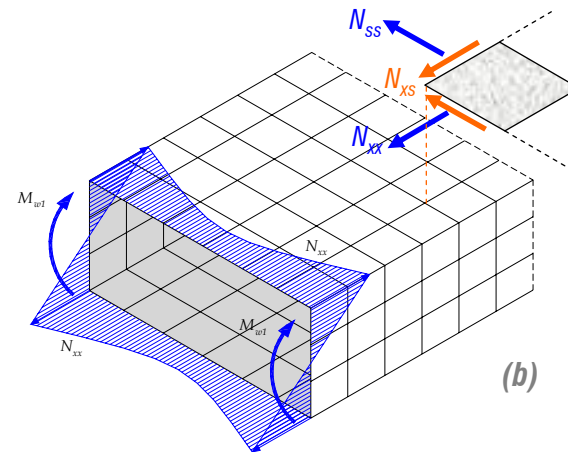
01 El modelo viga en el análisis de tableros

(a) Estudiaremos vigas con sección unicelular doblemente simétrica, prescindiendo de la existencia de voladizos laterales. Supondremos que en sus secciones extremas ($x=0,L$) la viga está simplemente apoyada y dispone de diafragmas transversales perfectamente rígidos. En cuanto a las cargas, nos centraremos en distribuciones lineales aplicadas a lo largo de la unión ala-alma

(b) Supondremos que la lámina plegada asociada no desarrolla trabajo de flexión de placa en ninguno de sus elementos, computando exclusivamente el *trabajo de membrana* y aproximaremos este último en las almas, que supondremos suficientemente esbeltas, por la teoría de vigas



(a)



(b)

<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ De acuerdo con las restricciones de comportamiento adoptadas para este modelo de lámina plegada y las condiciones de carga, de simetría y de sustentación de la pieza, los esfuerzos de membrana longitudinales en las losas superior e inferior pueden darse en la forma:

$$N_{xx}(x, s) = \sum_{N=1}^{\infty} (n_{1N} \operatorname{ch} \beta_N \zeta + n_{2N} \zeta \operatorname{sh} \beta_N \zeta) \operatorname{sen} \alpha_N x$$

con $\alpha_N = N\pi/L$, $\beta_N = N\pi b/L$ y $\zeta = s/b$

■ Las ecuaciones de equilibrio interno del estado membrana proporcionan entonces expresiones similares para los restantes esfuerzos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} &= 0 \\ \frac{\partial N_{xs}}{\partial x} + \frac{\partial N_{ss}}{\partial s} &= 0 \end{aligned}$$

por lo que tras integrar:

$$\begin{aligned} N_{xs}(x, s) &= - \sum_{N=1}^{\infty} \left[n_{1N} \operatorname{sh} \beta_N \zeta + n_{2N} \left(\zeta \operatorname{ch} \beta_N \zeta - \frac{1}{\beta_N} \operatorname{sh} \beta_N \zeta \right) \right] \cos \alpha_N x \\ N_{ss}(x, s) &= - \sum_{N=1}^{\infty} \left[n_{1N} \operatorname{ch} \beta_N \zeta + n_{2N} \left(\zeta \operatorname{sh} \beta_N \zeta - \frac{2}{\beta_N} \operatorname{ch} \beta_N \zeta \right) \right] \operatorname{sen} \alpha_N x \end{aligned}$$

<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

- La energía de deformación correspondiente se evaluará en cada losa mediante la expresión:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \int_{s=-b/2}^{b/2} \frac{1}{Ee_f} \left[N_{xx}^2 - 2\nu N_{xx} N_{ss} + N_{ss}^2 + 2(1+\nu) N_{xs}^2 \right] dx ds$$

- Las fórmulas obtenidas para el campo de esfuerzos de membrana así como las propiedades de ortogonalidad de las funciones trigonométricas permiten transformar esta expresión de la energía en una forma cuadrática de los coeficientes n_{1N} y n_{2N} :

$$U_m = \frac{1+\nu}{2} \frac{bL}{Ee_f} \sum_{N=1}^{\infty} (A_N n_{1N}^2 + 2B_N n_{1N} n_{2N} + C_N n_{2N}^2)$$

con

$$A_N = \frac{\text{sh} \beta_N}{\beta_N}$$

$$B_N = \frac{\beta_N \text{ch} \beta_N - 3 \text{sh} \beta_N}{2 \beta_N^2}$$

$$C_N = \frac{\beta_N^2 \text{sh} \beta_N - 2(3 \beta_N \text{ch} \beta_N - 4 \text{sh} \beta_N + \beta_N)}{4 \beta_N^3} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\text{sh} \beta_N + \beta_N}{\beta_N^3}$$

<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■Energía de deformación desarrollada por las almas. En base a las hipótesis de comportamiento de la viga cajón adoptadas, esta será simplemente:

$$U_b = 2U_{b1} \quad , \quad U_{b1} = \frac{1}{2} \int_{x=0}^L \frac{M_{w1}^2}{EI_{w1}} dx$$

donde $M_{w1}(x)$ representa la parte resistida por cada alma del momento flector $M_y(x)$ que solicita a la sección transversal de la viga, e I_{w1} es el momento de inercia del alma:

$$M_{w1}(x) = \frac{1}{2} \left[M_y(x) - h \int_{s=-b/2}^{b/2} N_{xx}(x,s) ds \right]$$

■Para las condiciones de contorno adoptadas, la distribución longitudinal de momentos flectores admite un desarrollo en serie del tipo:

$$M_y(x) = \sum_{N=1}^{\infty} m_{yN} \text{sen} \alpha_N x \quad , \quad m_{yN} = \frac{2}{L} \int_{x=0}^L M_y(x) \text{sen} \alpha_N x dx$$

luego

$$M_{w1}(x) = \frac{1}{2} \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ m_{yN} - 2 \frac{bh}{\beta_N} \left[n_{1N} \text{sh} \frac{\beta_N}{2} + n_{2N} \left(\frac{1}{2} \text{ch} \frac{\beta_N}{2} - \frac{1}{\beta_N} \text{sh} \frac{\beta_N}{2} \right) \right] \right\} \text{sen} \alpha_N x$$

<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪Llevando este resultado a la definición de la energía de deformación de las almas, resulta:

$$U_b = \frac{L}{8EI_{w1}} \sum_{N=1}^{\infty} \left\{ m_{yN} - 2 \frac{bh}{\beta_N} \left[n_{1N} \operatorname{sh} \frac{\beta_N}{2} + n_{2N} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta_N}{2} - \frac{1}{\beta_N} \operatorname{sh} \frac{\beta_N}{2} \right) \right] \right\}^2$$

▪Los coeficientes n_{1N} y n_{2N} se determinan minimizando el potencial $U=2U_m+U_b$, esto es:

$$\frac{\partial U}{\partial n_{1N}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial n_{2N}} = 0$$

obteniendo el siguiente sistema, con la constante $k = \frac{3}{1+\nu} \frac{A_f}{A_w}$ (A_f y A_w representan el área del ala y del alma respectivamente):

$$\begin{bmatrix} A_N + \frac{k}{\beta_N^2} (\operatorname{ch} \beta_N - 1) & B_N + \frac{k}{\beta_N^2} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_N}{2} - \frac{\operatorname{ch} \beta_N - 1}{\beta_N} \right) \\ B_N + \frac{k}{\beta_N^2} \left(\frac{\operatorname{sh} \beta_N}{2} - \frac{\operatorname{ch} \beta_N - 1}{\beta_N} \right) & C_N + \frac{k}{\beta_N^2} \left(\frac{\operatorname{ch} \beta_N + 1}{4} - \frac{\operatorname{sh} \beta_N}{\beta_N} + \frac{\operatorname{ch} \beta_N - 1}{\beta_N^2} \right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_{1N} \\ n_{2N} \end{Bmatrix} = \frac{k}{bh} \frac{m_{yN}}{\beta_N} \begin{Bmatrix} \operatorname{sh} \frac{\beta_N}{2} \\ \frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta_N}{2} - \frac{1}{\beta_N} \operatorname{sh} \frac{\beta_N}{2} \end{Bmatrix}$$

<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ La ecuación anterior permite calcular los coeficientes n_{1N} y n_{2N} para cada armónico N , quedando así totalmente caracterizada la distribución de los esfuerzos de membrana en sección transversal y en particular los longitudinales en las losas, N_{xx} . Para la misma sollicitación exterior, la teoría de vigas hubiera previsto para estos un valor constante a todo lo ancho \bar{N}_{xx} igual a:

$$\begin{aligned}\bar{N}_{xx}(x) &= \frac{1}{b} \int_{s=-b/2}^{b/2} N_{xx}(x,s) ds \\ &= \sum_{N=1}^{\infty} \frac{2}{\beta_N} \left[n_{1N} \operatorname{sh} \frac{\beta_N}{2} + n_{2N} \left(\frac{1}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta_N}{2} - \frac{1}{\beta_N} \operatorname{sh} \frac{\beta_N}{2} \right) \right] \operatorname{sen} \alpha_N x\end{aligned}$$

■ Con este valor medio, podemos definir los esfuerzos longitudinales en forma *adimensional* como:

$$n_{xx}(\xi, \zeta) = \frac{N_{xx}(\xi, \zeta)}{\bar{N}_{xx}(\xi)}$$

siendo $\xi = x/L$ y $\zeta = y/b$. Adjuntamos los coeficientes de Fourier correspondientes a los momentos flectores inducidos en una viga simplemente apoyada por una carga transversal P repartida uniformemente entre las secciones $x_1 = \xi_1 L$ y $x_2 = \xi_2 L$:

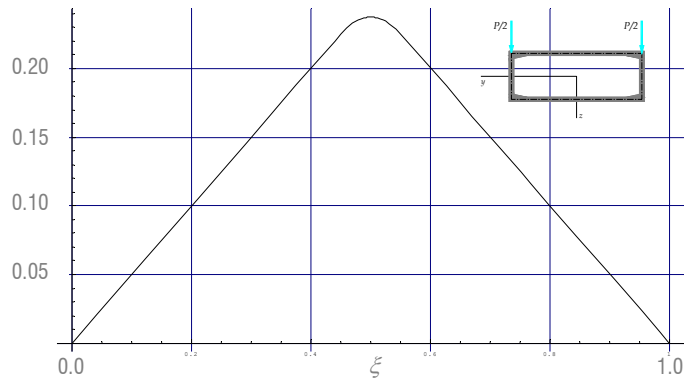
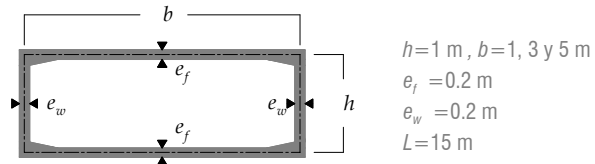
$$m_{yN} = \frac{2PL}{(N\pi)^3} \frac{\cos N\pi\xi_1 - \cos N\pi\xi_2}{\xi_2 - \xi_1}$$

<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

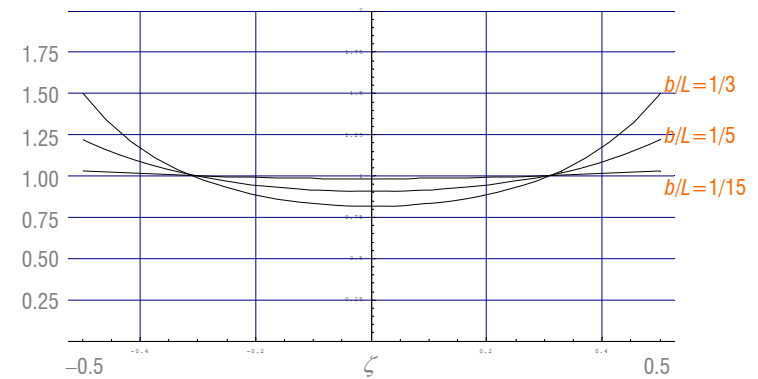
01 El modelo viga en el análisis de tableros

SECCIÓN ESTUDIADA para tableros de hormigón



Esfuerzos longitudinales normalizados n_{xx} en ($\xi=0.5$, $\zeta=\pm 0.5$) computando 100 armónicos

L/b	1	2	3	4	5	6	10
$\delta/L=1.00$	2.333	1.369	1.165	1.092	1.059	1.041	1.015
0.10	3.527	1.932	1.503	1.319	1.222	1.164	1.068
0.01	4.364	2.349	1.778	1.524	1.385	1.298	1.145



<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Conclusiones respecto al arrastre de cortante** (la luz efectiva $L_{ef} = \beta L$ se especificará más adelante, por ahora bastará tomar $\beta = 1$)

(1) **Esbeltez geométrica en planta y disipación del fenómeno.** A la vista de los resultados anteriores, resulta evidente que el arrastre de rasante se atenúa a medida que la **esbeltez geométrica en planta** de la viga L/b aumenta, siendo prácticamente imperceptible para esbelteces iguales o superiores a 10

(2) **Influencia de la distribución longitudinal de las cargas.** Al factor geométrico anterior se suma la influencia de la distribución de las cargas que inducen la flexión de la viga, siendo mayor el efecto en estudio cuanto más concentrada está la carga vertical. En este sentido, conviene observar que las acciones permanentes tienen carácter repartido luego tendrán el efecto asociado a $\delta/L = 1$

(3) **Validación del ámbito general del modelo viga.** Ya se enunció con anterioridad el denominado **ámbito general del modelo viga** como $L_{ef}/b_f \geq 6$. Como el arrastre de rasante producido por los vehículos pesados de la **IAP-11** (para los cuales $\delta/L \geq 0.01$ si $L < 200\text{m}$) siempre vendrá mitigado por el debido a las cargas permanentes, los resultados obtenidos permiten consolidar el ámbito enunciado

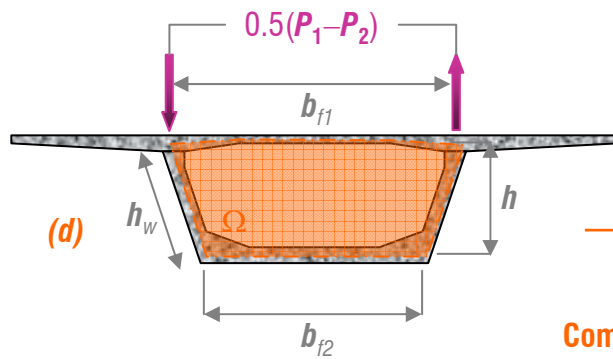
(4) **Ancho efectivo de los voladizos laterales.** Si el tablero posee voladizos laterales de ancho v , en virtud de los resultados anteriores solo podremos computar la fracción **efectiva** de los mismos, dada por $v_{ef} = \min\{v, L_{ef}/12\}$

<1.1.3 CUANTIFICACIÓN DEL ARRASTRE DE CORTANTE>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

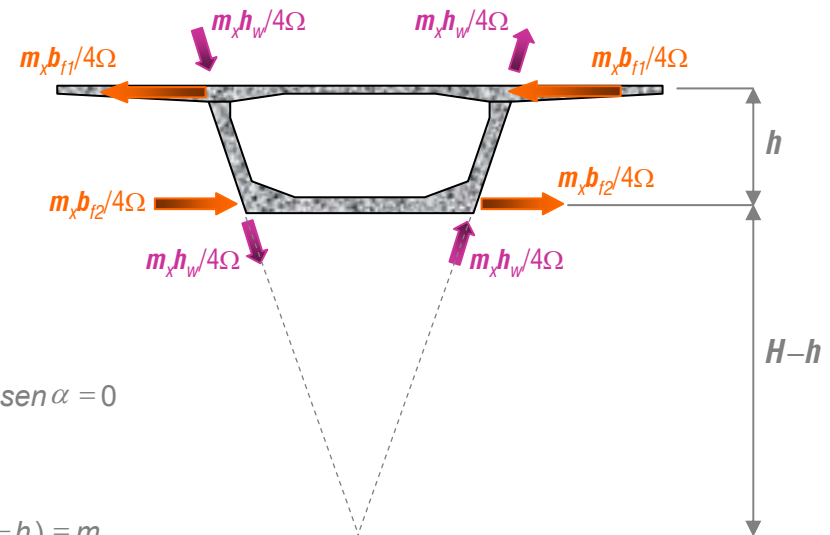
01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización estática de la distorsión.** Volvamos a la **acción torsora**, que induce, según se vio, la parte antisimétrica de la respuesta longitudinal de la viga cajón



acción resultante:
 $m_x = 0.5(P_1 - P_2)b_{f1}$
 $\Omega = 0.5(b_{f1} + b_{f2})h$

(d.1) Acción que da lugar a la torsión del tablero



Comprobación:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{F_y} = \frac{m_x(b_{f1} - b_{f2})}{2\Omega} - \frac{m_x h_w}{\Omega} \operatorname{sen} \alpha = 0 \\ \sum_{F_z} = 0 \\ \sum_{M_x} = \frac{m_x b_{f1}}{2\Omega} H - \frac{m_x b_{f2}}{2\Omega} (H - h) = m_x \end{array} \right.$$

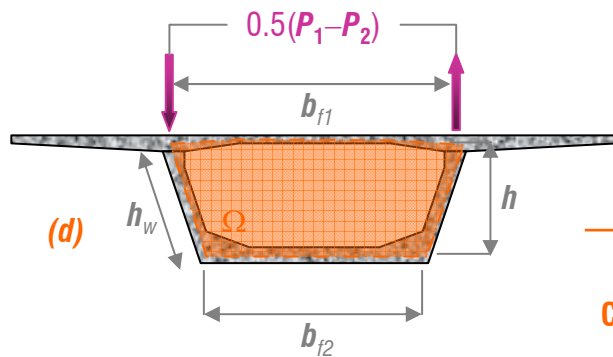
puesto que $\operatorname{sen} \alpha = (b_{f1} - b_{f2})/2h_w$ y $\Omega = Hb_{f1}/2 - (H - h)b_{f2}/2$, por diferencia de áreas de triángulos

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

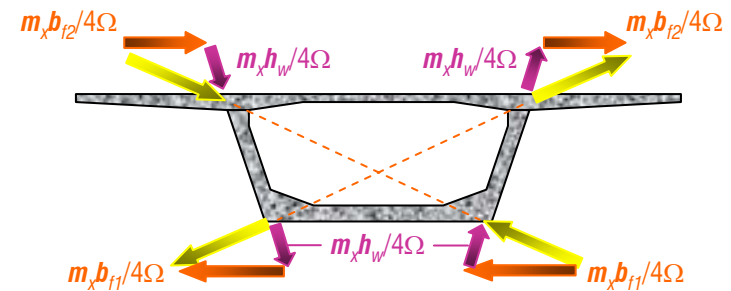
01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización estática de la distorsión.** Acción auto equilibrada que da lugar a la distorsión del cajón, proporcional a m_x



acción resultante:
 $m_x = 0.5(P_1 - P_2)b_{f1}$
 $\Omega = 0.5(b_{f1} + b_{f2})h$

(d.2) Acción que da lugar a la **distorsión del tablero**



Comprobación:

$$\begin{cases} \sum F_z = \sum F_y = 0 \\ \sum M_x = -\frac{m_x b_{f2}}{2\Omega} H + \frac{m_x b_{f1}}{2\Omega} (H - h) = 0 \end{cases}$$

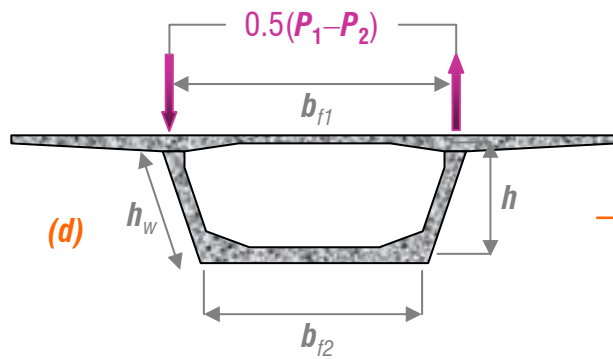
puesto que las fuerzas F_y en juego son las mismas y $H/b_{f1} = (H-h)/b_{f2}$, por semejanza de triángulos

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

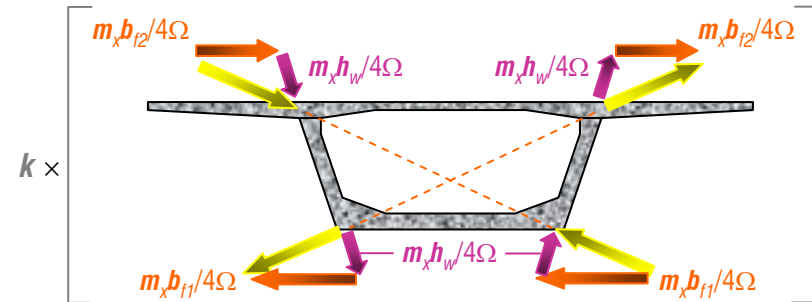
01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización estática de la distorsión.** Un último comentario, exigido por la *unicidad de la descomposición* de la acción torsora



acción resultante:
 $m_x = 0.5(P_1 - P_2)b_{f1}$

(d.2) Acción que da lugar a la **distorsión del tablero**



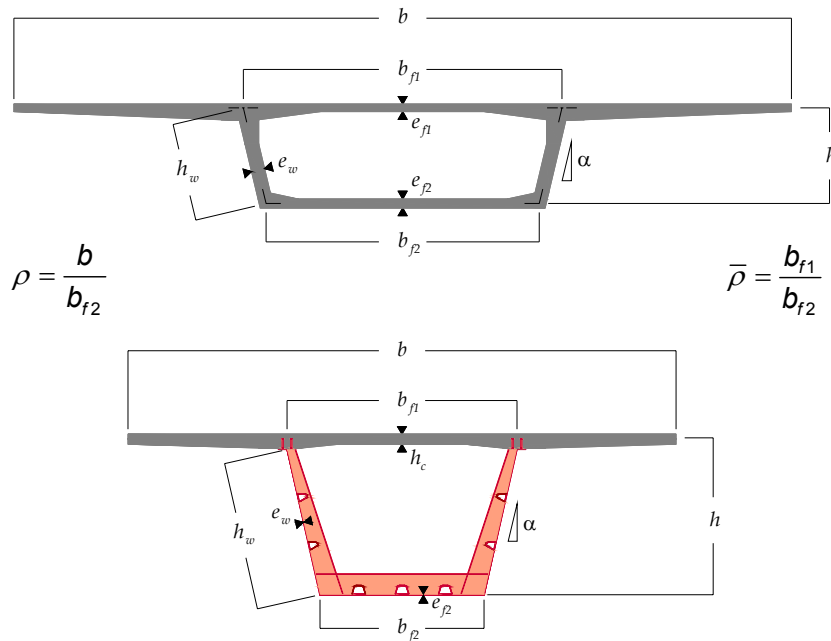
■ **La acción de distorsión** así definida está auto equilibrada, pero con factor k . Sin embargo, en el caso de almas verticales y losas extremadamente flexibles a flexión, la descomposición propuesta para la **acción torsora** (que ahora es coplanaria con las almas) en **torsión** y **distorsión** exige que $k=1$, de tal forma que los rasantes finales se canalicen solo por las almas, como si de dos vigas independientes se tratara

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

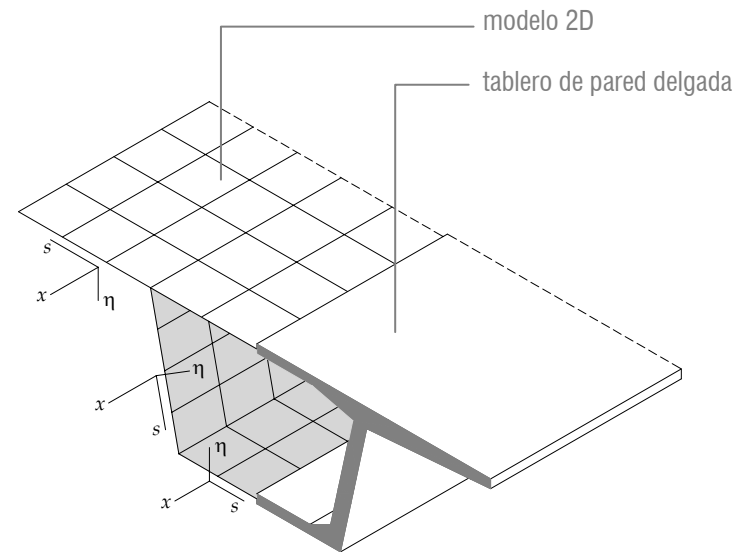
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ Geometría de los tableros y coordenadas naturales



(1) Geometría de los tableros en cajón unicelular, de hormigón y mixtos



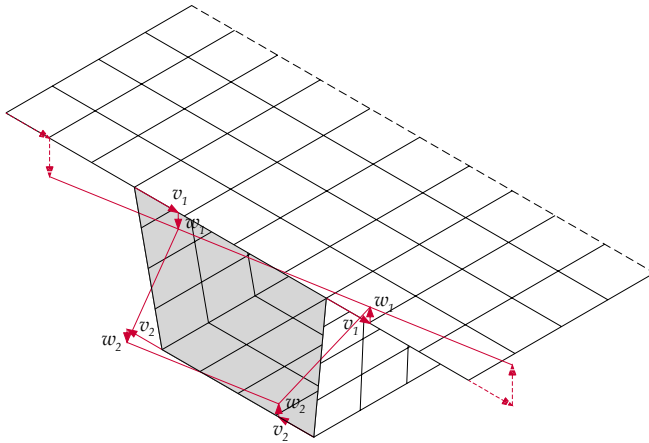
(2) Coordenadas naturales de los tableros de pared delgada

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

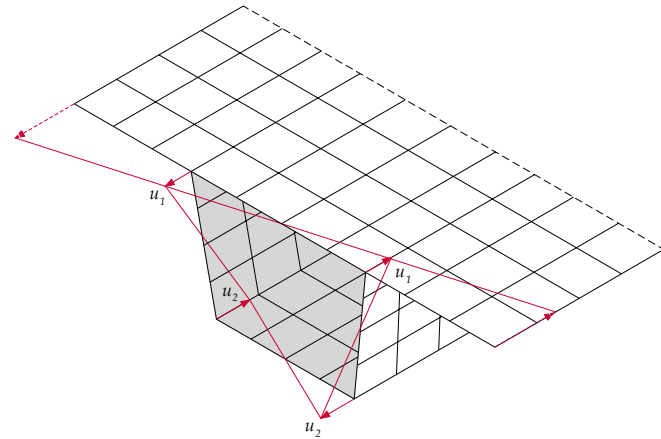
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización cinemática de la distorsión.** La descomposición de la acción torsora que origina la distorsión, **empuja** a cada una de las paredes del tablero, originándose **(A)** una flexión transversal (flexión del marco) y **(B)** una flexión de tipo laja (en el plano de cada cara)



(A) Desplazamientos en sección transversal como desplazamientos iniciales del marco, que inducen la flexión transversal



(B) Alabeos como desplazamientos iniciales del estado membrana, que provienen de la flexión de cada pared en su plano

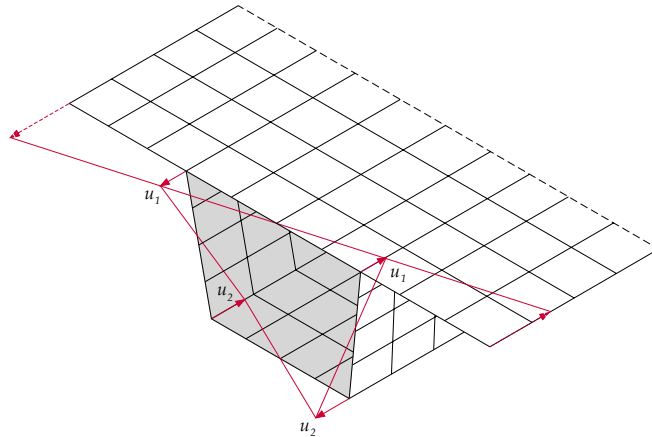
<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

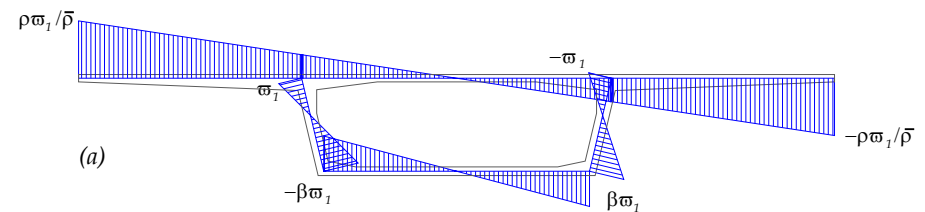
■ **Caracterización cinemática de la distorsión.** Dada la antisimetría de la distribución de los **alabeos** de las secciones u^* , tal y como se representa en (B), propondremos la siguiente fórmula para estos:

$$u^*(x, s) = \omega_D(s) \varphi_D(x)$$



(B) Alabeos como desplazamientos iniciales del estado membrana, que inducen flexión de cada pared en su plano

$\omega_D(s)$ es el patrón de alabeo, o **alabeo unitario de distorsión**, basado en la forma de los alabeos $u^*(x, s)$, mientras que $\varphi_D(x)$ es la **intensidad de alabeo** correspondiente a la sección x



(C) Forma de la distribución del alabeo unitario de distorsión $\omega_D(s)$, $\beta = |u_2/u_1|$, módulo ϖ_1

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

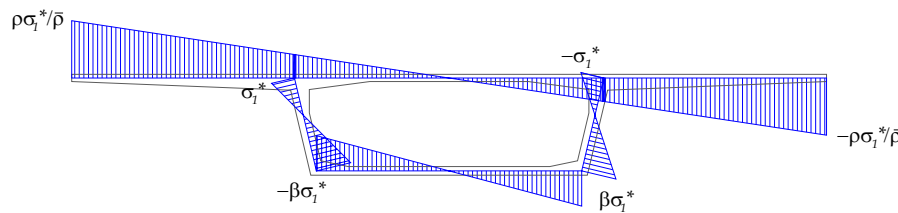
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización cinemática de la distorsión.** Para determinar el valor de la constante β basta observar la semejanza resultante entre la distribución de alabeos y la de tensiones longitudinales, propia de las teorías de vigas:

$$\begin{aligned}\sigma_x^* &= E\varepsilon_x^* = E \frac{\partial u^*}{\partial x} \\ &= \omega_D(s)[E\varphi_D'(x)]\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la sollicitación de distorsión está auto equilibrada, las tensiones $\sigma_x^*(x,s)$ **(D)** heredarán esta propiedad, y en particular los momentos respecto al eje de simetría de la sección deberán cancelarse, obteniendo entonces:



(D) Forma de la distribución de tensiones normales $\sigma_x^*(x,s)$ sobre la sección transversal

$$\beta = \frac{(\rho^2 / \bar{\rho})\alpha_1 + 2\bar{\rho} + 1}{\alpha_2 + \bar{\rho} + 2}$$

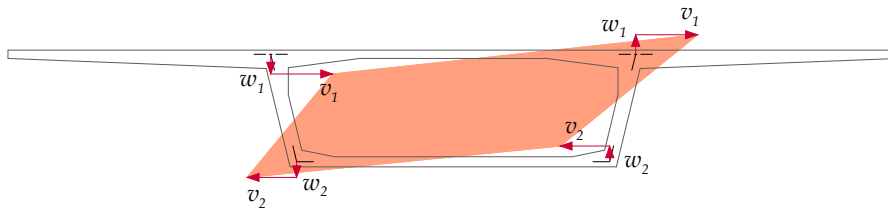
con los parámetros adimensionales de área $\alpha_i = A_{fi}/A_w$, siendo A_{f1} , A_{f2} y A_w las áreas de las losas superior e inferior y de las almas respectivamente

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización cinemática de la distorsión.** La constante ϖ_1 , introducida para escalar convenientemente el patrón de alabeo, está todavía por determinar. Sin embargo, podemos visualizar el estado membrana inducido por los alabeos (**B**) como la respuesta de la viga si suponemos que las uniones de las almas a las losas están perfectamente articuladas, cancelándose de ese modo el desarrollo de flexiones transversales en las paredes del cajón



(E) Distorsión libre de flexiones transversales, geometría deformada de la celda

Bajo este supuesto, la distorsión de la celda $\gamma_D(x)$, será una **función lineal** de los desplazamientos nodales en el plano de la sección transversal, definidos en (E):

$$\mathbf{u}_D(x) = \{v_1(x) \quad w_1(x) \quad v_2(x) \quad w_2(x)\}^T$$

$$\gamma_D(x) = \frac{1}{h_w} \Gamma^T \cdot \mathbf{u}_D(x)$$

$$\Gamma^T = \left\{ \cos \alpha \quad \frac{h_w}{b_{f1}} - \sin \alpha \quad \cos \alpha \quad \frac{h_w}{b_{f2}} + \sin \alpha \right\}$$

En consecuencia, también existirá una **relación lineal** entre **distorsión** y **desplazamientos transversales**, que podemos resumir como:

$$v^*(x,s) = \eta_D(s) \gamma_D(x)$$

siendo v^* el desplazamiento tangente a la fibra media de la sección transversal (*flexión en su plano de cada una de las paredes del tablero*) y $\eta_D(s)$ el patrón de distorsión

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

Observando que la **deformación a cortante** de cada pared **flectando en su plano** es:

$$\gamma_{xs}^* = \frac{\partial u^*}{\partial s} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = \omega_D'(s)\varphi_D(x) + \eta_D(s)\gamma_D'(x)$$

se deduce que una teoría de distorsión enmarcada dentro de los **modelos 1D** exige que η_D sea proporcional a ω_D' , con el fin de mantener la estructura de variables separadas propia de la teoría de vigas. Además, la flexión tipo laja sin deformación por cortante correspondería a cancelar γ_{xs}^* , por lo que $\varphi_D = \gamma_D'$ si adoptamos $\eta_D = -\omega_D'$

■ **Caracterización estática de la distorsión.** La evaluación del **trabajo virtual** de la tensiones longitudinales sobre la sección transversal de la viga proporciona de forma natural la definición del **esfuerzo consistente** con la intensidad de alabeo:

$$\begin{aligned} \int_A \sigma_x^* \delta u^* dA &= \delta \varphi_D \int_A \omega_D \sigma_x^* dA \\ &= \delta \varphi_D B_D \end{aligned}$$

Donde $B_D = \int_A \omega_D \sigma_x^* dA$ se denominará **bimomento de distorsión**. Los resultados anteriores permiten entonces expresar las tensiones longitudinales σ_x^* en función de este:

$$\sigma_x^*(x, s) = \omega_D(s) \frac{B_D(x)}{I_D}$$

con $I_D = \int_A \omega_D^2 dA$ **módulo de distorsión** de la sección transversal

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

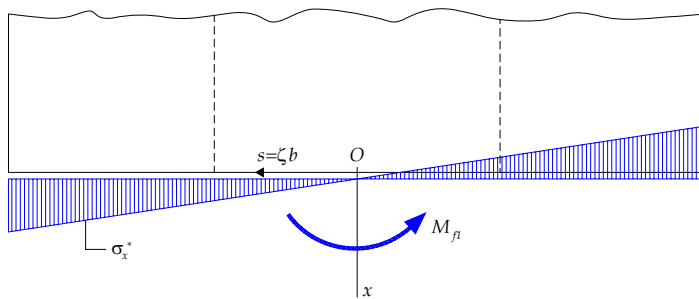
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización estática de la distorsión.** Recurriendo al patrón de alabeos adoptado **(C)**, se obtiene una fórmula de cálculo para esta nueva constante estática:

$$I_D = \frac{1}{3} A_w \varpi_1^2 \left[\alpha_1 \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^2 + 2 \frac{1 + \beta^3}{1 + \beta} + \alpha_2 \beta^2 \right]$$

Además, las resultantes de tensiones longitudinales en cada una de las paredes de la viga pueden determinarse exclusivamente en función de los bimomentos y del módulo de alabeo.



(F) Resultante de las tensiones normales en losa superior

cara	b	h_w	b_{f2}
$N_{(e)}$	0	$\frac{1-\beta}{2} A_w \varpi_1 \frac{B_D}{I_D}$	0
$M_{(e)}$	$\frac{\alpha_1 \rho}{6 \bar{\rho}} b A_w \varpi_1 \frac{B_D}{I_D}$	$\frac{1+\beta}{12} h_w A_w \varpi_1 \frac{B_D}{I_D}$	$\frac{\alpha_2 \beta}{6} b_{f2} A_w \varpi_1 \frac{B_D}{I_D}$

Distribución de axiles y momentos flectores en el plano de las paredes de la viga cajón debidos a la distorsión

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

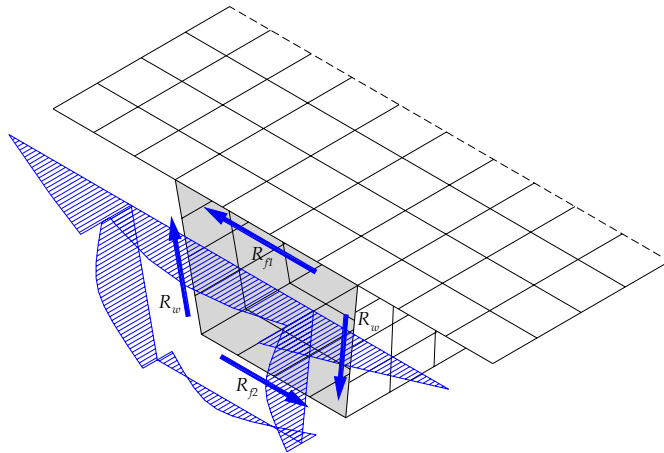
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización estática de la distorsión.** La distribución de tensiones longitudinales y las ecuaciones de equilibrio de membrana permiten a su vez caracterizar las distribuciones de rasantes en cada pared y con ellos los esfuerzos cortantes correspondientes:

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xs}}{\partial s} = 0$$

siendo $N_{xx} = \int_{\eta=-e/2}^{e/2} \sigma_x^* d\eta$ y $N_{xs} = \int_{\eta=-e/2}^{e/2} \tau_{xs}^* d\eta$. Integrando ahora estas distribuciones a lo largo de cada cara, se obtienen los cortantes $R_{(e)}$



(G) Distribución de esfuerzos de membrana N_{xs} y sus resultantes $R_{(e)}$

cara	b	h_w	b_{f2}
$R_{(e)}$	$\frac{b_{f1}}{\mu^2} \frac{B'_D}{q\Omega}$	$\frac{\bar{\rho} h_w}{\mu^2} \frac{B'_D}{q\Omega}$	$\frac{\bar{\rho} b_{f1}}{\mu^2} \frac{B'_D}{q\Omega}$

Distribución de esfuerzos cortantes en el plano de las paredes de la viga cajón debidos a la distorsión

$$\mu = \frac{2\bar{\rho}}{1+\bar{\rho}} \quad , \quad q = \frac{2\varpi_1}{\mu^2 \Omega} (1+\bar{\rho})(1+\bar{\rho}\beta)$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

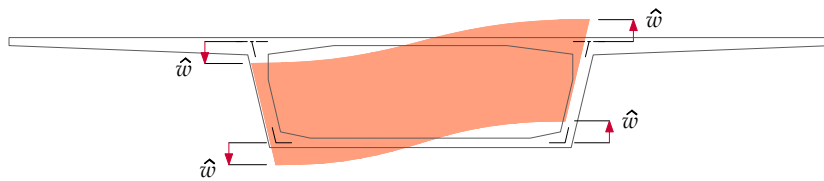
01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización cinemática *completa* de la distorsión.** Observando finalmente que al parámetro q es proporcional a la constante ϖ_1 introducida para escalar convenientemente el patrón de alabeos y que esta última puede escogerse libremente, en lo sucesivo adoptaremos $q=1$, por lo que:

$$\varpi_1 = \frac{1}{2} \mu^2 \frac{\Omega}{(1+\bar{\rho})(1+\bar{\rho}\beta)}$$

Este resultado permite determinar las unidades del alabeo *unitario* como $[L^2]$ mientras que *intensidad de alabeo* y *bimomento* son $[L^{-1}, FL^2]$ respectivamente

■ **Caracterización de la flexión transversal.** La caracterización de la respuesta tipo placa de las paredes de la viga se plantea computando únicamente su *flexión transversal*, aproximada mediante la *flexión antisimétrica del marco*. Esta a su vez se evalúa despreciando la deformación por cortante y por axil del conjunto de barras que lo configuran



(H) Deformada inicial *efectiva* de la celda

$$\gamma_D = \frac{1}{h_w} \mathbf{\Gamma}^T \cdot \mathbf{u}_D = \hat{w} \left(\frac{1}{b_{f1}} + \frac{1}{b_{f2}} \right) = \frac{2\hat{w}}{b_{f2}} \left(\frac{1+\bar{\rho}}{2\bar{\rho}} \right) = \frac{2}{\mu} \frac{\hat{w}}{b_{f2}}$$

Las rotaciones iniciales del marco serán por lo tanto:

$$\phi_{fi}^0 = -\frac{2\hat{w}}{b_{fi}} = -\mu \frac{b_{f2}}{b_{fi}} \gamma_D$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Caracterización de la flexión transversal.** La resolución del marco proporciona los momentos finales siguientes

$$\begin{Bmatrix} m_{w1} \\ m_{w2} \end{Bmatrix} = \frac{6k_w}{\bar{\rho}} \frac{\mu\gamma_D}{1+2(\kappa_1+\kappa_2)+3\kappa_1\kappa_2} \begin{Bmatrix} \kappa_1+(2+\bar{\rho})\kappa_1\kappa_2 \\ \bar{\rho}\kappa_2+(2\bar{\rho}+1)\kappa_1\kappa_2 \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} m_{f1} \\ m_{f2} \end{Bmatrix}$$

$$\text{con } k_w = \frac{EA_w}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{e_w}{h_w} \right)^2, \quad k_{fi} = \frac{EA_{fi}}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{e_{fi}}{b_{fi}} \right)^2 \text{ y } \kappa_i = \frac{k_{fi}}{k_w}$$

▪ **Energía de flexión transversal.** La energía de flexión transversal del modelo, que denominaremos $U_b(x)$, se calcula mediante la integral

$$U_b = \frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \frac{m_{ss}^2}{D} ds$$

donde D define la **rigidez de placa** de cada pared. Operando se obtiene:

$$U_b = \frac{1}{2} El_b \gamma_D^2, \quad El_b = \left(\frac{\mu}{\bar{\rho}} \right)^2 \frac{EA_w}{1-\nu^2} \left(\frac{e_w}{h_w} \right)^2 \frac{\kappa_1 + \bar{\rho}^2 \kappa_2 + 2(1+\bar{\rho}+\bar{\rho}^2)\kappa_1\kappa_2}{1+2(\kappa_1+\kappa_2)+3\kappa_1\kappa_2}$$

siendo El_b la rigidez a flexión transversal o **rigidez de marco** de la viga

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Formulación unificada de la distorsión.** Si los desplazamientos de membrana son $u^*(x,s,\eta) \equiv u(x,s)$ y $v^*(x,s,\eta) \equiv v(x,s)$ pondremos:

$$\mathbf{d}_m^* = \mathbf{h}_m(s) \cdot \mathbf{u}(x)$$

$$\begin{Bmatrix} u^*(x,s) \\ v^*(x,s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \omega_D(s) \\ -\omega'_D(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_D(x) \\ \varphi_D(x) \end{Bmatrix}$$

siendo $\gamma_D(x)$ y $\varphi_D(x)$ las intensidades de distorsión y de alabeo del modelo, mientras que $\omega_D(s)$ es el alabeo unitario, o patrón de alabeo por distorsión, basado en la **Figura (B)**

■ **Esfuerzos generalizados.** La definición estática de los esfuerzos generalizados $\mathbf{f}(x)$ proporciona en este caso las componentes siguientes:

$$\mathbf{f}(x) = \int_A \mathbf{h}_m^T \cdot \mathbf{t}^* dA = \begin{Bmatrix} M_D(x) \\ B_D(x) \end{Bmatrix}$$

que denominaremos **bicortante** y **bimomento de distorsión** respectivamente, con

$$M_D(x) = \int_A -\omega'_D(s) \tau_{xs}^* dA \quad , \quad B_D(x) = \int_A \omega_D(s) \sigma_x^* dA$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Cargas generalizadas.** En cuanto a las cargas generalizadas $\mathbf{Q}(x)$:

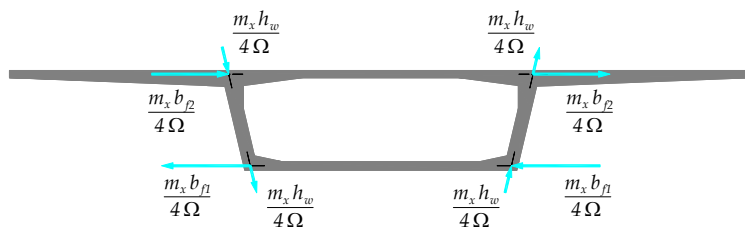
$$\mathbf{Q}(x) = \int_{\partial\Omega} \mathbf{h}_m^T(s) \cdot \bar{\mathbf{q}}(x, s) ds = \begin{Bmatrix} m_D(x) \\ b_D(x) \end{Bmatrix}$$

con

$$m_D(x) = \int_{\partial\Omega} -\omega'_D(s) \bar{q}_s(x, s) ds$$

$$b_D(x) = \int_{\partial\Omega} \omega_D(s) \bar{q}_x(x, s) ds$$

correspondientes a densidades lineales de *bicortantes* y *bimomentos* de distorsión, repartidas sobre la directriz de la pieza. Las fuerzas de volumen, por la forma simétrica de la sección transversal, no inducen acciones de distorsión y por lo tanto las únicas cargas consideradas para la evaluación de $\mathbf{Q}(x)$ han sido las presiones longitudinales y transversales aplicadas sobre la fibra media $\partial\Omega(s)$ de la sección de la pieza:



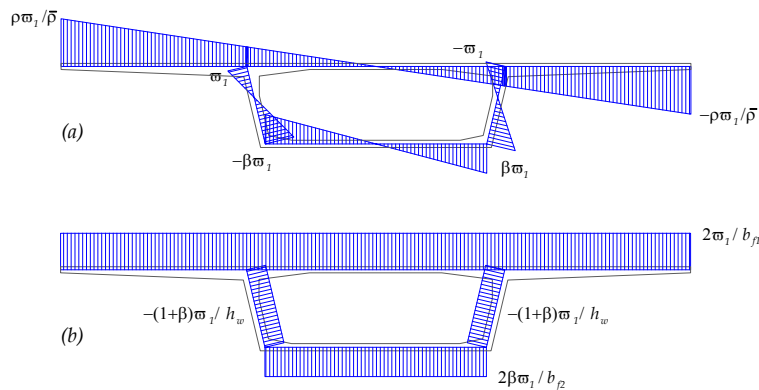
cara	b	h_w	b_{f2}
$\bar{q}_x(x, s)$	0	0	0
$\bar{q}_s(x, s)$	$-m_x b_{f2}/2\Omega$	$m_x h_w/2\Omega$	$-m_x b_{f1}/2\Omega$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Cargas generalizadas.** Teniendo en cuenta las distribuciones (a) del alabeo unitario de distorsión $\omega_D(s)$ y particularmente (b) de su derivada, sobre la fibra media de la sección transversal, se obtiene finalmente para las componentes de $\mathbf{Q}(x)$:



$$m_D = -\frac{m_x}{2\Omega} b_{f2} [-\omega'_D]_b - \frac{m_x}{2\Omega} b_{f1} [-\omega'_D]_{b_{f2}} + \frac{m_x}{\Omega} h_w [-\omega'_D]_{h_w}$$

$$= \frac{m_x}{\Omega} \varpi_1 \left(\frac{1}{\rho} + \beta \bar{\rho} + 1 + \beta \right) = \frac{\mu m_x}{1 + \rho}$$

$$b_D = 0$$

Análogamente, un torsor puntual T producirá un **bicortante exterior** de valor:

$$\frac{\mu T}{1 + \bar{\rho}}$$

Por último, una fuerza puntual $\mathbf{P}_A = \{P_{xA}, P_{sA}\}^T$ aplicada en el punto $A(x_A, s_A)$ de la fibra media de la sección transversal, producirá una carga generalizada igual a:

$$\mathbf{Q}_A = \mathbf{h}_m^T(s_A) \cdot \mathbf{P}_A = \begin{Bmatrix} -\omega'_D(s_A) P_{sA} \\ \omega_D(s_A) P_{xA} \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} M_A \\ B_A \end{Bmatrix}$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Estado membrana: matrices de deformación.** Si las deformaciones de membrana son $\varepsilon_x^*(x,s,\eta) \equiv \varepsilon_x^*(x,s)$ y $\gamma_{xs}^*(x,s,\eta) \equiv \gamma_{xs}^*(x,s)$ tendremos:

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = \omega_D \phi_D'$$

$$\gamma_{xs}^* = \frac{\partial u^*}{\partial s} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = \omega_D'(\phi_D - \gamma_D')$$

luego

$$\mathbf{e}_m^* = \mathbf{B}_0^m(s) \cdot \mathbf{u}(x) + \mathbf{B}_1^m(s) \cdot \mathbf{u}'(x)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^*(x,s) \\ \gamma_{xs}^*(x,s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \omega_D'(s) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_D(x) \\ \phi_D(x) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \omega_D(s) \\ -\omega_D'(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_D'(x) \\ \phi_D'(x) \end{Bmatrix}$$

A partir de esta estructura de las deformaciones, se puede evaluar los operadores *rigideces locales* \mathbf{D}_{rs}^m , que constituyen la matriz de la forma cuadrática densidad lineal de energía de deformación de membrana:

$$\mathbf{D}_{rs}^m = \int_A \mathbf{B}_r^{mT} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_s^m dA$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪Estado membrana: funcional de acción. En componentes, se obtiene:

$$\mathbf{D}_{00}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GW_D \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{01}^m = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -GW_D & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{11}^m = \begin{bmatrix} GW_D & 0 \\ 0 & EI_D \end{bmatrix}$$

con las constantes

$$W_D = \int_A (\omega'_D)^2 dA, \quad I_D = \int_A \omega_D^2 dA$$

Particularizando para la sección en cajón:

$$GW_D = 4GA_w \left(\frac{\varpi_1}{b_{f2}} \right)^2 \left[\frac{\alpha_1}{\rho^2} + \frac{1}{2}(1+\beta)^2 \left(\frac{b_{f2}}{h_w} \right)^2 + \alpha_2 \beta^2 \right]$$

$$EI_D = \frac{1}{3}EA_w \varpi_1^2 \left[\alpha_1 \left(\frac{\rho}{\rho} \right)^2 + 2 \frac{1+\beta^3}{1+\beta} + \alpha_2 \beta^2 \right]$$

Estas rigideces son características del estado membrana y en estos términos nos referiremos a ellas en alguna ocasión. Finalmente, el funcional de acción o densidad Lagrangiana $L_m(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}')$ se expresa como:

$$L_m(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^T \cdot \mathbf{D}_{00}^m \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{D}_{01}^m \cdot \mathbf{u}' + \mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{D}_{10}^m \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u}'^T \cdot \mathbf{D}_{11}^m \cdot \mathbf{u}') - \mathbf{u}^T \cdot \mathbf{Q}$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Formulación del problema completo.** La expresión de la energía de deformación asociada a la *flexión transversal* fue obtenida en líneas anteriores y permite deducir de forma directa la composición del único bloque \mathbf{D}_{00}^b no nulo:

$$\mathbf{D}_{00}^b = \begin{bmatrix} EI_b & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, la matriz que define la forma cuadrática *densidad lineal de energía de deformación* del problema de distorsión **completo** (*membrana y flexión*) es:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^m + \mathbf{D}^b = \begin{bmatrix} EI_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GW_D & -GW_D & 0 \\ 0 & -GW_D & GW_D & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_D \end{bmatrix}$$

La Lagrangiana del problema **completo** vale $L = L_m + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{D}_{00} \mathbf{u}$ y la definición energética de los esfuerzos nos proporciona de forma directa relaciones constitutivas para el bicortante y el bimomento:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}'} = \mathbf{D}_{10} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}'$$

$$\begin{Bmatrix} M_D \\ B_D \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -GW_D \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_D \\ \varphi_D \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} GW_D & 0 \\ 0 & EI_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma'_D \\ \varphi'_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} GW_D(\gamma'_D - \varphi_D) \\ EI_D \varphi'_D \end{Bmatrix}$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Ecuaciones de la teoría de distorsión.** El sistema de ecuaciones diferenciales que rige el problema puede escribirse en forma canónica como siguiente:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{E}(x) = \mathbf{W} \mathbf{E}(x) - \mathbf{F}(x)$$

con el vector estado $\mathbf{E}(x)$ que agrupa todas las variables del problema, desplazamientos y esfuerzos generalizados:

$$\mathbf{E}(x) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{f}(x) \end{Bmatrix} = \{\gamma_D(x) \quad \varphi_D(x) \quad M_D(x) \quad B_D(x)\}^T$$

y el término independiente o de carga $\mathbf{F}(x)$:

$$\mathbf{F}(x) = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(x) \end{Bmatrix} = \{0 \quad 0 \quad m_D(x) \quad b_D(x)\}^T$$

En cuanto al operador \mathbf{W} , resulta de coeficientes constantes dada la naturaleza de la pieza y su composición, según la teoría unificada, es:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{GW_D} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_D} \\ EI_b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

Anotando que la deformación por cortante en el plano medio de las diferentes placas que componen la estructura vale:

$$\gamma_{xs}^* = \omega_D'(\varphi_D - \gamma_D') = -\omega_D' \frac{M_D}{GW_D}$$

esta deformación se anulará cuando la rigidez frente al bicortante se considere infinita: $GW_D \rightarrow \infty$. La evaluación de los autovalores de **W** proporciona una interesante discusión sobre el comportamiento del modelo:

$$|\mathbf{W} - K\mathbf{I}| = K^4 + EI_b \left(\frac{1}{EI_D} - \frac{K^2}{GW_D} \right)$$

resultando la ecuación característica siguiente:

$$K^4 - \frac{EI_b}{GW_D} K^2 + \frac{EI_b}{EI_D} = 0$$

cuyas raíces son:

$$K^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{EI_b}{GW_D} \pm \sqrt{\left(\frac{EI_b}{GW_D} \right)^2 - 4 \frac{EI_b}{EI_D}} \right]$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

CASO I: vigas sin rigidez a flexión transversal ($EI_b=0$)

Esta situación es propia de las vigas cajón metálicas o mixtas, para las cuales el espesor de pared de la *piel* metálica y el diseño al uso de las uniones entre paneles (almas y tablas) proporcionan un sistema muy flexible frente a los momentos flectores transversales m_{ss} . En estas condiciones, el único autovalor del sistema es $K=0$ con orden de multiplicidad 4, resultando un problema análogo al de flexión: los correspondientes operadores \mathbf{W} coinciden si se sustituye la rigidez a cortante GA por la de bicortante GW_D y la rigidez a flexión EI_z por la de membrana EI_D , por lo que desplazamientos y esfuerzos generalizados cumplen la siguiente homología:

	componentes de $\mathbf{E}(\xi)$				cargas $\mathbf{Q}(\xi)$		rigideces	
distorsión	γ_D	φ_D	M_D	B_D	m_D	b_D	GW_D	EI_D
flexión	v	θ_z	Q_y	M_z	q_y	m_z	GA	EI_z

Al margen de posibilitar la rápida elaboración de soluciones $\mathbf{E}(\xi)$, esta propiedad brinda una útil interpretación de la forma en que actúan los diafragmas transversales en estas estructuras puesto que al coaccionar la distorsión γ_D equivalen a **apoyos elásticos** en el problema análogo, así mismo en el caso límite de diafragmas perfectamente rígidos resulta simplemente la condición ($v=0$) en la sección correspondiente

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

CASO II: vigas sin deformación por bicortante ($GW_D \rightarrow \infty$)

Esta situación corresponde a la formulación clásica desarrollada en otros trabajos y lleva asociada los autovalores siguientes:

$$K = \pm 4 \sqrt{\frac{EI_b}{4EI_D}} (1 \pm i)$$

Denominaremos **esbeltez de distorsión** al coeficiente adimensional λ definido a continuación:

$$\lambda = L^4 \sqrt{\frac{EI_b}{4EI_D}}$$

CASO III: caso general

Al suponer que la rigidez a bicortante adopta un valor finito, las raíces de la ecuación característica pueden reescribirse en la forma siguiente:

$$K^2 = 2 \left(\frac{\lambda}{L} \right)^2 \left[\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1} \right]$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

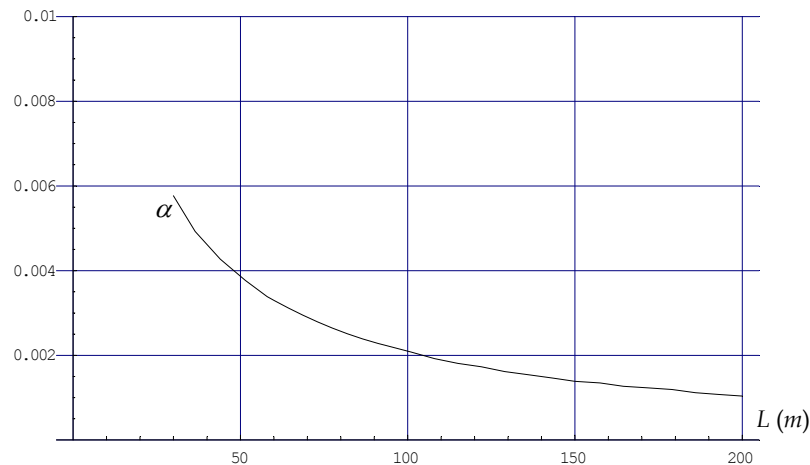
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

α es un coeficiente adimensional que puede expresarse exclusivamente en función de las rigideces de membrana GW_D y EI_D y de la esbeltez de distorsión:

$$\alpha = \frac{\sqrt{EI_b EI_D}}{2GW_D} = \frac{\lambda^2}{12} \alpha_D, \quad \alpha_D = \frac{12EI_D}{GW_D L^2}$$

siendo α_D el **factor de bicortante**. El rango de variación de α en función de la luz se ha representado en la *Figura* adjunta para una sección con proporciones usuales en el ámbito de los tableros de puentes metálicos o mixtos en cajón



Variación del factor α en función de L para la sección estándar

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

La solución general del problema puede darse en la forma

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{G}(\xi) \cdot \mathbf{E}_0 - \int_{\tau=0}^{\xi} \mathbf{G}(\xi - \tau) \cdot \mathbf{F}(\tau) L d\tau$$

donde $\mathbf{G}(\xi)$ es el operador fundamental del sistema y $\xi=x/L$, $\tau=t/L$ son valores adimensionales de la coordenada longitudinal. Subdividido este en bloques

$$\mathbf{G}(\xi) = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uu}(\xi) & \mathbf{G}_{uf}(\xi) \\ \mathbf{G}_{fu}(\xi) & \mathbf{G}_{ff}(\xi) \end{bmatrix}$$

y despreciando la deformación por bicortante, sus componentes resultan ser:

$$\mathbf{G}_{uu}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi & \frac{L}{2\lambda} (sh \lambda \xi \cos \lambda \xi + sen \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi) \\ \frac{\lambda}{L} (sh \lambda \xi \cos \lambda \xi - sen \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi) & \cos \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{uf}(\xi) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4EI_D} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^3 (sh \lambda \xi \cos \lambda \xi - sen \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi) & \frac{1}{2EI_D} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 sen \lambda \xi sh \lambda \xi \\ -\frac{1}{2EI_D} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 sen \lambda \xi sh \lambda \xi & \frac{1}{2EI_D} \frac{L}{\lambda} (sh \lambda \xi \cos \lambda \xi + sen \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi) \end{bmatrix}$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

y

$$\mathbf{G}_{fu}(\xi) = \begin{bmatrix} 2EI_D \left(\frac{\lambda}{L}\right)^3 (sh\lambda\xi\cos\lambda\xi + sen\lambda\xi ch\lambda\xi) & 2EI_D \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 sen\lambda\xi sh\lambda\xi \\ -2EI_D \left(\frac{\lambda}{L}\right)^2 sen\lambda\xi sh\lambda\xi & EI_D \frac{\lambda}{L} (sh\lambda\xi\cos\lambda\xi - sen\lambda\xi ch\lambda\xi) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G}_{ff}(\xi) = \begin{bmatrix} \cos\lambda\xi ch\lambda\xi & \frac{\lambda}{L} (sen\lambda\xi ch\lambda\xi - sh\lambda\xi\cos\lambda\xi) \\ -\frac{L}{2\lambda} (sen\lambda\xi ch\lambda\xi + sh\lambda\xi\cos\lambda\xi) & \cos\lambda\xi ch\lambda\xi \end{bmatrix}$$

λ es la esbeltez de distorsión de la viga definida anteriormente, de valor:

$$\lambda = L^4 \sqrt{\frac{EI_b}{4EI_D}}$$

Finalmente, aprovechando la composición particular del término independiente $\mathbf{F}(\xi)$, la solución general también puede descomponerse en bloques:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}(\xi) \\ \mathbf{f}(\xi) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uu}(\xi) & \mathbf{G}_{uf}(\xi) \\ \mathbf{G}_{fu}(\xi) & \mathbf{G}_{ff}(\xi) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}|_{\xi=0} \\ \mathbf{f}|_{\xi=0} \end{Bmatrix} - \int_{\tau=0}^{\xi} \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uf}(\xi-\tau) \\ \mathbf{G}_{ff}(\xi-\tau) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}(\tau) L d\tau$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **El problema elemental.** A modo de ejemplo, vamos a aplicar los resultados anteriores a un tablero *simplemente apoyado* sometido a una acción torsora concentrada T en la sección $x=t$. Por simplemente apoyado, entenderemos que las distorsiones de las secciones extremas están perfectamente coaccionadas ($\gamma_D|_{\xi=0,1}=0$) y sus alabeos son libres ($B_D|_{\xi=0,1}=0$). La correspondiente determinación de las constantes de integración E_0 permite entonces definir completamente la solución. Esta queda recogida en la tabla adjunta para $\xi < \tau$. Sobre el resto del intervalo ($\xi > \tau$), basta permutar ξ y τ por $(1-\xi)$ y $(1-\tau)$ respectivamente, y cambiar el signo de las fórmulas resultantes para el alabeo y el bicortante de distorsión

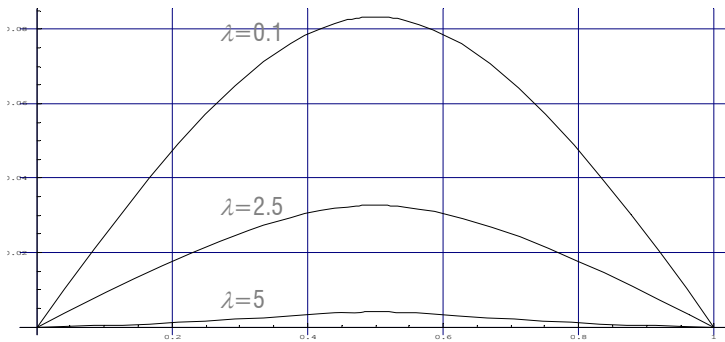
$E(\xi)$	$\xi < \tau$
$\gamma_D(\xi)$	$\frac{1}{4EI_D} \frac{\mu T}{1+\rho} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^3 \left[\cos \lambda \xi \operatorname{sh} \lambda \xi (\bar{\varphi}_0 + \bar{M}_0) + \operatorname{sen} \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi (\bar{\varphi}_0 - \bar{M}_0) \right]$
$\varphi_D(\xi)$	$\frac{1}{2EI_D} \frac{\mu T}{1+\rho} \left(\frac{L}{\lambda}\right)^2 \left(\cos \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi \bar{\varphi}_0 - \operatorname{sen} \lambda \xi \operatorname{sh} \lambda \xi \bar{M}_0 \right)$
$M_D(\xi)$	$\frac{\mu T}{1+\rho} \left(\operatorname{sen} \lambda \xi \operatorname{sh} \lambda \xi \bar{\varphi}_0 + \cos \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi \bar{M}_0 \right)$
$B_D(\xi)$	$\frac{\mu T}{1+\rho} \frac{L}{2\lambda} \left[\cos \lambda \xi \operatorname{sh} \lambda \xi (\bar{\varphi}_0 - \bar{M}_0) - \operatorname{sen} \lambda \xi \operatorname{ch} \lambda \xi (\bar{\varphi}_0 + \bar{M}_0) \right]$

Las funciones $\bar{\varphi}_0$ y \bar{M}_0 se definen más adelante

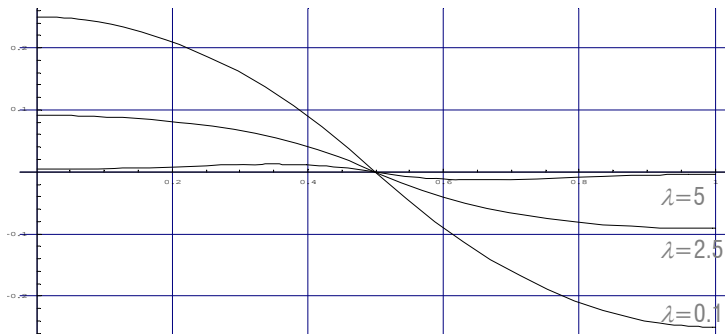
<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

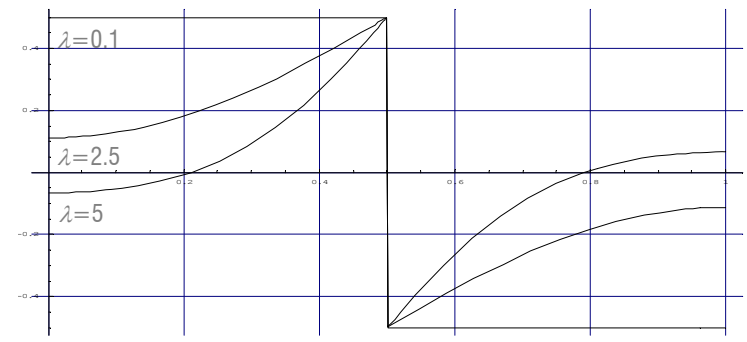
01 El modelo viga en el análisis de tableros



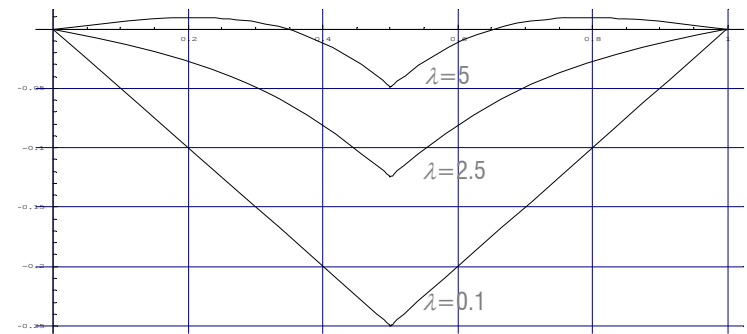
Distorsión $\gamma_D(\xi)$ para torsor puntual T ($\tau=0.5$). Factor $\frac{1}{4EI_D} \frac{\mu TL^3}{1+\bar{\rho}}$



Intensidad de alabeo $\varphi_D(\xi)$ para torsor puntual T ($\tau=0.5$). Factor $\frac{1}{4EI_D} \frac{\mu TL^2}{1+\bar{\rho}}$



Bicortante $M_D(\xi)$ para torsor puntual T ($\tau=0.5$). Factor $\frac{\mu T}{1+\bar{\rho}}$



Bimomento $B_D(\xi)$ para torsor puntual T ($\tau=0.5$). Factor $\frac{\mu TL}{1+\bar{\rho}}$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪**Control de la distorsión.** Los resultados anteriores muestran como los efectos de la distorsión están directamente relacionados con el valor del parámetro λ , *atenuándose* estos *al crecer la esbeltez* de distorsión. Por lo tanto, el diseño eficiente de elementos tubulares no solo va a requerir saber evaluar la distorsión; también exigirá controlarla limitando su efecto sobre la respuesta de la estructura, tanto en desplazamientos como sobre todo en tensiones. Esta situación es especialmente crítica en piezas de reducida esbeltez de distorsión, como suele suceder en tableros de puentes metálicos o mixtos de longitud moderada, por su baja rigidez de marco El_b . Para ello se puede actuar sobre la forma de la pieza modificando los espesores de pared, pero la consecuente penalización del peso propio (y del coste) aconseja otra medida más apropiada, que consiste en disponer *diafragmas* entre las secciones apoyadas. Ello exige resolver la *incorporación a la formulación* de estos elementos estructurales y previamente definir sus características (*rigidez a la distorsión*) de acuerdo con su tipología

▪**Acción de los diafragmas.** Según hemos mostrado anteriormente, el esfuerzo (la acción) consistente con la distorsión es el *bicortante*. A esta conclusión también se llega de forma directa evaluando el trabajo virtual de las tensiones tangenciales τ_{xs}^* sobre la sección transversal:

$$\begin{aligned}\int_A \tau_{xs}^* \delta v^* dA &= \delta \gamma_D \int_A -\omega_D' \tau_{xs}^* dA \\ &= \delta \gamma_D M_D\end{aligned}$$

Al estar dispuestos en planos ortogonales al tablero, los diafragmas resultan muy eficaces para coaccionar el cambio de forma de las secciones (*distorsión*) sin apenas coartar su alabeo. Por lo tanto, la *acción* que compatibiliza el cambio de forma de ambos sistemas es un *bicortante exterior* que denominaremos M_D^* y que tiene carácter de coacción hiperestática

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ Rigidez del diafragma

(a) *Diafragma continuo*. Es el de mayor sencillez geométrica puesto que su rigidez frente a la distorsión K_D depende solo de su espesor e_D y puede calcularse mediante la fórmula:

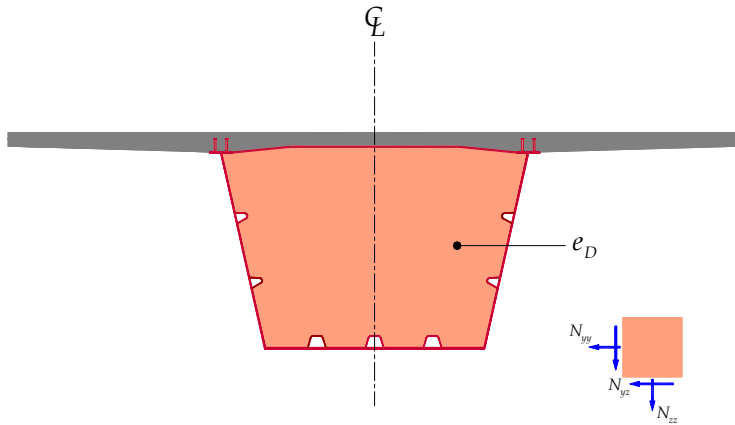
$$K_D = G\Omega e_D(1 + \delta) \quad , \quad \delta = \frac{\bar{\rho} - 1}{3(1 - \nu)(\bar{\rho} + 1)} \left[(\bar{\rho}^2 + 1) \left(\frac{b_{f2}}{h} \right)^2 + \frac{4\nu(\bar{\rho} - 1)}{(1 - \nu)(\bar{\rho} + 1)} \right]$$

La resistencia del diafragma se comprueba a partir de los esfuerzos de membrana N_{yy} , N_{yz} y N_{zz} generados por el bicortante M_D^* transmitido por la viga:

$$N_{zz} = \frac{2}{1 - \nu} \frac{\bar{\rho} - 1}{\bar{\rho} + 1} \frac{b_{f1}}{h} \frac{M_D^*}{(1 + \delta)\Omega}$$

$$N_{yy} = \nu N_{zz}$$

$$N_{yz} = \frac{2}{\bar{\rho} + 1} \left[1 + \frac{\bar{\rho} - 1}{2} \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \right] \frac{M_D^*}{(1 + \delta)\Omega}$$



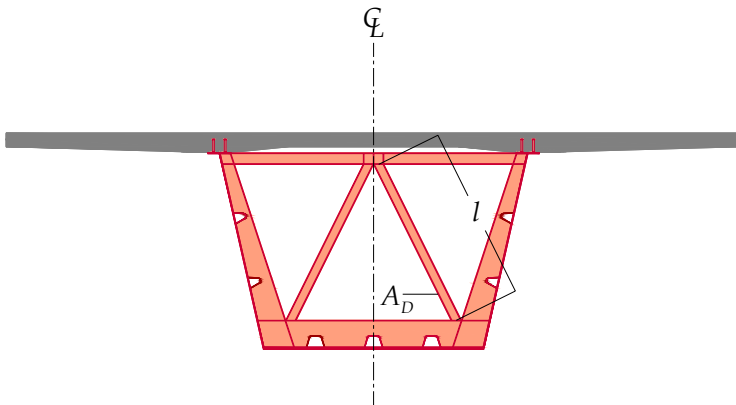
<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ Rigidez del diafragma

(b) **Marco triangulado.** Despreciando la colaboración de los rigidizadores transversales coplanarios con las diagonales (para incorporar su efecto basta sumar la rigidez que se evalúa en el caso (c)) y denominando l a su longitud y A_D al área de su sección, tendremos:



$$K_D = \frac{8\bar{\rho}^2}{(1+\bar{\rho})^4} \left(\frac{\Omega}{l} \right)^2 \frac{EA_D}{l}$$

La comprobación resistente de las barras se lleva a cabo con el axil N_D soportado, igual a:

$$N_D = \left(\frac{1+\bar{\rho}}{2} \right)^2 \frac{M_D^* l}{\bar{\rho} \Omega}$$

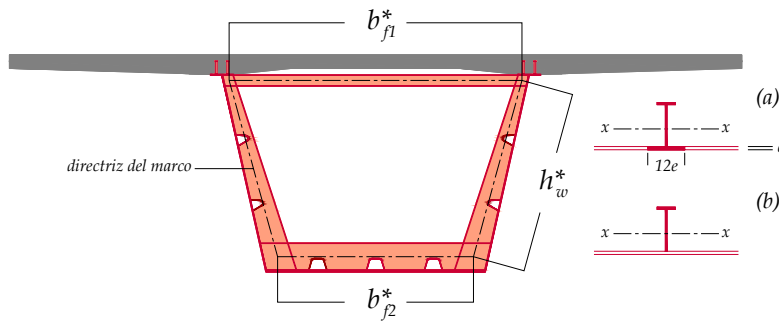
<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ Rigidez del diafragma

(c) **Marco porticado.** Este caso se resuelve con la fórmula de la rigidez de marco EI_b adecuadamente adaptada: basta sustituir la fibra media de las paredes de la celda por la directriz del marco, determinada incorporando a la sección transversal de las barras del marco la parte efectiva de la piel metálica (a), posteriormente la inercia de cada barra I_{fi} o I_w se calcula con la sección (b):



$$k_{fi} = \frac{EI_{fi}}{b_{fi}^*}, \quad k_w = \frac{EI_w}{h_w^*}, \quad \kappa_i = \frac{k_{fi}}{k_w}$$

$$K_D = \frac{48k_w}{(1+\rho)^2} \frac{\kappa_1 + \bar{\rho}^2 \kappa_2 + 2(1+\bar{\rho} + \bar{\rho}^2)\kappa_1 \kappa_2}{1 + 2(\kappa_1 + \kappa_2) + 3\kappa_1 \kappa_2}$$

El marco debe diseñarse para resistir los momentos en extremos de barra inducidos por el bicortante que le transmite la viga:

$$M_{w1} = \frac{1+\bar{\rho}}{4} \frac{\kappa_1 + (2+\bar{\rho})\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \bar{\rho}^2 \kappa_2 + 2(1+\bar{\rho} + \bar{\rho}^2)\kappa_1 \kappa_2} M_D^* = -M_{f1}$$

$$M_{w2} = \frac{1+\bar{\rho}}{4} \frac{\bar{\rho} \kappa_2 + (2\bar{\rho}+1)\kappa_1 \kappa_2}{\kappa_1 + \bar{\rho}^2 \kappa_2 + 2(1+\bar{\rho} + \bar{\rho}^2)\kappa_1 \kappa_2} M_D^* = -M_{f2}$$

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Determinación de la acción del diafragma sobre el tablero.** Se trata ahora de evaluar los bicortantes M_D^* resistidos por los diafragmas. El problema se puede formular en flexibilidad suponiendo que:

- 1) la viga está simplemente apoyada en sus secciones extremas (*alabeo libre y distorsión completamente coaccionada en $x=0,L$*) y
- 2) los N diafragmas intermedios, que también denominaremos interiores, son todos idénticos

Bajo estos supuestos, la compatibilidad de distorsiones entre tablero y diafragmas proporciona la ecuación de flexibilidad siguiente:

$$\Gamma_D^0 + \frac{L^3}{4EI_D} \Gamma^* \mathbf{M}_D^* = -\frac{1}{K_D} \mathbf{M}_D^*$$

- Γ_D^0 son las distorsiones que registra el tablero libre de diafragmas intermedios en las correspondientes secciones, bajo la acción de las cargas torsoras
- \mathbf{M}_D^* son los bicortantes de distorsión que compatibilizan la distorsión de tablero con la del diafragma en cada una de las N secciones arriostradas
- K_D es la rigidez del diafragma aislado
- Γ^* es la matriz de flexibilidad *adimensional* del tablero relativa a las coacciones seleccionadas

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

A continuación se facilita la solución del sistema anterior en \mathbf{M}_D^* así como el detalle de la composición de la matriz de flexibilidad del tablero para condiciones de simple apoyo :

$$\mathbf{M}_D^* = -\frac{4EI_D}{L^3} \left[\mathbf{\Gamma}^* + \eta \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{\Gamma}_D^0, \quad \mathbf{\Gamma}^* = \left[\Gamma_{ij}^* \right]_{j=1aN, j=1aN}, \quad \eta = \frac{4EI_D}{K_D L^3}$$

$$\Gamma_{ij}^* = \frac{\cos \lambda \xi_i \operatorname{sh} \lambda \xi_j (\bar{\varphi}_{0j} + \bar{M}_{0j}) + \operatorname{sen} \lambda \xi_i \operatorname{ch} \lambda \xi_j (\bar{\varphi}_{0j} - \bar{M}_{0j})}{\lambda^3}$$

$$\bar{\varphi}_{0j} = \frac{\operatorname{sen} \lambda \cos \bar{\lambda}_j \operatorname{sh} \bar{\lambda}_j \operatorname{ch} \lambda - \operatorname{sen} \bar{\lambda}_j \cos \lambda \operatorname{sh} \lambda \operatorname{ch} \bar{\lambda}_j}{\operatorname{sh}^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \lambda}$$

$$\bar{M}_{0j} = \frac{\cos \lambda \cos \bar{\lambda}_j \operatorname{sh} \lambda \operatorname{sh} \bar{\lambda}_j + \operatorname{sen} \lambda \operatorname{sen} \bar{\lambda}_j \operatorname{ch} \lambda \operatorname{ch} \bar{\lambda}_j}{\operatorname{sh}^2 \lambda + \operatorname{sen}^2 \lambda}$$

$$\bar{\lambda}_j = \lambda(1 - \xi_j), \quad \xi_i \leq \xi_j$$

Con esta herramienta es posible organizar el estudio de la influencia del número y rigidez de los diafragmas sobre la distorsión de tableros metálicos o mixtos. Pero para ello, conviene definir **secciones estándar**, con el fin de relacionar los diferentes parámetros geométricos (b , $b_{f1} \times e_{f1}$, $b_{f2} \times e_{f2}$, $h_w \times e_w$, h , $L \dots$), así como algún **cuantificador de la distorsión**

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

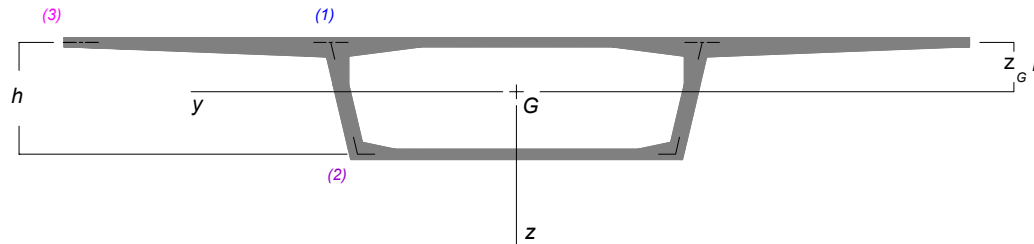
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Cuantificación de la distorsión.** En lo sucesivo adoptaremos el siguiente *cuantificador estático*, expresado en % y para el punto (i) de una sección ξ de la viga:

$$\varepsilon_{\sigma D}^{(i)} = \frac{|\sigma_{xD(i)}^*|}{|\sigma_{xb(i)}^*| + |\sigma_{xD(i)}^*|} 100$$

en el cómputo de esta función no se ha incluido el efecto de la torsión. Esta simplificación está totalmente justificada en el contexto de las vigas en cajón y proporciona una estimación segura del efecto

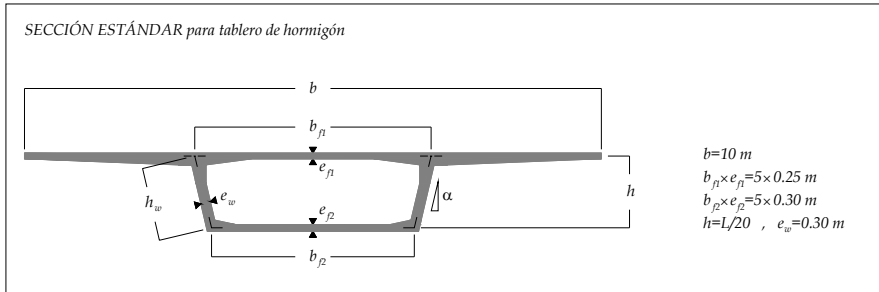


Puntos de cálculo de tensiones longitudinales σ_x^*

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

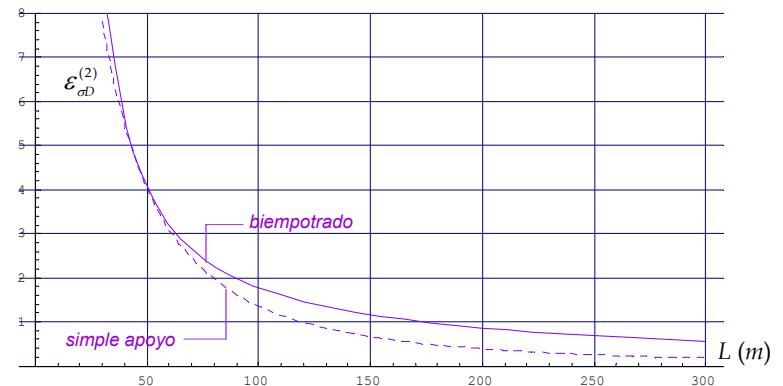
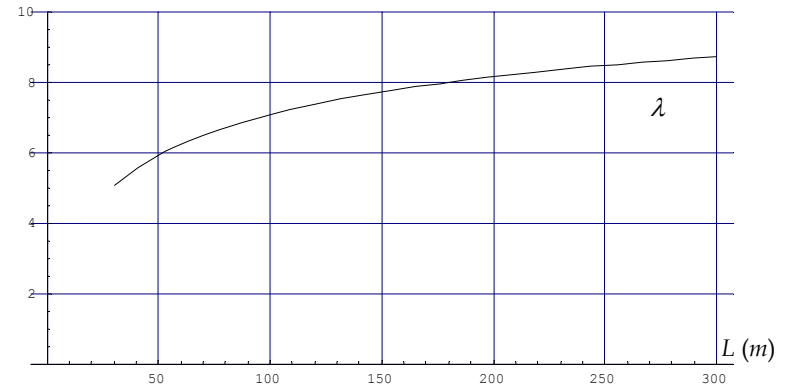
01 El modelo viga en el análisis de tableros



▪ **criterio para el control de la distorsión** en vigas rectas monocelulares de hormigón simplemente apoyadas. Teniendo en cuenta que para los tableros estudiados se verifica:

$$\varepsilon_{\sigma D} \leq 4\% \quad \text{si} \quad \lambda = L \sqrt{\frac{EI_b}{4EI_D}} \geq 6$$

la disipación de las tensiones normales de distorsión queda garantizada si la esbeltez de distorsión de la pieza es **mayor o igual que 6**

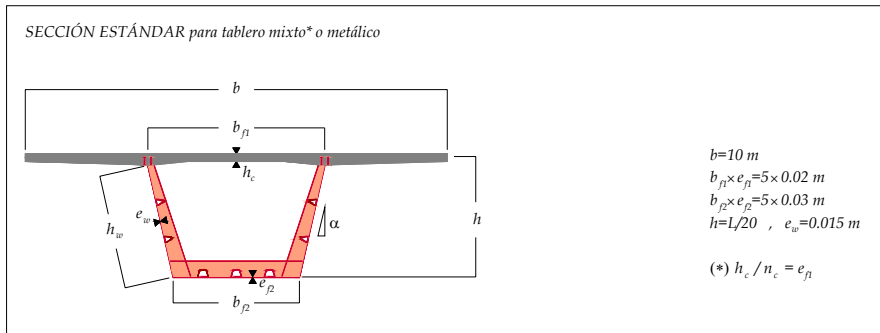


Cuantificador de la distorsión en un tablero de hormigón de sección estándar

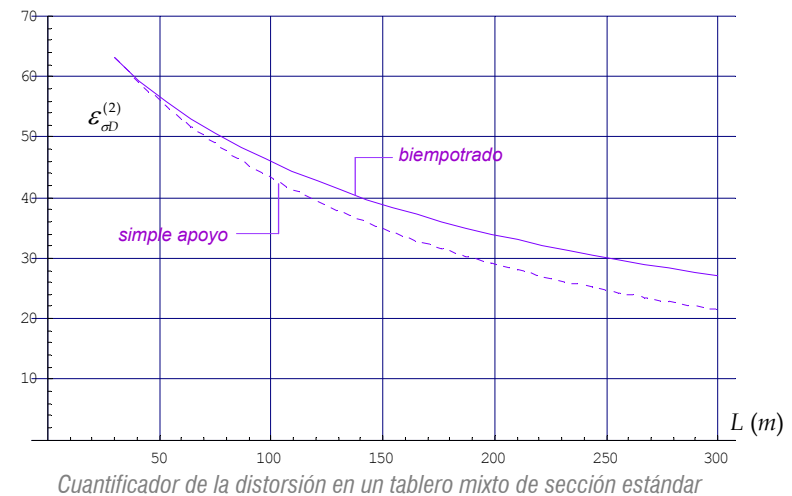
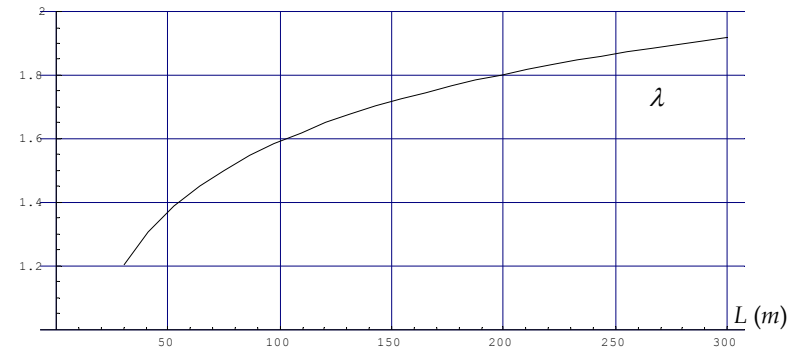
<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros



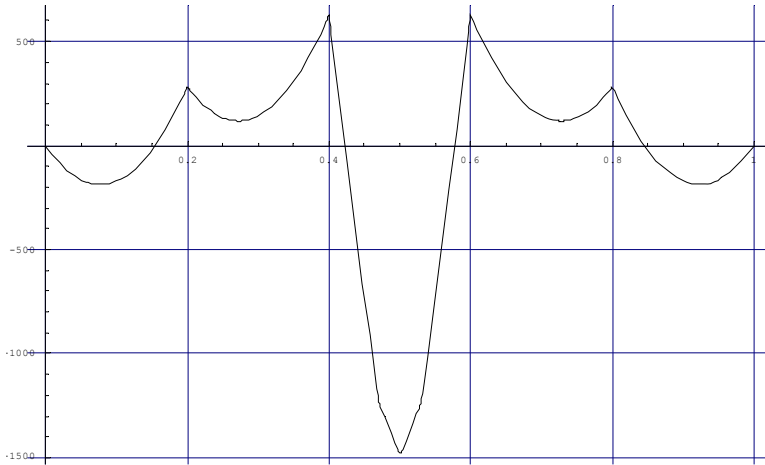
▪ **criterio para el control de la distorsión.** Las vigas cajón con artesa metálica demuestran poseer una baja esbeltez a la distorsión, resultando muy sensibles a este fenómeno, incluso para luces elevadas. Con el fin de obtener un diseño estructural más eficiente, deberemos incorporar diafragmas internos, con rigidez y número suficientes para acotar la distorsión convenientemente. Esta acción se instrumenta a continuación



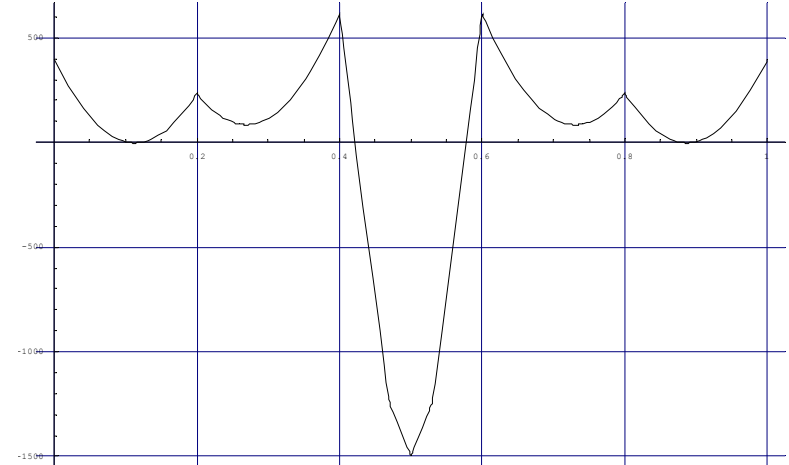
<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros



Bimomentos de distorsión en un tablero mixto **simplemente apoyado** con 4 diafragmas interiores sometido a las acciones permanentes y al tren de cargas de la IAP-11 ($\lambda=1.37$, $\eta=0.98 \cdot 10^{-3}$)



Bimomentos de distorsión en un tablero mixto **biempotrado** con 4 diafragmas interiores sometido a las acciones permanentes y al tren de cargas de la IAP-11 ($\lambda=1.37$, $\eta=0.98 \cdot 10^{-3}$)

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ Estimación de la disipación estática de la distorsión en un tablero mixto **simplemente apoyado** de sección estándar, con número variable de diafragmas transversales

L (m)		50	75	100	150	200
λ		1.37	1.50	1.59	1.72	1.80
$\eta \times 10^3$		0.98	0.41	0.23	0.11	0.07
$\varepsilon_{\sigma d}$ (%)	2 diafragmas	9.91	6.87	5.16	3.35	2.62
	3 diafragmas	8.04	5.50	4.14	2.70	2.12
	4 diafragmas	6.10	4.08	3.04	1.98	1.56
	5 diafragmas	5.44	3.54	2.60	1.65	1.29

■ Estimación de la disipación estática de la distorsión en un tablero mixto **biempotrado** de sección estándar, con número variable de diafragmas transversales

L (m)		50	75	100	150	200
λ		1.37	1.50	1.59	1.72	1.80
$\eta \times 10^3$		0.98	0.41	0.23	0.11	0.07
$\varepsilon_{\sigma d}$ (%)	2 diafragmas	24.05	17.85	14.12	9.83	7.47
	3 diafragmas	22.02	15.96	12.46	8.52	6.39
	4 diafragmas	15.45	10.76	8.20	5.46	4.34
	5 diafragmas	14.50	9.86	7.42	4.85	3.82

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Diseño frente a distorsión, de tableros en cajón metálicos o mixtos.** Basándonos en los resultados obtenidos, articularemos nuestra propuesta en torno a tres puntos cuyo orden no es arbitrario sino que plantea, bajo nuestro punto de vista, la secuencia lógica de acciones para conseguir una guía eficiente de diseño a distorsión de tableros de puentes metálicos o mixtos:

- Evaluación de la esbeltez de vano
- Adopción del número de diafragmas por vano
- Dimensionamiento de diafragmas

	vano simple	vanos continuos
esbeltez de vano λ	≥ 1.50	≥ 1.70
Nº diafragmas por vano	≥ 4	≥ 4
Dimensionamiento de los diafragmas	por resistencia*	por resistencia*

(*) aplicando la analogía flexión-distorsión para evaluar los bicortantes de distorsión con los que dimensionar los diafragmas

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Esquema para la aplicación de las condiciones de diseño ultrarígido frente a distorsión.** Desarrollando con mayor detalle los conceptos recogidos en la tabla anterior, procederemos como sigue:

1. **Se evalúa la esbeltez de distorsión λ de cada vano**
 - 1.1 Si se cumplen las condiciones prescritas, se pasa al nivel 2.
 - 1.2 En caso contrario, el cómputo de la distorsión es inevitable, debiendo recurrir a la formulación general presentada para la estimación de sus efectos, pero pasando previamente por los niveles 2. y 3.
2. **Se adopta un número de diafragmas interiores** de acuerdo con la tabla anterior
3. **Se dimensionan los diafragmas por resistencia** como sigue. Para determinar los bicortantes hiperestáticos, se desprecia la rigidez de marco de la viga cajón a la vez que se supone el marco indeformable ($El_b = \eta = 0$). Las coacciones M_D^* coincidirán entonces con las reacciones en los apoyos de una viga continua de vanos idénticos a la separación entre diafragmas, solicitada por cargas puntuales P y/o densidades lineales q de valor:

$$P = \frac{\mu T}{1 + \bar{\rho}} \quad , \quad q = \frac{\mu m_x}{1 + \bar{\rho}}$$

si las acciones aplicadas son torsos puntuales T y/o densidades lineales m_x

4. **Si λ cumple** las condiciones de esbeltez prescritas (caso 1.1) el cálculo ha terminado. **De lo contrario** (caso 1.2) los efectos de la distorsión deberán incorporarse al análisis global

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Influencia de las condiciones de contorno.** Aunque al presentar el problema elemental nos hemos limitado a resolver el caso de la viga simplemente apoyada, otras condiciones de contorno pueden evaluarse sin ninguna dificultad, como la viga en ménsula o la viga biempotrada, y una primera conclusión que se deduce de estos estudios es que existe una relación directa entre coacción al alabeo y disipación de la distorsión: a **menor coacción** al alabeo **mayor disipación** de la distorsión, o lo que es lo mismo, **mayor esbeltez aparente de la pieza λ^*** . Esta propiedad *cualitativa* puede cuantificarse como sigue “La **esbeltez aparente** de una viga de longitud L será la que corresponde a una pieza con la misma sección transversal en condiciones de simple apoyo y con idéntica cuantificación estática de la distorsión”. Además, como esbeltez y longitud son proporcionales, esta definición equivale a asociar una **luz efectiva** $L_{ef} = \beta L$ a las condiciones básicas (*simple apoyo*), por lo tanto tendremos finalmente:

$$\lambda^* = \beta \lambda \quad , \quad L_{ef} = \beta L$$

Obviamente, la esbeltez aparente depende de las cargas actuantes, sin embargo, si pretendemos generalizar la clasificación de los tableros frente a la distorsión, puede resultar más operativo manejar los conceptos de esbeltez aparente y luz efectiva, ya que nos liberan de las condiciones de contorno particulares de cada tablero continuo. Por último, en el caso límite de las secciones sin rigidez de marco, la analogía con el problema de flexión permite identificar la **luz efectiva** con la **distancia entre secciones de bimomento/momento flector nulo**

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■Conclusiones respecto a la distorsión

(1) **Esbeltez de distorsión y disipación del fenómeno.** A la vista de los resultados anteriores, podemos afirmar que la distorsión se atenúa a medida que la **esbeltez aparente** de la viga λ_D^* aumenta, siendo prácticamente despreciable para esbelteces iguales o superiores a 6

(2) **Validación del ámbito general del modelo viga.** Aunque al enunciar el **ámbito general del modelo viga** no se hizo mención expresa a la distorsión, para poder aplicar el modelo viga es necesario garantizar la rigidez de la sección transversal (*segundo requisito fundamental de la teoría*). Por lo tanto deberán adoptarse, en su caso ($\lambda_D^* < 6$), las medidas constructivas adecuadas para tal fin, que consisten en disponer diafragmas transversales interiores (*entre secciones apoyadas*)

(3) **Norma general.** Como norma general, podemos afirmar que lo **tableros celulares en hormigón no requieren disposiciones específicas** para asegurar la rigidez de la sección transversal, mientras que los **tableros metálicos y los tableros mixtos** se hallan en el extremo opuesto, siendo siempre **necesario dotarlos de al menos 4 diafragmas** transversales entre las secciones de apoyo

<1.1.4 CUANTIFICACIÓN DE LA DISTORSIÓN>

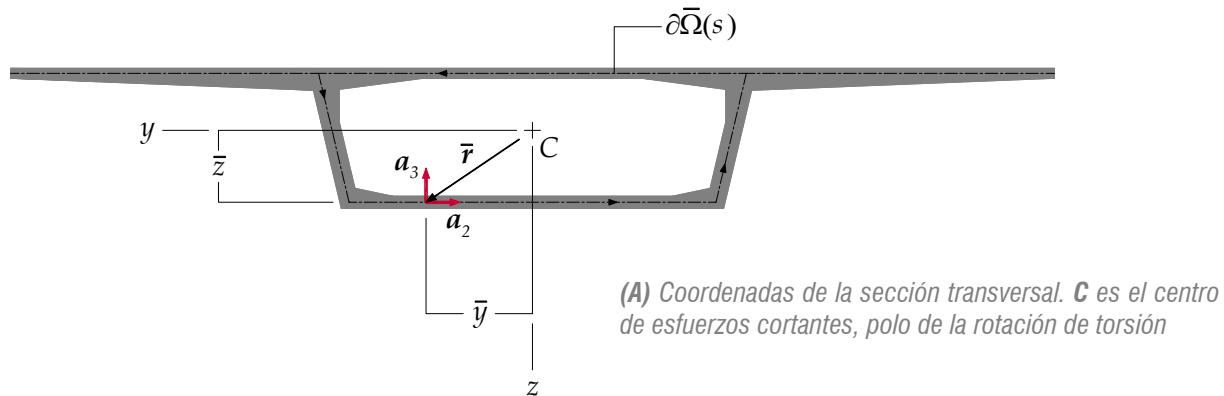
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caracterización cinemática de la torsión.** Sea $\bar{\mathbf{r}}(s)$ el vector posición de la curva $\partial\bar{\Omega}$ que define la fibra media de la sección transversal y $\mathbf{a}_3(s)$ su normal unitaria interior. Si \mathbf{r} es la posición de cualquier punto de la sección, tendremos alternativamente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{r}(y, z) = y\mathbf{i}_2 + z\mathbf{i}_3 \\ \mathbf{r}(s, \eta) = \bar{\mathbf{r}}(s) + \eta\mathbf{a}_3(s) \end{array} \right.$$

donde la coordenada η mide la distancia del punto en cuestión respecto a la fibra media



<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

La Figura (A) proporciona entonces las siguientes fórmulas geométricas:

$$\begin{cases} \bar{\mathbf{r}}(s) = \bar{y}(s)\mathbf{i}_2 + \bar{z}(s)\mathbf{i}_3 \\ \mathbf{a}_2(s) = \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{ds} = \bar{y}'(s)\mathbf{i}_2 + \bar{z}'(s)\mathbf{i}_3 \\ \mathbf{a}_3(s) = \mathbf{i}_1 \times \mathbf{a}_2(s) = -\bar{z}'(s)\mathbf{i}_2 + \bar{y}'(s)\mathbf{i}_3 \end{cases}$$

luego

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}' & \bar{z}' \\ -\bar{z}' & \bar{y}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{Bmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{Bmatrix} \mathbf{i}_2 \\ \mathbf{i}_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{y}' & -\bar{z}' \\ \bar{z}' & \bar{y}' \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_3 \end{Bmatrix}$$

Estas expresiones permiten pasar cómodamente del sistema de referencia general (x,y,z) al natural o local (x,s,η) . En cuanto a *cinemática* se refiere, la vía más directa para producir una hipótesis fundamental adecuada para la torsión consiste en formular los desplazamientos del problema en ejes generales (x,y,z) :

$$\mathbf{d}^* = u^*\mathbf{i}_1 + \theta_x\mathbf{i}_1 \times \mathbf{r}$$

En esta ecuación $\theta_x(x)$ corresponde a la rotación de eje Cx de los puntos materiales de la pieza, cuya posición en sección transversal viene dada por el vector $\mathbf{r}(y,z)$, mientras que $u^*(x,y,z)$ define el alabeo de la sección, que expresaremos como $\hat{\omega}(y,z)\varphi(x)$. La función $\varphi(x)$ mide la intensidad de alabeo en la sección x , mientras que $\hat{\omega}(y,z)$ es el patrón de alabeo o *alabeo unitario de torsión*

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Formulación unificada de la torsión.** Con las definiciones anteriores y denominando $v^*(x,y,z)$ y $w^*(x,y,z)$ a los desplazamientos contenidos en la sección transversal, es sencillo deducir la siguiente **hipótesis fundamental** de la torsión:

$$\mathbf{d}^*(x,y,z) = \mathbf{h}(y,z) \cdot \mathbf{u}(x)$$

$$\begin{Bmatrix} u^*(x,y,z) \\ v^*(x,y,z) \\ w^*(x,y,z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega}(y,z) \\ -z & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x(x) \\ \varphi(x) \end{Bmatrix}$$

■ **Esfuerzos generalizados.** La definición estática de los esfuerzos generalizados $\mathbf{f}(x)$ proporciona en este caso las componentes siguientes:

$$\mathbf{f}(x) = \int_A \mathbf{h}^T(y,z) \cdot \mathbf{t}^*(x,y,z) dA = \begin{Bmatrix} M_x(x) \\ B_{\hat{\omega}}(x) \end{Bmatrix}$$

que corresponden al **momento torsor** y al **bimomento de torsión** respectivamente, con

$$M_x(x) = \int_A (y\tau_{xz}^* - z\tau_{xy}^*) dA \quad , \quad B_{\hat{\omega}}(x) = \int_A \hat{\omega}\sigma_x^* dA$$

Conviene recordar que las coordenadas (y,z) están referidas al polo C , centro de esfuerzos cortantes de la sección transversal

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Cargas generalizadas.** En cuanto a las cargas generalizadas $\mathbf{Q}(x)$, como las fuerzas de volumen tampoco van a inducir acción torsora por ser la sección simétrica, únicamente debemos computar el efecto de las fuerzas de contorno:

$$\mathbf{Q}(x) = \int_A \mathbf{h}^T(y, z) \cdot \bar{\mathbf{q}}(x, y, z) dA = \begin{Bmatrix} m_x(x) \\ b_{\hat{\phi}}(x) \end{Bmatrix}$$

con las densidades lineales de *momentos torsores* y *bimomentos*

$$m_x(x) = \int_A (y \bar{q}_z - z \bar{q}_y) dA \quad , \quad b_{\hat{\phi}}(x) = \int_A \hat{\omega} \bar{q}_x dA$$

■ **Matrices de deformación.** Si las deformaciones de la viga son $\varepsilon_x^*(x, y, z)$, $\gamma_{xy}^*(x, y, z)$ y $\gamma_{xz}^*(x, y, z)$ tendremos:

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = \hat{\omega} \phi'$$

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial u^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial x} = \hat{\omega}_{,y} \phi - z \theta'_x \quad , \quad \gamma_{xz}^* = \frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} = \hat{\omega}_{,z} \phi + y \theta'_x$$

luego

$$\mathbf{e}^* = \mathbf{B}_0(y, z) \cdot \mathbf{u}(x) + \mathbf{B}_1(y, z) \cdot \mathbf{u}'(x)$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x^* \\ \gamma_{xy}^* \\ \gamma_{xz}^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_{,y} \\ 0 & \hat{\omega}_{,z} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x(x) \\ \phi(x) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega} \\ -y & 0 \\ z & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta'_x(x) \\ \phi'(x) \end{Bmatrix}$$

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

Esta estructura de las deformaciones permite evaluar los operadores *rigideces locales* \mathbf{D}_{rs} , submatrices de la forma cuadrática densidad lineal de energía de deformación:

$$\mathbf{D}_{rs} = \int_A \mathbf{B}_r^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B}_s dA$$

obteniendo

$$\mathbf{D}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & GW_C \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -GW_C & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} GI_C & 0 \\ 0 & EI_{\hat{\omega}} \end{bmatrix}$$

con las constantes

$$W_C = \int_A [(\hat{\omega}_{,y})^2 + (\hat{\omega}_{,z})^2] dA = \int_A (z\hat{\omega}_{,y} - y\hat{\omega}_{,z}) dA$$

$$I_C = \int_A (y^2 + z^2) dA, \quad I_{\hat{\omega}} = \int_A \hat{\omega}^2 dA$$

Las dos últimas coinciden con el ***momento de inercia polar*** (respecto a C) y el ***módulo de alabeo*** de la sección, demostrándose para la primera, que denominaremos ***módulo de bicortante***, que $W_C = I_C - J$, siendo J el ***módulo de torsión***. Esta última propiedad permite expresar el momento de inercia polar y el módulo de cortante en función del módulo de torsión con tal de introducir la constante adimensional κ siguiente:

$$\kappa = \frac{W_C}{I_C} = 1 - \frac{J}{I_C} \quad I_C = \frac{J}{1 - \kappa} \quad W_C = \frac{\kappa J}{1 - \kappa}$$

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Relaciones energéticas.** La matriz que define la forma cuadrática densidad lineal de energía de deformación del problema de torsión es:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GW_c & -GW_c & 0 \\ 0 & -GW_c & GI_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_{\hat{o}} \end{bmatrix}$$

luego

$$L(x, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = \frac{1}{2} \left[GW_c (\theta'_x - \varphi)^2 + GJ (\theta'^2_x) + EI_{\hat{o}} (\varphi')^2 \right] - (\theta'_x m_x + \varphi b_{\hat{o}})$$

en virtud de las propiedades de la constante W_c citadas anteriormente. Nuevamente, la definición energética de los esfuerzos nos proporciona de forma directa relaciones constitutivas para el momento torsor y el bimomento:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}'} = \mathbf{D}_{10} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}'$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ B_{\hat{o}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -GW_c \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \varphi \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} GI_c & 0 \\ 0 & EI_{\hat{o}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta'_x \\ \varphi' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} GW_c (\theta'_x - \varphi) + GJ \theta'_x \\ EI_{\hat{o}} \varphi' \end{Bmatrix}$$

La primera de ellas muestra como el torsor se descompone en dos fracciones, siendo la segunda la prevista por la torsión pura

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Ecuaciones de la teoría de torsión.** Las ecuaciones diferenciales que rigen el problema ya pueden escribirse en forma canónica:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{E}(x) = \mathbf{W} \mathbf{E}(x) - \mathbf{F}(x)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}'(x) \\ \mathbf{f}'(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{f}(x) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(x) \end{Bmatrix}$$

En componentes y expresando W_c e I_c en función de κ y J :

$$\begin{Bmatrix} \theta'_x \\ \varphi' \\ M'_x \\ B'_{\hat{\omega}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & \frac{1-\kappa}{GJ} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_{\hat{\omega}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \kappa GJ & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \varphi \\ M_x \\ B_{\hat{\omega}} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ m_x \\ b_{\hat{\omega}} \end{Bmatrix}$$

La ecuación característica y los autovalores de \mathbf{W} son ahora:

$$|\mathbf{W} - K\mathbf{I}| = K^2 \left(K^2 - \frac{\kappa GJ}{EI_{\hat{\omega}}} \right)$$

$$K = 0 \quad , \quad K = \pm \sqrt{\frac{\kappa GJ}{EI_{\hat{\omega}}}}$$

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

CASO I: vigas de baja rigidez a torsión ($GJ=0$)

Esta situación es propia de las vigas metálicas o mixtas de **sección abierta**, para las cuales el módulo de torsión J varía con el cubo del espesor de pared, resultando despreciable frente al módulo de alabeo I_ω . En estas condiciones, el único autovalor del sistema es $K=0$ con orden de multiplicidad 4, resultando un problema análogo al de flexión: los correspondientes operadores \mathbf{W} coinciden si se sustituye la rigidez a cortante GA por GW_C y la rigidez a flexión EI_z por la rigidez al alabeo EI_ω , por lo que desplazamientos y esfuerzos generalizados cumplen la siguiente homología:

	componentes de $\mathbf{E}(\xi)$				cargas $\mathbf{Q}(\xi)$		rigideces	
Torsión*	θ_x	φ	M_x	B_ω	m_x	b_ω	GW_C	EI_ω
Flexión	v	θ_z	Q_y	M_z	q_y	m_z	GA	EI_z

(*) este tipo de torsión se denomina alabeada pura

Esta analogía permite generar soluciones $\mathbf{E}(\xi)$ para condiciones de contorno y carga muy variadas, sin más que recurrir a los prontuarios de cálculo de estructuras. También conviene indicar que el problema de flexión asociado es el de Timoshenko (con deformación por cortante). Del mismo modo, la torsión alabeada pura sin deformación por cortante se asimilaría a la flexión de Navier, cumpliéndose entonces $\varphi = \theta_x'$

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

CASO II: vigas sin deformación por bicortante ($GW_c \rightarrow \infty$)

Aunque esta situación no afecta al valor de los autovalores no nulos, una simple inspección del funcional de acción muestra que entonces la intensidad de alabeo φ ha de ser igual al giro unitario de torsión θ'_x , propiedad que resulta común a la torsión alabeada pura y a la torsión de Saint-Venant, o torsión pura, y que además exige imponer $\kappa=1$ en el sistema EDO.

CASO III: caso general

La rigidez a bicortante adopta un valor finito, por lo que el momento torsor puede expresarse como:

$$M_x = GW_c(\theta'_x - \varphi) + GJ\theta'_x$$

Si ahora eliminamos la intensidad de alabeo entre la primera y la cuarta ecuación del sistema EDO, resulta:

$$GJ\theta'_x - B'_{\omega} = M_x + b_{\omega}$$

Pongamos entonces:

$$M_{\omega} = GW_c(\theta'_x - \varphi) = -(B'_{\omega} + b_{\omega})$$

Este pseudo-esfuerzo, que denominaremos **bicortante**, resulta ser complementario del producido por la torsión pura, igual a $GJ\theta'_x$, y se debe exclusivamente a las tensiones normales σ_x^* al definirse como derivada del bimomento. Tendremos por lo tanto:

$$M_x = GJ\theta'_x + M_{\omega}$$

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

La solución general del problema puede nuevamente darse en la forma:

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{G}(\xi) \cdot \mathbf{E}_0 - \int_{\tau=0}^{\xi} \mathbf{G}(\xi - \tau) \cdot \mathbf{F}(\tau) L d\tau$$

donde $\mathbf{G}(\xi)$ es el operador fundamental del sistema y $\xi=x/L$, $\tau=t/L$ son valores adimensionales de la coordenada longitudinal. En componentes resulta:

$$\mathbf{G}(\xi) = \begin{bmatrix} 1 & \kappa L \frac{sh\lambda\xi}{\lambda} & \frac{L}{GJ} \frac{\lambda\xi - \kappa sh\lambda\xi}{\lambda} & \frac{ch\lambda\xi - 1}{GJ} \\ 0 & ch\lambda\xi & \frac{1 - ch\lambda\xi}{GJ} & \frac{\lambda sh\lambda\xi}{\kappa GJ L} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \kappa GJ L \frac{sh\lambda\xi}{\lambda} & -\kappa L \frac{sh\lambda\xi}{\lambda} & ch\lambda\xi \end{bmatrix}$$

λ es la esbeltez de torsión de la viga definida anteriormente, de valor:

$$\lambda = L \sqrt{\kappa \frac{GJ}{EI_{\phi}}} \quad , \quad \kappa = 1 - \frac{J}{I_c}$$

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

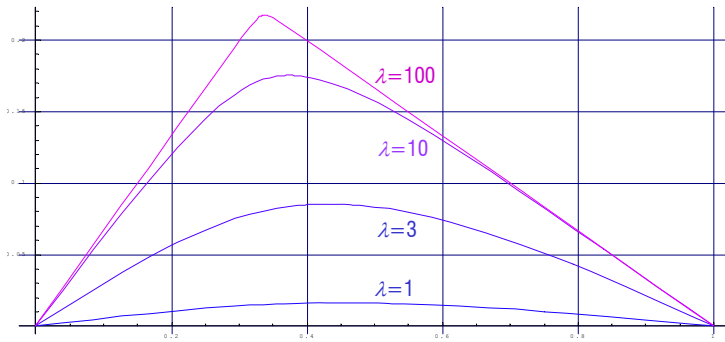
▪ **El problema elemental:** a modo de ejemplo, vamos a aplicar los resultados anteriores a un tablero *simplemente apoyado* sometido a una acción torsora concentrada T en la sección $x=t$. Por simplemente apoyado, entenderemos que las rotaciones de las secciones extremas están perfectamente coaccionadas ($\theta_x|_{\xi=0,1}=0$) y sus alabeos son libres ($B_\omega|_{\xi=0,1}=0$). La correspondiente determinación de las constantes de integración E_0 permite entonces definir completamente la solución. Esta queda recogida en la tabla adjunta para $\xi < \tau$. Sobre el resto del intervalo ($\xi > \tau$), basta intercambiar ξ y τ con $(1-\xi)$ y $(1-\tau)$ respectivamente, y cambiar el signo de las fórmulas resultantes para el alabeo y el momento torsor

$E(\xi)$	$\xi < \tau$
$\theta_x(\xi)$	$\frac{TL}{GJ} \left[(1-\tau)\xi - \kappa \frac{sh\lambda(1-\tau)}{\lambda sh\lambda} sh\lambda\xi \right]$
$\phi(\xi)$	$\frac{T}{GJ} \left[1-\tau - \frac{sh\lambda(1-\tau)}{sh\lambda} ch\lambda\xi \right]$
$M_x(\xi)$	$(1-\tau)T$
$B_\omega(\xi)$	$-\kappa TL \frac{sh\lambda(1-\tau)}{\lambda sh\lambda} sh\lambda\xi$

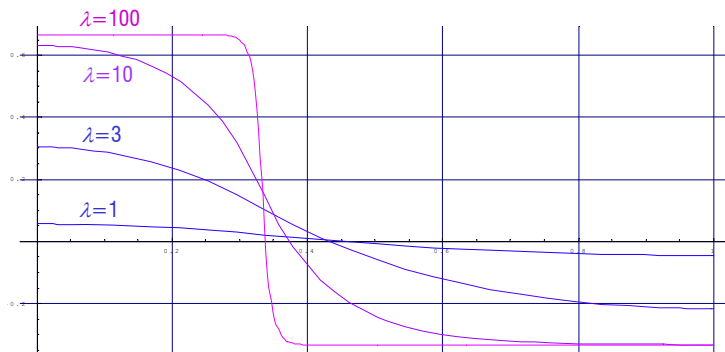
<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

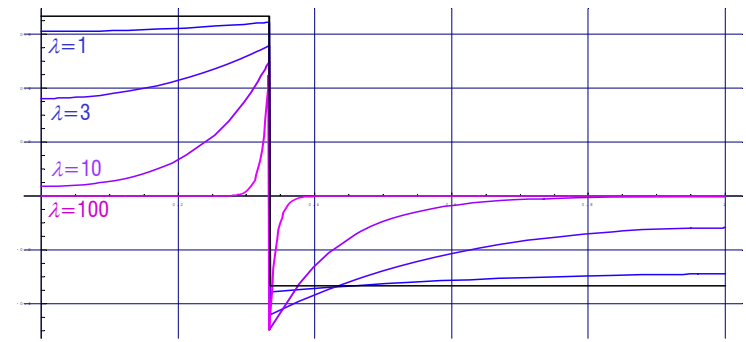
01 El modelo viga en el análisis de tableros



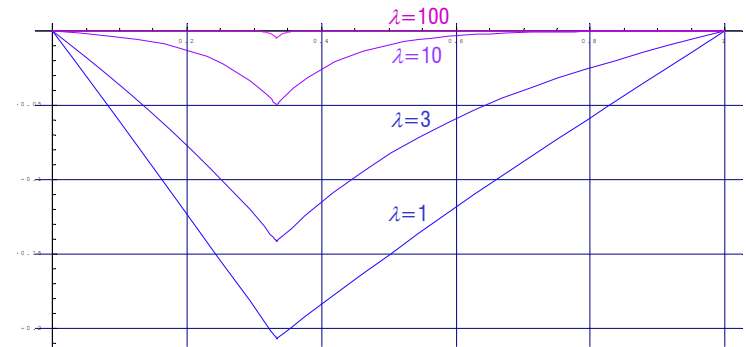
Rotación $\theta_x(\xi)$ para torsor puntual T ($\tau=1/3$). Factor $\frac{TL}{GJ}$



Intensidad de alabeo $\varphi(\xi)$ para torsor puntual T ($\tau=1/3$). Factor $\frac{T}{GJ}$



Bicortante $M_\omega(\xi)$ para torsor puntual T ($\tau=1/3$). Factor T



Bimomento $B_\omega(\xi)$ para torsor puntual T ($\tau=1/3$). Factor TL

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

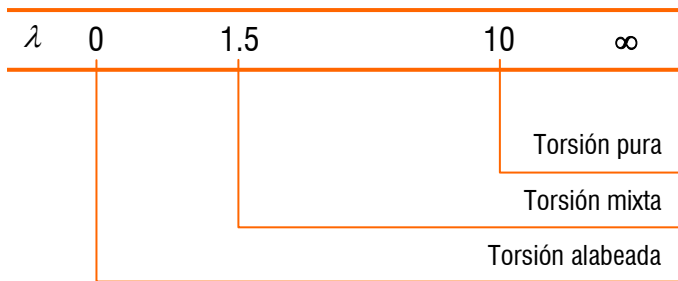
<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

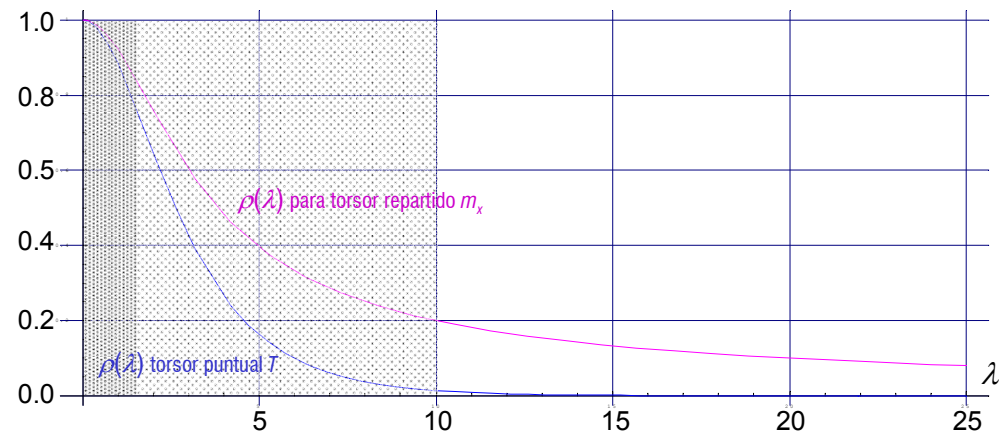
▪ **Clasificación de la torsión.** Del ejemplo anterior y otros similares, se deduce que para *pequeños valores de la esbeltez torsional* λ , la carga exterior es resistida principalmente por **torsión alabeada**, pero **al crecer** λ , la **torsión de Saint-Venant** va cobrando más importancia, hasta convertirse en el mecanismo resistente principal. En base a esta importante propiedad, puede establecerse una **clasificación** de los tableros rectos simplemente apoyados, con el fin de orientar eficazmente su posterior modelado estructural. Para ello, conviene evaluar la **densidad** de bicortante $\rho(\lambda)$ en una sección característica de la viga $x=\alpha L$ (*secciones en las cuales* $B_\omega=0$), definida esta como:

$$\rho(\lambda) = \left[\frac{M_\phi(\lambda)}{M_x} \right]_{\xi=\alpha}$$

Para los casos de torsor concentrado en $x=L/2$ y torsor repartido



(B) Dominios de la torsión (pieza simplemente apoyada, $\alpha=0,1$)



<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Influencia de las condiciones de contorno.** En el problema elemental nos hemos limitado nuevamente a resolver el caso de la viga simplemente apoyada, pero el tratamiento de otras condiciones de carga y de contorno no ofrece ninguna dificultad y proporciona conclusiones idénticas al problema de distorsión: a **menor coacción** al alabeo **mayor disipación del bimomento**, o lo que es lo mismo, **mayor esbeltez aparente de la pieza λ^*** . Esta propiedad puede definirse como sigue “La **esbeltez aparente de torsión de una viga de longitud L** será la que corresponde a una pieza con la misma sección transversal en condiciones de simple apoyo y con misma **densidad de bicortante**”. Además, como esbeltez y longitud son proporcionales, esta definición equivale a asociar una **luz efectiva** a las condiciones básicas (*simple apoyo*), por lo tanto tendremos finalmente:

$$\lambda^* = \beta L \sqrt{\kappa \frac{GJ}{EI_{\phi}}}$$

El término $\beta L = L_{ef}$ se presenta como una longitud o **luz efectiva**, equivalente a la longitud de la viga simplemente apoyada con idéntica disipación de bicortante que el tablero en estudio (*misma densidad ρ*) y se puede definir como la **distancia entre secciones de bimomento nulo**

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■Conclusiones respecto a la torsión

(1) **Esbeltez de torsión, alabeo y disipación de las tensiones longitudinales.** Los resultados obtenidos muestran como las tensiones longitudinales σ_x^* debidas a la torsión, derivadas de las condiciones reales de sollicitación y de las condiciones de contorno, se atenúan a medida que la **esbeltez aparente** de la viga λ_T^* aumenta, cancelándose prácticamente para esbelteces iguales o superiores a 10

(2) **Aplicación al ámbito general del modelo viga.** Aunque al enunciar el **ámbito general del modelo viga** no se mencionó la torsión, para aplicar adecuadamente el modelo viga es necesario seleccionar correctamente el dominio que corresponde al tablero en estudio y para ello, la esbeltez aparente de torsión λ_T^* es el parámetro determinante

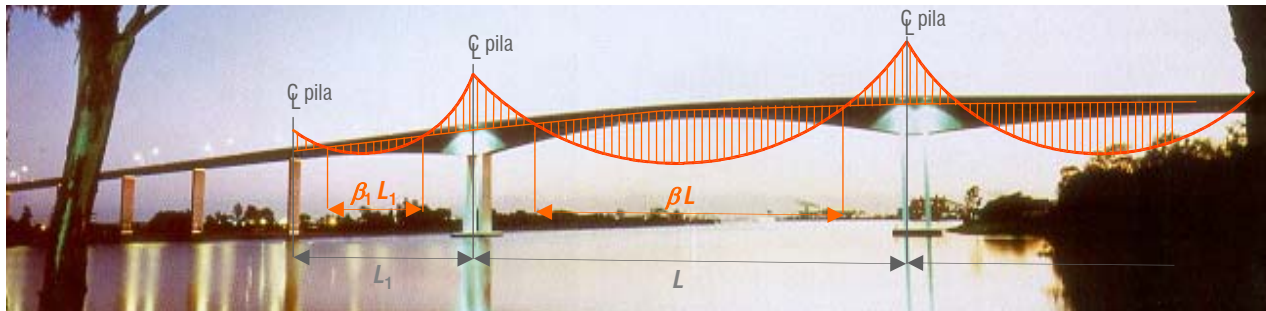
(3) **Norma general.** Como norma general, podemos afirmar que lo **tableros celulares**, de hormigón, metálicos o mixtos, **desarrollan torsión pura** (libre de tensiones longitudinales σ_x^*) mientras que los **tableros de sección transversal abierta**, metálicos o mixtos y en general de doble viga, se hallan en el extremo opuesto, siendo **necesario computar las tensiones σ_x^*** con un modelo de torsión mixta ($\lambda_T^* \in]1.5, 10[$) o alabeada pura ($\lambda_T^* \leq 1.5$)

<1.1.5 CUANTIFICACIÓN DE LA TORSIÓN>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Definición de la luz de vano efectiva en tableros de puentes.** Para cada vano de un tablero continuo, será la *longitud del mismo sometida a flexión positiva bajo la acción de las cargas permanentes* (~ distancia entre secciones de momento flector nulo en cada vano). Intuitivamente, estamos buscando longitudes de tablero en **condiciones estáticas análogas** a las adoptadas para los problemas de arrastre de cortante y distorsión, pero este concepto puede establecerse de forma rigurosa a partir de las analogías existentes entre las distintas respuestas básicas de las vigas (~ longitud de pandeo...)



▪ **A modo de ejemplo.** Supongamos un tablero de tres vanos con sección constante, para este caso se tiene $\beta = \sqrt{1 - 2\Phi}$ y $\beta_1 = 1 - \frac{\Phi}{2\alpha^2}$ con $\Phi = \frac{1 + \alpha^3}{3 + 2\alpha}$

$\alpha = L_1/L$	1	0.9	0.8	0.7	0.5
β	0.4472	0.5288	0.5853	0.6241	0.6614
β_1	0.8000	0.7776	0.7432	0.6885	0.4375

<1.1.6 DEFINICIÓN DE LA LUZ EFECTIVA>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ Esbelteces aparentes

(1) geométrica en planta	$\lambda_p^* = \frac{L_{ef}}{b_f}$	si $\lambda_p^* \geq 6$ el <i>modelo viga</i> es aplicable
(2) de distorsión	$\lambda_D^* = L_{ef} \sqrt[4]{\frac{EI_b}{4EI_D}}$	si $\lambda_D^* \geq 6$ la distorsión es despreciable, de lo contrario deben disponerse diafragmas transversales
(3) de torsión	$\lambda_T^* = L_{ef} \sqrt{\kappa \frac{GJ}{EI_\omega}}$	si $\lambda_T^* \leq 1.5$ domina la torsión alabeada, mientras que si $\lambda_T^* \geq 10$ se desarrolla torsión pura. El intervalo restante corresponde a torsión mixta

■ **Cálculo local.** El modelo viga es *incapaz de captar* la **flexión local de la losa superior** bajo el efecto de las cargas de tráfico, en particular de los vehículos pesados (este fenómeno es distinto **de** y adicional **a** la flexión transversal del *marco* por distorsión). Por lo tanto requiere una evaluación específica con herramientas ad hoc

<1.1.7 RESUMEN OPERATIVO>

<1.1 LIMITACIONES DEL MODELO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **La materialización del modelo.** Requiere dar respuesta a las cuestiones siguientes:

(1) **Selección y subdivisión de la directriz.** Escoger la directriz no es una cuestión obvia, por lo que volveremos sobre este punto más adelante. La subdivisión de este dominio 1D, inherente al *MEF*, responde a una serie de factores que conviene revisar, como son las **conexiones** a las subestructuras, la **variación de la geometría** de las secciones (*pensamos habitualmente en el canto, pero los espesores también se ajustan, tanto en las almas, por cortante y torsión, como en la losa inferior, por flexión negativa sobre apoyos*), la **fisuración** y la propia **estrategia de comprobación** de los EL

(2) **Características mecánicas de las secciones.** Deben determinarse en planos ortogonales a la directriz, y por lo tanto dependen directamente de la selección de esta última. Si por esta misma selección, los momentos estáticos no se cancelan, aparece una posible limitación debida al propio software (ANSYS si permite trabajar con S_y y S_z)

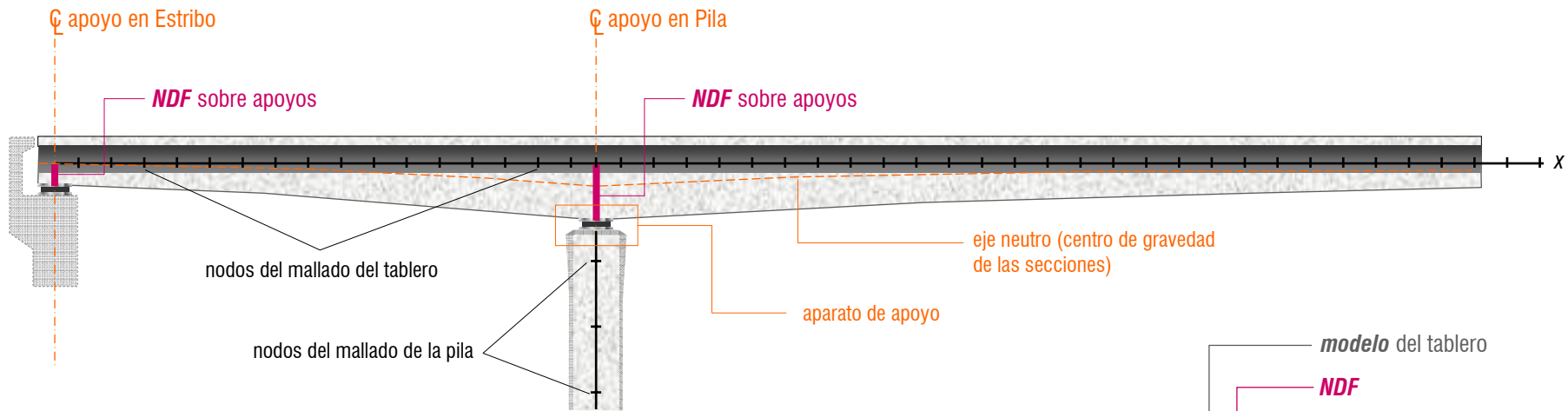
(3) **Posibilidad de un modelo para el tablero que integre todas las respuestas.** Aunque la flexión del tablero es la respuesta que domina su diseño estructural, la incorporación de los efectos de las **acciones asimétricas** (torsión y distorsión) puede requerir un cálculo complementario si el software principal no permite su cómputo. Así mismo el análisis de la **flexión local** de la losa superior solo podría integrarse planteando un modelo híbrido, que de alguna manera desvirtuaría el concepto tradicional de viga

(4) **La estructura puente.** Además del tablero, también deberemos incluir en el modelo los restantes elementos estructurales del puente, esto es: los aparatos de apoyo y las subestructuras, debiendo también valorar si las características geotécnicas del suelo requieren su incorporación

<1.2.1 TOPOLOGÍA DEL MODELO: barras, nodos y enlaces>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

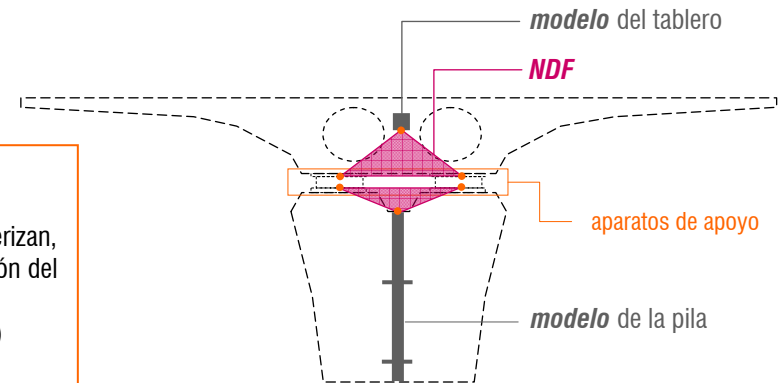
01 El modelo viga en el análisis de tableros



•Selección de la directriz. Se plantean las siguientes alternativas

- (1) directriz recta y cómputo de la excentricidad del CDG (las secciones se caracterizan, además, mediante los momentos estáticos S_y y S_z). Tendremos esta opción en función del **software** disponible
- (2) directriz ajustada al eje neutro (las secciones se caracterizan en planos verticales)
- (3) directriz recta y no se computa la excentricidad del CDG

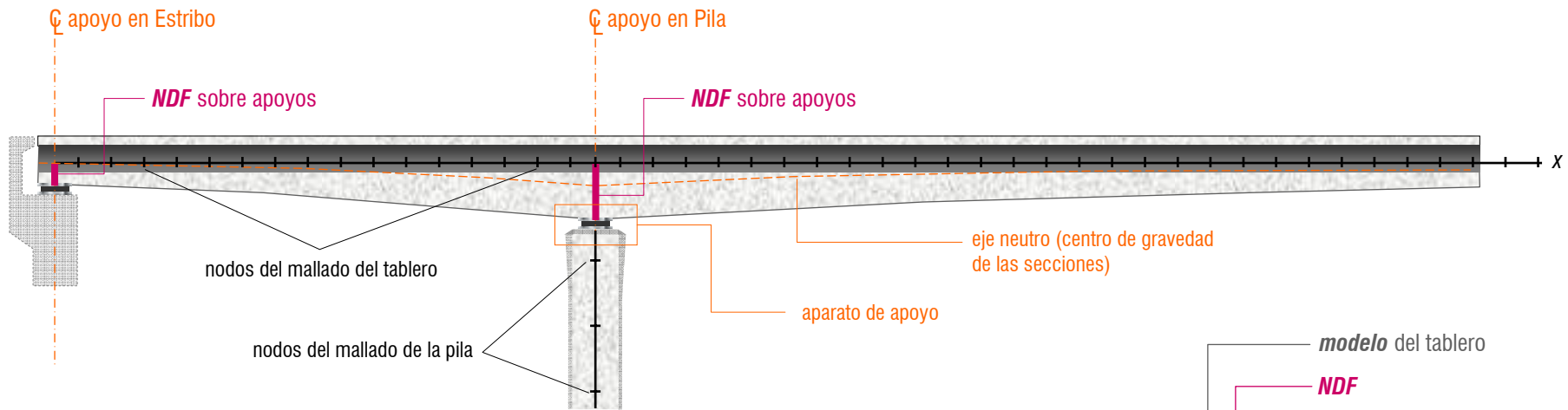
ordenadas atendiendo a la **exactitud** del modelo. Las dos primeras reproducen el acoplamiento $N-M$



<1.2.1 TOPOLOGÍA DEL MODELO: barras, nodos y enlaces>

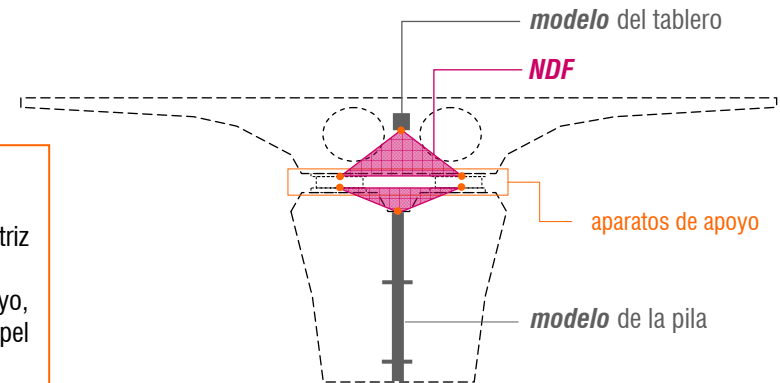
<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros



•La estructura Puente. Requiere tomar las siguientes medidas

- (1) Nudos de Dimensión Finita para captar correctamente la excentricidad de la directriz respecto a los puntos de apoyo del tablero
- (2) Cómputo exacto de las características mecánicas de los aparatos de apoyo, especialmente en el caso de apoyos de neopreno zunchado (vuelve a tener un papel determinante el tipo de **software** disponible)
- (3) Modelado de las subestructuras (al menos de las pilas)

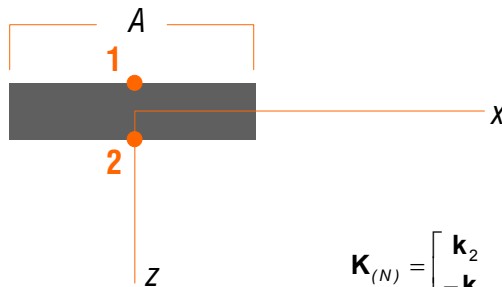


<1.2.1 TOPOLOGÍA DEL MODELO: barras, nodos y enlaces>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Caso particular de los aparatos de apoyo de neopreno zunchado.** La rigidez de este tipo de apoyo puede representarse mediante la matriz $\mathbf{K}_{(N)}$ que relaciona los desplazamientos de los nudos **1** y **2** con las fuerzas consistentes aplicadas en los mismos (este tipo de *conexión elástica* o *link* está en general disponible en los códigos de **EF**) :



$$\mathbf{K}_{(N)} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_2 & -\mathbf{k}_2 \\ -\mathbf{k}_2 & \mathbf{k}_2 \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{k}_2]^{-1} = \mathbf{f}_H \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{u}_i = \{u \ v \ w \ \theta_x \ \theta_y \ \theta_z\}^T, \quad \mathbf{f}_i = \{F_x \ F_y \ F_z \ M_x \ M_y \ M_z\}^T$$

$$\varepsilon_z = (1 - s_0) K_1 (e_1/A)^2$$

$$\omega_x = K_2 (e_1/B^2)^2, \quad \omega_y = K_2 (e_1/A^2)^2, \quad \omega_z = K_3 (e_1/A^2)^2$$

$$\mathbf{f}_H = \frac{\mathbf{e}_N}{G_\infty AB}, \quad s_0 = \frac{\sigma_0}{\sigma} \quad (\sigma_0 = 3 \text{ MPa}, \quad \bar{\sigma} = Q_z / AB)$$

B/A	1	1.2	1.25	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2	2.5	10	∞
K_1	2.37	2.01	1.94	1.88	1.78	1.70	1.64	1.58	1.53	1.49	1.46	1.34	1.07	1.00
K_2	86.2	80.4	79.3	78.4	76.7	75.3	74.1	73.1	72.2	71.5	70.8	68.3	61.9	60
K_3	0.141	0.165	0.171	0.177	0.187	0.196	0.204	0.211	0.218	0.224	0.229	0.250	0.312	0.333

<1.2.1 TOPOLOGÍA DEL MODELO: barras, nodos y enlaces>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

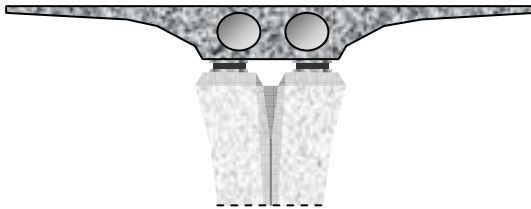
■ **Constantes estáticas de las secciones.** Para el cálculo de los parámetros mecánicos del modelo, distinguiremos tres tipos de tablero, de acuerdo con lo expuesto al principio de este capítulo:

(1) *losas aligeradas de ala ancha*

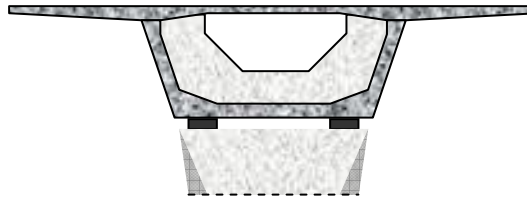
(2) *tableros en cajón*

(3) *tableros de sección abierta, en general de doble-viga metálicos o mixtos*

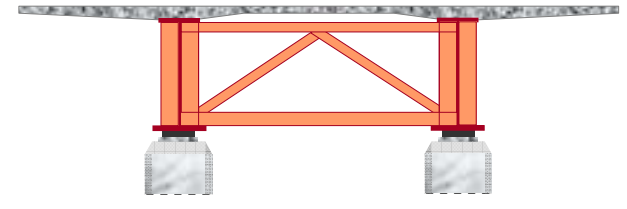
Para cada uno de ellos, propondremos fórmulas para el caso general (*polos de flexión y torsión, constantes estáticas de la flexión incluyendo el ancho efectivo de los voladizos laterales, distorsión y torsión*) que aplicaremos a la sección en cajón unicelular de hormigón indicando los patrones de alabeos unitarios de distorsión y torsión, así como a la sección doble-viga metálica o mixta



(1) *Losa aligerada de ala ancha*



(2) *Tablero en cajón unicelular de hormigón*



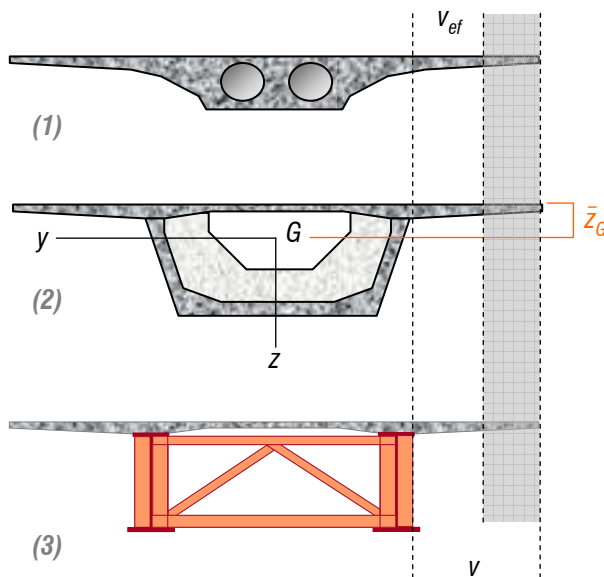
(3) *Tablero doble-viga mixto*

<1.2.2 PARÁMETROS MECÁNICOS DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Constantes estáticas de flexión.** Para los tres tipos de tablero seleccionados, propondremos fórmulas para el caso general (*polo de flexión y constantes estáticas de la flexión incluyendo el ancho efectivo de los voladizos laterales*)



(a) **Ancho efectivo de los voladizos laterales:** $v_{ef} = \min \left\{ v, \frac{L_{ef}}{12} \right\}$

(b) **Centro de gravedad y momentos de inercia.** A partir de los momentos estáticos de la sección tendremos:

$$\begin{aligned}\bar{S}_y &= \int_A \bar{z} dA, & \bar{S}_z &= \int_A \bar{y} dA \\ \bar{y}_G &= \frac{\bar{S}_z}{A}, & \bar{z}_G &= \frac{\bar{S}_y}{A} \\ I_y &= \int_A z^2 dA, & I_{yz} &= \int_A yz dA, & I_z &= \int_A y^2 dA\end{aligned}$$

(c) **Factor de cortante** (en el plano horizontal, para b_y y \tilde{S}_z ver más adelante):

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{A}{I_z^2} \int_A \left(\frac{\tilde{S}_z}{b_y} \right)^2 dA$$

NOTA: para las secciones representadas $y_G=0$ e $I_{yz}=0$

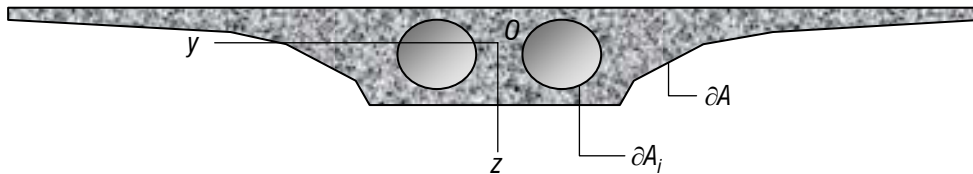
<1.2.2.a Parámetros de flexión>

<1.2.2 PARÁMETROS MECÁNICOS DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪Losa aligerada de ala ancha. Parámetros de la torsión, formulación *exacta*



(a) **Determinación del alabeo unitario.** Se resuelve el problema de Neumann (*Mathsoft*) referido al origen:

$$\frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \hat{w}_0}{\partial z^2} = 0 \quad \forall (y, z) \in A$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \nabla \hat{w}_0 \cdot \bar{n} \quad \forall (\bar{y}, \bar{z}) \in \partial A$$

$$-\frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\bar{y}^2 + \bar{z}^2) = \nabla \hat{w}_0 \cdot \bar{n} \quad \forall (\bar{y}, \bar{z}) \in \partial A_i$$

(b) **Determinación del centro de esfuerzos cortantes.** Se resuelve a partir de los momentos estáticos del alabeo unitario:

$$I_{y\hat{w}_0} = \int_A z \hat{w}_0 dA, \quad I_{z\hat{w}_0} = \int_A y \hat{w}_0 dA$$

$$y_C = -\frac{I_z I_{y\hat{w}_0} - I_{yz} I_{z\hat{w}_0}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad z_C = \frac{I_y I_{z\hat{w}_0} - I_{yz} I_{y\hat{w}_0}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

(c) **Alabeo unitario y módulo de alabeo** referidos al polo de torsión:

$$\hat{w} = \hat{w}_0 + y_C z - z_C y, \quad I_{\hat{w}} = \int_A \hat{w}^2 dA$$

(d) **Determinación del módulo de torsión:** $J = I_C - W_C \equiv I_0 - W_0$

$$I_C = \int_A (\hat{y}^2 + \hat{z}^2) dA, \quad W_C = \int_A (\nabla \hat{w})^2 dA$$

$$= I_0 + (y_C^2 + z_C^2) A, \quad = W_0 + (y_C^2 + z_C^2) A$$

(y_C, z_C) son las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes **C**

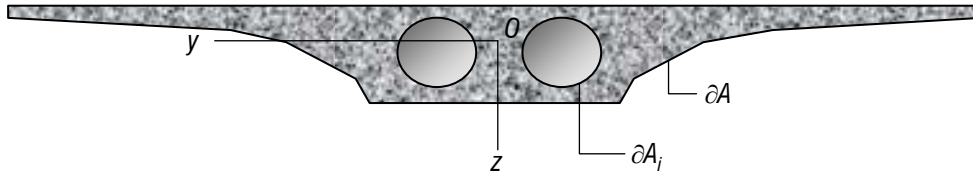
<1.2.2.b Parámetros de torsión>

<1.2.2 PARÁMETROS MECÁNICOS DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Losa aligerada de ala ancha.** *Parámetros de la torsión, formulación **alternativa**.* Por la **esbeltez torsional** correspondiente a este tipo de tableros, estaremos en el **dominio de la torsión pura** y podremos prescindir del alabeo en nuestros cálculos



(a) Determinación del módulo de torsión. Se resuelve mediante la analogía de la membrana de Prandtl, integrando la ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet (Φ *C^{ste}* sobre los contornos) y calculando el volumen encerrado por la membrana, huecos incluidos:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta'_x \quad \forall (y, z) \in A$$

$$J = \frac{2V}{G\theta'_x} \quad , \quad V = \int_A \Phi dA + \sum_{i=1}^n \Phi_i A_i$$

(b) Determinación aproximada del módulo de torsión (la fórmula de Saint-Venant)

$$J = \frac{A^4}{40I_0}$$

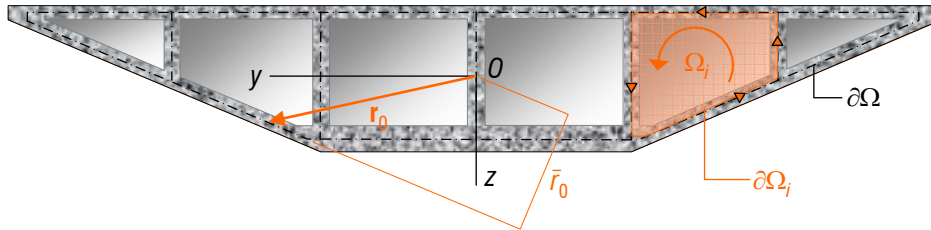
<1.2.2.b Parámetros de torsión>

<1.2.2 PARÁMETROS MECÁNICOS DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Tablero en cajón multicelular.** Parámetros de la **torsión**, formulación **exacta** (alabeo uniforme sobre el espesor de pared)



(a) **Determinación del módulo de torsión.** Sea Ω_i el área de la celda (i), de contorno $\partial\Omega_i$ y Ω el vector que las agrupa. Denominaremos Γ_{ij} al segmento de fibra media del alma que separa las celdas (i) y (j)

$$\alpha_{ij} = \int_{\partial\Omega_i} \frac{ds}{e} \quad , \quad \alpha_{ij} = \int_{\Gamma_{ij}} \frac{ds}{e}$$

$$J = 4\Omega^T \mathbf{A}^{-1} \Omega \quad , \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & -\alpha_{12} & 0 & 0 & \dots \\ -\alpha_{12} & \alpha_{22} & -\alpha_{23} & 0 & \dots \\ 0 & -\alpha_{23} & \alpha_{33} & -\alpha_{34} & \dots \\ . & . & . & . & \dots \end{bmatrix}$$

(b) **Determinación del alabeo unitario.** Sea (m) un segmento de la fibra media de la sección transversal:

$$\hat{w}_s = \hat{w}_{s0} + y_c z - z_c y$$

$$\hat{w}_{s0} = \varpi - \omega_{s0(m)} + \rho_{(m)} \alpha_{s(m)}$$

$$\omega_{s0(m)} = \int_0^s \bar{r}_0 ds \quad , \quad \alpha_{s(m)} = \int_0^s \frac{ds}{e}$$

$$\rho = \{\rho_{(i)}\} = 2\mathbf{A}^{-1}\Omega$$

$$\varpi = \frac{\int_{\partial\Omega \cup \Gamma} [\omega_{s0(m)} - \rho_{(m)} \alpha_{s(m)}] eds}{\int_{\partial\Omega \cup \Gamma} eds}$$

Contorno exterior: $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega$

almas interiores: $\Gamma_{ij} = \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$

$\rho_{(m)} = \rho_{(i)}$

$\rho_{(m)} = \rho_{(i)} - \rho_{(j)}$

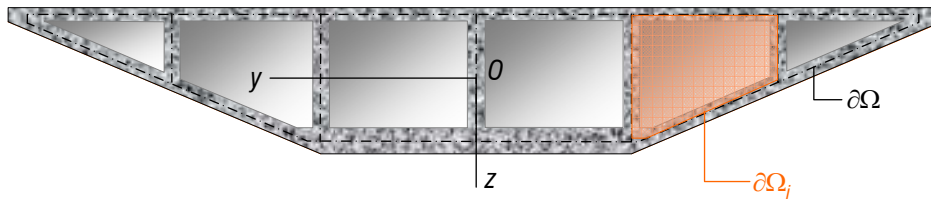
<1.2.2.b Parámetros de torsión>

<1.2.2 PARÁMETROS MECÁNICOS DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ Tablero en cajón multicelular. Parámetros de la **torsión**, formulación **exacta** (continuación)



(c) **Determinación del centro de esfuerzos cortantes**. Se resuelve nuevamente a partir de los momentos estáticos del alabeo unitario:

$$I_{y\hat{\omega}_{s0}} = \int_{\partial\Omega \cup \Gamma} z \hat{\omega}_{s0} eds, \quad I_{z\hat{\omega}_{s0}} = \int_{\partial\Omega \cup \Gamma} y \hat{\omega}_{s0} eds$$

$$y_C = -\frac{I_z I_{y\hat{\omega}_{s0}} - I_{yz} I_{z\hat{\omega}_{s0}}}{I_y I_z - I_{yz}^2}, \quad z_C = \frac{I_y I_{z\hat{\omega}_{s0}} - I_{yz} I_{y\hat{\omega}_{s0}}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

(d) **Módulo de alabeo**. Se calcula a partir de su definición general:

$$I_{\hat{\omega}} = \int_{\partial\Omega \cup \Gamma} \hat{\omega}_s^2 eds$$

Obteniendo en ejes principales de inercia:

$$I_{\hat{\omega}} = \int_{\partial\Omega \cup \Gamma} \hat{\omega}_{s0}^2 eds - \left(\frac{I_{y\hat{\omega}_{s0}}^2}{I_y} + \frac{I_{z\hat{\omega}_{s0}}^2}{I_z} \right)$$

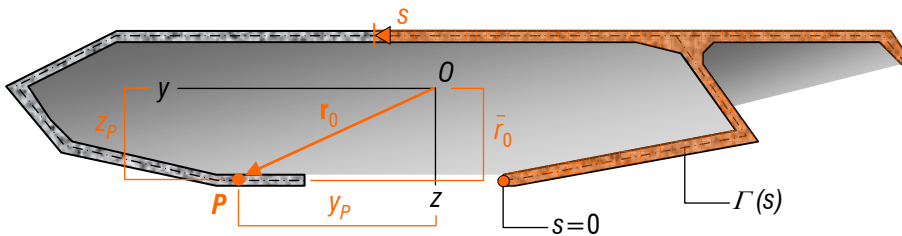
<1.2.2.b Parámetros de torsión>

<1.2.2 PARÁMETROS MECÁNICOS DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Tableros de sección abierta.** *Parámetros de la torsión, formulación exacta.* Veamos el caso general, directamente aplicable a tableros de doble-viga, mixtos o metálicos, suponiendo nuevamente que el alabeo es uniforme sobre el espesor



(a) **Determinación del alabeo unitario.** Se resuelve el problema de Neumann (Mathsoft) referido al origen:

$$\hat{\omega}_s = \hat{\omega}_{s0} + y_c z - z_c y$$

$$\hat{\omega}_{s0} = \varpi - \omega_{s0} \quad , \quad \omega_{s0}(s) = \int_0^s \bar{r}_0 ds$$

$$\varpi = \frac{\int_{\Gamma} \omega_{s0}(s) e(s) ds}{\int_{\Gamma} e(s) ds}$$

(b) **Determinación del centro de esfuerzos cortantes.** Se resuelve a partir de los momentos estáticos del alabeo unitario:

$$I_{y\hat{\omega}_{s0}} = \int_{\Gamma} z \hat{\omega}_{s0} eds \quad , \quad I_{z\hat{\omega}_{s0}} = \int_{\Gamma} y \hat{\omega}_{s0} eds$$

$$y_c = -\frac{I_z I_{y\hat{\omega}_{s0}} - I_{yz} I_{z\hat{\omega}_{s0}}}{I_y I_z - I_{yz}^2} \quad , \quad z_c = \frac{I_y I_{z\hat{\omega}_{s0}} - I_{yz} I_{y\hat{\omega}_{s0}}}{I_y I_z - I_{yz}^2}$$

(c) **Módulo de torsión y módulo de alabeo** referidos al polo de torsión:

$$J = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} e^3 ds \quad , \quad I_{\hat{\omega}} = \int_{\Gamma} \hat{\omega}_s^2 eds$$

(d) **Constante** $\kappa = 1 - J/I_c$

<1.2.2.b Parámetros de torsión>

<1.2.2 PARÁMETROS MECÁNICOS DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■La “**rigidez de las cajas negras**”. En la actualidad, la opción de análisis más socorrida consiste en el empleo de **códigos comerciales de elementos finitos**. Su evolución en las últimas décadas ha sido notable, ofreciendo una creciente adaptación a las necesidades específicas de cada especialidad y limitando, en la práctica, la programación a tareas de **pre y post proceso**. En el marco que nos interesa, esta tendencia tiene un doble efecto:

(1) proporciona herramientas cada vez más adaptadas a la casuística propia del análisis de las estructuras de puentes (*tipologías, simulación de los procesos constructivos, incorporación al cálculo de normativas de acciones y materiales, checking en teoría EL... todo ello con el fin de mejorar el pre y post proceso*)

(2) en general, el **software** funciona como una **caja negra**, en el sentido de que el propio motor de **EF** es opaco. En el otro extremo, tenemos algunos códigos relativamente abiertos (*programables*) como ANSYS o ABAQUS, que pese a ser programas comerciales, permiten la incorporación de otros grados de libertad, como los asociados al alabeo y a la distorsión, o bien definir matrices de rigidez *exactas* para barras curvas, o programar cálculos mediante subestructuras...

■La **situación más usual** es, sin embargo, disponer de un código de **EF** apto para procesar el modelo viga estándar (6 *GDLs*), por lo que el **análisis primario** se ve limitado a la **torsión pura** y además excluye el cómputo de la distorsión. En consecuencia, los tableros continuos, metálicos y mixtos, con **esbelteces aparentes** λ_T^* o λ_D^* **insuficientes** en alguno de sus vanos, requerirán un **cálculo complementario**, con herramientas ad hoc (*programas o aplicaciones específicas*). Para ello, a continuación se proporcionan los elementos necesarios para una evaluación en rigidez de este análisis complementario

<1.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Respuestas elementales y acoplamiento.** Las soluciones de los problemas elementales de extensión, flexión y torsión pura dan lugar a relaciones de rigidez sencillas y conocidas, pero subyace la cuestión del **acoplamiento** entre respuestas, debido a la elección de la **directriz** de la viga:

(1) como es sabido, el desacoplamiento entre extensión y flexión se resuelve adoptando por directriz el lugar geométrico del centro de gravedad de las secciones transversales

(2) en cambio, la torsión tiene un eje natural de referencia distinto, determinado por el centro de esfuerzos cortantes, por lo que ambas respuestas resultan mecánicamente acopladas en el caso general

(3) sin embargo, la posible **simetría** de la sección transversal o la propia **esbeltez torsional** de la viga pueden justificar el **análisis desacoplado**. Por ello, a continuación incorporaremos la distorsión y la torsión sin acoplamiento, a la formulación en rigidez:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}$$

Esta relación de rigidez puede ser de dimensión 18×18 si sumamos los alabeos torsionales y la distorsión a la formulación. En tal caso, los valores nodales de desplazamientos $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}|_{\xi=0}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}|_{\xi=1}$ y fuerzas $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}|_{\xi=0}$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}|_{\xi=1}$ tienen por componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \{u_i \quad v_i \quad w_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \quad \theta_{zi} \quad \varphi_{Ti} \quad \gamma_{Di} \quad \varphi_{Di}\}^T \\ \mathbf{f}_i &= \{F_{xi} \quad F_{yi} \quad F_{zi} \quad M_{xi} \quad M_{yi} \quad M_{zi} \quad B_{Ti} \quad M_{Di} \quad B_{Di}\}^T \end{aligned}$$

<1.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Matriz de rigidez para la distorsión.** La particularización de la última forma de la solución general al extremo final de la pieza ($\xi=1$) proporciona la denominada *ecuación de transferencia* del problema:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}|_{\xi=1} \\ \mathbf{f}|_{\xi=1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uu}|_{\xi=1} & \mathbf{G}_{uf}|_{\xi=1} \\ \mathbf{G}_{fu}|_{\xi=1} & \mathbf{G}_{ff}|_{\xi=1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}|_{\xi=0} \\ \mathbf{f}|_{\xi=0} \end{Bmatrix} - \int_{\tau=0}^1 \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uf}|_{\xi=1-\tau} \\ \mathbf{G}_{ff}|_{\xi=1-\tau} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}(\tau) L d\tau$$

Esta relación facilita la resolución de problemas de contorno y permite a su vez establecer una *relación de rigidez* entre fuerzas y movimientos en los extremos de la viga:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} \\ \mathbf{K}_{12}^T & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{Bmatrix}$$

con los movimientos $\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}|_{\xi=0}$, $\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}|_{\xi=1}$ y las fuerzas $\mathbf{f}_1 = -\mathbf{f}|_{\xi=0}$, $\mathbf{f}_2 = \mathbf{f}|_{\xi=1}$ mientras que las *submatrices de rigidez* son:

$$\mathbf{K}_{12}^D = -[\mathbf{G}_{uf}|_{\xi=1}]^{-1} = \begin{bmatrix} -4EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^3 \frac{sh\lambda_D \cos\lambda_D + sen\lambda_D ch\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} & 4EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \frac{sh\lambda_D sen\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} \\ -4EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \frac{sh\lambda_D sen\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} & -2EI_D \frac{\lambda_D}{L} \frac{sh\lambda_D \cos\lambda_D - sen\lambda_D ch\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} \end{bmatrix}$$

<1.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

$$\mathbf{K}_{11}^D = \left[\mathbf{G}_{uf} \Big|_{\xi=1} \right]^{-1} \cdot \mathbf{G}_{uu} \Big|_{\xi=1} = \begin{bmatrix} 4EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^3 \frac{sh\lambda_D ch\lambda_D + sen\lambda_D cos\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} & 2EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \frac{sh^2\lambda_D + sen^2\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} \\ 2EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \frac{sh^2\lambda_D + sen^2\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} & 2EI_D \frac{\lambda_D}{L} \frac{sh\lambda_D ch\lambda_D - sen\lambda_D cos\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{22}^D = \mathbf{G}_{ff} \Big|_{\xi=1} \cdot \left[\mathbf{G}_{uf} \Big|_{\xi=1} \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 4EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^3 \frac{sh\lambda_D ch\lambda_D + sen\lambda_D cos\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} & -2EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \frac{sh^2\lambda_D + sen^2\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} \\ -2EI_D \left(\frac{\lambda_D}{L} \right)^2 \frac{sh^2\lambda_D + sen^2\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} & 2EI_D \frac{\lambda_D}{L} \frac{sh\lambda_D ch\lambda_D - sen\lambda_D cos\lambda_D}{sh^2\lambda_D - sen^2\lambda_D} \end{bmatrix}$$

con λ_D dado por la fórmula:

$$\lambda_D = L^4 \sqrt{\frac{EI_b}{4EI_D}}$$

que corresponde a despreciar la deformación por bicortante. La incorporación de fuerzas nodales *iniciales*, o de empotramiento perfecto, debidas a la acción de las cargas repartidas $\mathbf{Q}(\xi) = \{m_D(\xi) \ b_D(\xi)\}^T$ no ofrece ninguna dificultad (*ver bibliografía*)

<1.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Matriz de rigidez para la torsión.** Operando de forma idéntica al caso de la distorsión, obtendremos una matriz de rigidez **K** relativa a los desplazamientos nodales o grados de libertad $\mathbf{u} = \{\theta_{x1} \ \varphi_{T1} \ \theta_{x2} \ \varphi_{T2}\}^T$:

$$\mathbf{K}_T = \frac{GJ}{2(1 - ch\lambda_T) + \frac{\lambda_T}{\kappa} sh\lambda_T} \begin{bmatrix} \frac{\lambda_T}{\kappa L} sh\lambda_T & ch\lambda_T - 1 & -\frac{\lambda_T}{\kappa L} sh\lambda_T & ch\lambda_T - 1 \\ ch\lambda_T - 1 & \frac{\lambda_T ch\lambda_T - \kappa sh\lambda_T}{\lambda_T} L & 1 - ch\lambda_T & \frac{\kappa sh\lambda_T - \lambda_T}{\lambda_T} L \\ -\frac{\lambda_T}{\kappa L} sh\lambda_T & 1 - ch\lambda_T & \frac{\lambda_T}{\kappa L} sh\lambda_T & 1 - ch\lambda_T \\ ch\lambda_T - 1 & \frac{\kappa sh\lambda_T - \lambda_T}{\lambda_T} L & 1 - ch\lambda_T & \frac{\lambda_T ch\lambda_T - \kappa sh\lambda_T}{\lambda_T} L \end{bmatrix}$$

con λ_T dado por la fórmula:

$$\lambda_T = L \sqrt{\frac{\kappa GJ}{EI_{\omega}}}$$

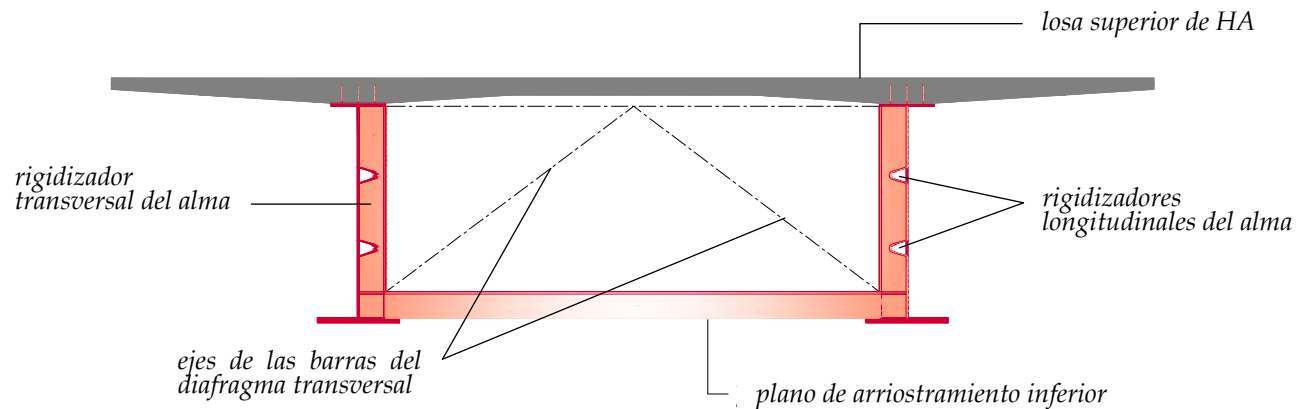
La incorporación de fuerzas nodales *iniciales*, o de empotramiento perfecto, debidas a la acción de las cargas repartidas $\mathbf{Q}(\xi) = \{m_x(\xi) \ b_{\omega}(\xi)\}^T$ ya es sistemática (ver bibliografía)

<1.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Caso particular de los tableros mixtos o metálicos de doble viga.** Para esta tipología se suele cumplir $\{\lambda_D, \lambda_T \rightarrow 0\}$ puesto que tanto la rigidez de marco EI_b como la rigidez a torsión pura GJ adoptan valores muy inferiores a los de la rigidez de membrana EI_D y la de alabeo EI_ω



(B) Aspecto usual de un tablero mixto de doble viga
(bi-viga de acuerdo con la terminología del SETRA)

A continuación facilitaremos la composición detallada de las **matrices de rigidez** incluyendo la deformación por cortante, y los vectores de **fuerzas de empotramiento perfecto** en algunos casos de cargas, a aplicar para el análisis de estas construcciones

<1.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Matrices de rigidez para tableros mixtos o metálicos de doble viga.** Las analogías observadas permiten escribir directamente la composición (*idéntica*) de las matrices de rigidez relativas a la distorsión y a la torsión del tablero

$$\mathbf{K}_D = \begin{bmatrix} \frac{12EI_D}{(1+\alpha_D)L^3} & \frac{6EI_D}{(1+\alpha_D)L^2} & -\frac{12EI_D}{(1+\alpha_D)L^3} & \frac{6EI_D}{(1+\alpha_D)L^2} \\ \frac{6EI_D}{(1+\alpha_D)L^2} & \frac{4+\alpha_D}{1+\alpha_D} \frac{EI_D}{L} & -\frac{6EI_D}{(1+\alpha_D)L^2} & \frac{2-\alpha_D}{1+\alpha_D} \frac{EI_D}{L} \\ -\frac{12EI_D}{(1+\alpha_D)L^3} & -\frac{6EI_D}{(1+\alpha_D)L^2} & \frac{12EI_D}{(1+\alpha_D)L^3} & -\frac{6EI_D}{(1+\alpha_D)L^2} \\ \frac{6EI_D}{(1+\alpha_D)L^2} & \frac{2-\alpha_D}{1+\alpha_D} \frac{EI_D}{L} & -\frac{6EI_D}{(1+\alpha_D)L^2} & \frac{4+\alpha_D}{1+\alpha_D} \frac{EI_D}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{K}_T = \begin{bmatrix} \frac{12EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^3} & \frac{6EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^2} & -\frac{12EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^3} & \frac{6EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^2} \\ \frac{6EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^2} & \frac{4+\alpha_{\hat{o}}}{1+\alpha_{\hat{o}}} \frac{EI_{\hat{o}}}{L} & -\frac{6EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^2} & \frac{2-\alpha_{\hat{o}}}{1+\alpha_{\hat{o}}} \frac{EI_{\hat{o}}}{L} \\ -\frac{12EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^3} & -\frac{6EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^2} & \frac{12EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^3} & -\frac{6EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^2} \\ \frac{6EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^2} & \frac{2-\alpha_{\hat{o}}}{1+\alpha_{\hat{o}}} \frac{EI_{\hat{o}}}{L} & -\frac{6EI_{\hat{o}}}{(1+\alpha_{\hat{o}})L^2} & \frac{4+\alpha_{\hat{o}}}{1+\alpha_{\hat{o}}} \frac{EI_{\hat{o}}}{L} \end{bmatrix}$$

con α_D y $\alpha_{\hat{o}}$ dados por las fórmulas:

$$\alpha_D = \frac{12EI_D}{GW_D L^2}, \quad \alpha_{\hat{o}} = \frac{12EI_{\hat{o}}}{GW_C L^2}$$

Además, en este caso particular todas las respuestas elementales resultan **desacopladas** entre sí

<1.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Vectores de fuerzas iniciales para tableros mixtos o metálicos de doble viga.** Las fuerzas de empotramiento perfecto \mathbf{f}^0 , o fuerzas iniciales, a computar para los caso particulares de acciones puntuales T y B o uniformemente distribuidas sobre toda pieza m_x y b_ω se recogen en la tabla siguiente. En ella M_i y B_i corresponden a momento torsor y bimomento de torsión en extremos de barra ($i=1$ o 2)

solicitud	T en $\xi=\tau$	B en $\xi=\tau$	m_x	b_ω
M_1^0	$-T(1-\tau)(1+\alpha_\omega+\tau-2\tau^2)/(1+\alpha_\omega)$	$6B\tau(1-\tau)/(1+\alpha_\omega)L$	$-m_x L/2$	$b_\omega/(1+\alpha_\omega)$
B_1^0	$-TL\tau(1-\tau)(2+\alpha_\omega-2\tau)/2(1+\alpha_\omega)$	$-B(1-\tau)(1+\alpha_\omega-3\tau)/(1+\alpha_\omega)$	$-m_x L^2/12$	$-\alpha_\omega b_\omega L/2(1+\alpha_\omega)$
M_2^0	$-T\tau(\alpha_\omega+3\tau-2\tau^2)/(1+\alpha_\omega)$	$-6B\tau(1-\tau)/(1+\alpha_\omega)L$	$-m_x L/2$	$-b_\omega/(1+\alpha_\omega)$
B_2^0	$TL\tau(1-\tau)(\alpha_\omega+2\tau)/2(1+\alpha_\omega)$	$-B\tau(\alpha_\omega-2+3\tau)/(1+\alpha_\omega)$	$m_x L^2/12$	$-\alpha_\omega b_\omega L/2(1+\alpha_\omega)$

Fuerzas de empotramiento perfecto \mathbf{f}^0 de torsión para distintas condiciones de carga ($\mathbf{f}=\mathbf{K}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{f}^0$)

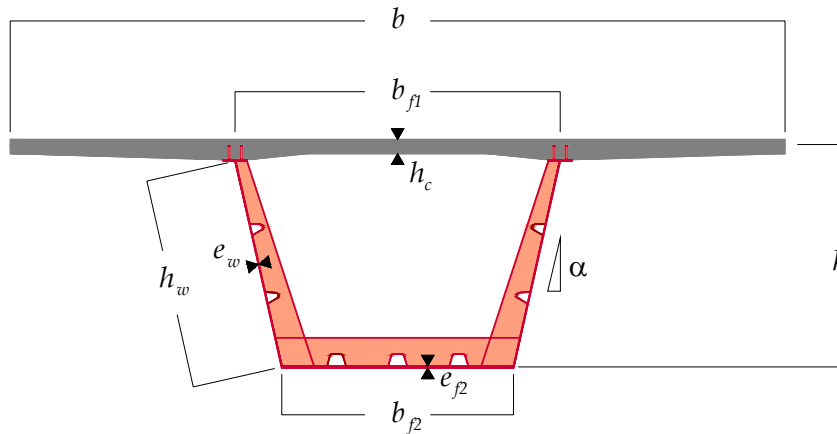
Estos resultados son válidos para la distorsión sustituyendo *momentos torsores* por *bicortantes de distorsión* y *bimomentos de torsión* por *bimomentos de distorsión*. Recuérdese que una acción torsora T produce simultáneamente una acción de distorsión $\mu T/(1+\bar{\rho})$

<1.2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ DE LAS BARRAS>

<1.2 ANÁLISIS EN SERVICIO DE PUENTES RECTOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **HOMOGENEIZACIÓN de las secciones mixtas.** Esta debe realizarse atendiendo al tipo de deformación que se analice (extensión o deformación angular) y siempre referida al acero. De ese modo, para las deformaciones de extensión tendremos $n_c = E_s/E_c$ mientras que para las deformaciones angulares tendremos* $n_c = G_s/G_c$

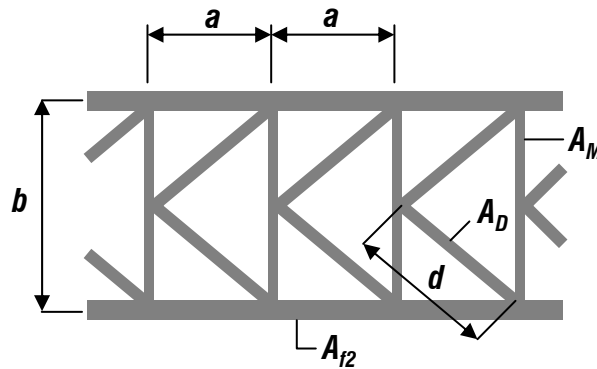


n_c	constantes estáticas
E_s/E_c	A_R con $b_R = b/n_c$ I_{yR} con b_R , I_{zR} con $h_{cR} = h_c/n_c$ $I_{\omega R}$ con h_{cR} I_{DR} con h_{cR} , I_{BR} con $\kappa_{1R} = \kappa_1/n_c$
G_s/G_c	α_{yR} con h_{cR} (factor de cortante/ Q_y) J_R con h_{cR}

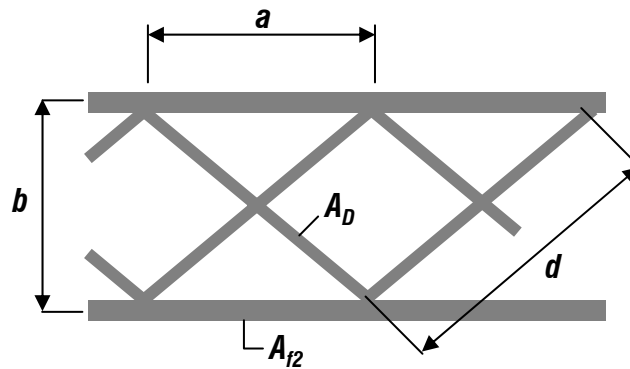
(*) sin embargo, a efectos prácticos conviene tener en cuenta que para $n_c = G_s/G_c = (1 + \nu_c)E_s/(1 + \nu_s)E_c \approx 0.923E_s/E_c \approx E_s/E_c$

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **PAREDES RETICULADAS.** Estas también pueden incorporarse al modelo definiendo un espesor equivalente e^* que garantice un comportamiento equivalente del continuo (*misma energía de deformación*). Por ejemplo, para evaluar el módulo de torsión, se puede tomar:



$$e_T^* = \frac{E}{G} \frac{ab}{\frac{2d^3}{A_D} + \frac{b^3}{4A_M} + \frac{a^3}{6A_{f2}}}$$



$$e_T^* = \frac{E}{G} \frac{ab}{\frac{d^3}{2A_D} + \frac{a^3}{6A_{f2}}}$$

Otras **disposiciones de barras** o **modos de deformación** (como el alabeo por torsión o distorsión o bien la flexión del marco) pueden tratarse de forma similar (ver bibliografía)

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Del modelo a la viga física.** EL cálculo de desplazamientos en el tablero o *viga física* se lleva a cabo de forma muy sencilla si se recurre a la hipótesis fundamental del modelo:

$$\mathbf{d}^*(x, y, z) = \mathbf{h}(y, z) \cdot \mathbf{u}(x)$$

y en componentes:

$$\begin{Bmatrix} u^*(x, y, z) \\ v^*(x, y, z) \\ w^*(x, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & \hat{\omega}(y, z) & 0 & \omega_D(y, z) \\ 0 & 1 & 0 & -\hat{z} & 0 & 0 & 0 & \eta_{vD}(y, z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{y} & 0 & 0 & 0 & \eta_{wD}(y, z) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(x) \\ v(x) \\ w(x) \\ \theta_x(x) \\ \theta_y(x) \\ \theta_z(x) \\ \varphi(x) \\ \gamma_D(x) \\ \varphi_D(x) \end{Bmatrix}$$

despreciando los movimientos inducidos por las *flexiones locales*, incluidas las de distorsión (*flexión del marco*). Las coordenadas (x, y, z) tienen su origen en el centro de gravedad **G** de la sección transversal inicial de la viga (*ejes de flexión*) mientras que el sistema (x, \hat{y}, \hat{z}) se asocia al centro de esfuerzos cortantes **C** de esa misma sección (*ejes de torsión*)

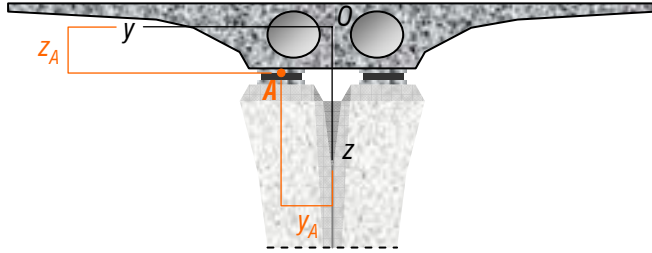
<1.4.1 DESPLAZAMIENTOS DEL TABLERO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Del modelo a la viga física.** Si el cálculo de desplazamientos y esfuerzos se desarrolla numéricamente mediante el **MEF**, la fórmula anterior se aplicará con valores nodales $\mathbf{u}_{(i)}$ de los desplazamientos generalizados $\mathbf{u}(x)$: $\mathbf{u}_{(i)} = \mathbf{u}(x_i)$

Sección apoyada: $x = x_A$



$$\begin{Bmatrix} u^*(x_i, y, z) \\ v^*(x_i, y, z) \\ w^*(x_i, y, z) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & z & -y & \hat{\omega}(y, z) & 0 & \omega_D(y, z) \\ 0 & 1 & 0 & -\hat{z} & 0 & 0 & 0 & \eta_{vD}(y, z) & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \hat{y} & 0 & 0 & 0 & \eta_{wD}(y, z) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{(i)} \\ v_{(i)} \\ w_{(i)} \\ \theta_{x(i)} \\ \theta_{y(i)} \\ \theta_{z(i)} \\ \varphi_{(i)} \\ \gamma_{D(i)} \\ \varphi_{D(i)} \end{Bmatrix}$$

Esta fórmula permite determinar los **movimientos espaciales** (en ejes globales) de cualquier punto del tablero, como por ejemplo en un aparato de apoyo o en una junta de dilatación, teniendo en cuenta la influencia de las rotaciones y de las intensidades de alabeos, además de las traslaciones de las secciones transversales:

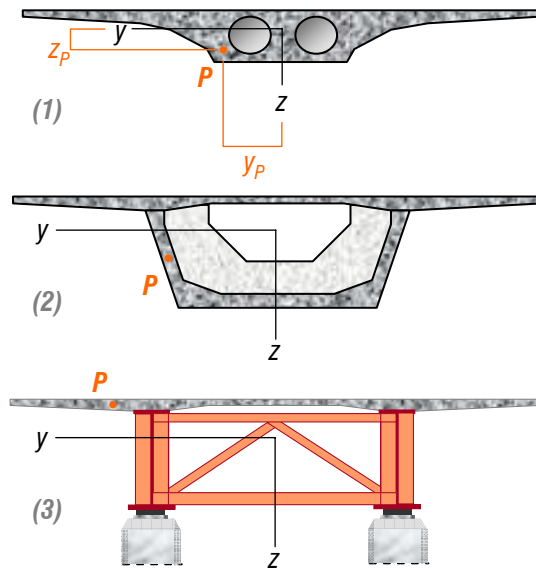
$$\mathbf{d}_A^* = \mathbf{h}(y_A, z_A) \cdot \mathbf{u}_{(A)} = \{u_A^* \quad v_A^* \quad w_A^*\}^T$$

<1.4.1 DESPLAZAMIENTOS DEL TABLERO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Del modelo a la viga física.** Propondremos fórmulas para las tensiones normales y tangenciales producidas por la flexión, la torsión y la distorsión en un punto genérico **P** de la sección transversal, para los tres tipos de tableros seleccionados al principio de este capítulo



Fórmulas para el caso general. Las tensiones normales se evalúan a partir del axil, de los momentos flectores y de los bimomentos de torsión y distorsión, mientras que las tensiones tangenciales quedan determinadas por los cortantes y los bicortantes de torsión (*momentos torsores*) y distorsión

$$\sigma_{xP}^* = \frac{N_x}{A} + \frac{z_P I_z - y_P I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y - \frac{y_P I_y - z_P I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z + \hat{\omega}_P \frac{B_{\hat{\omega}}}{I_{\hat{\omega}}} + \omega_{DP} \frac{B_D}{I_D}$$

$$\tau_{xyP}^* = \frac{R_{yP}}{b_y} + [\hat{\omega}_{,y}|_P - (z_P - z_C)] \frac{M_x - M_{\hat{\omega}}}{J} - \left\{ [\hat{\omega}_{,y}|_P] \frac{M_{\hat{\omega}}}{W_C} + [\omega_{D,y}|_P] \frac{M_D}{W_D} \right\}$$

$$\tau_{xzP}^* = \frac{R_{zP}}{b_z} + [\hat{\omega}_{,z}|_P + (y_P - y_C)] \frac{M_x - M_{\hat{\omega}}}{J} - \left\{ [\hat{\omega}_{,z}|_P] \frac{M_{\hat{\omega}}}{W_C} + [\omega_{D,z}|_P] \frac{M_D}{W_D} \right\}$$

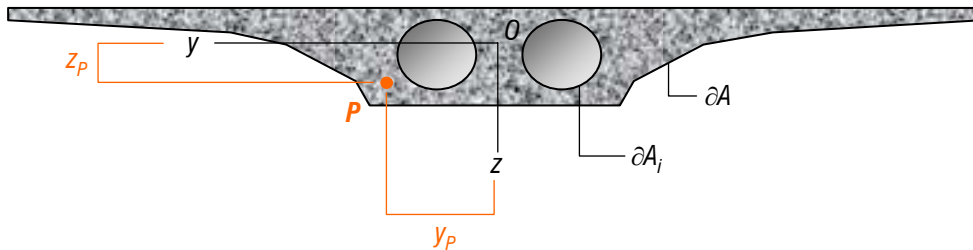
(y_C, z_C) son las coordenadas del centro de esfuerzos cortantes **C**

<1.4.2 TENSIONES EN SERVICIO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Losa aligerada de ala ancha.** La formulación exacta resuelve la estática de la torsión a través del gradiente de $\hat{\omega}$, pero si prescindimos del alabeo y de la distorsión, despreciables en este tipo de tableros, existe un **cálculo alternativo** más directo



(a) **Tensiones en P.** Tendremos directamente:

$$\sigma_{xP}^* = \frac{N_x}{A} + \frac{z_P I_z - y_P I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y - \frac{y_P I_y - z_P I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z$$

$$\tau_{xyP}^* = \frac{R_{yP}}{b_y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_P, \quad \tau_{xzP}^* = \frac{R_{zP}}{b_z} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \Big|_P$$

(b) **Determinación del campo de tensiones tangenciales debidas a la torsión (pura)** mediante la analogía de la membrana de Prandtl, integrando la ecuación de Laplace con condiciones de Dirichlet (Φ C^{ste} sobre los contornos)

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = -2G\theta'_x \quad \forall (y, z) \in A$$

(c) **Determinación aproximada de la máxima tensión tangencial.** Si $B \times h$ son las dimensiones del núcleo rígido de la sección transversal

$$\tau_{xy\max}^* = \frac{M_x}{\alpha B h^2}, \quad \tau_{xz\max}^* = \frac{M_x}{\alpha B^2 h}$$

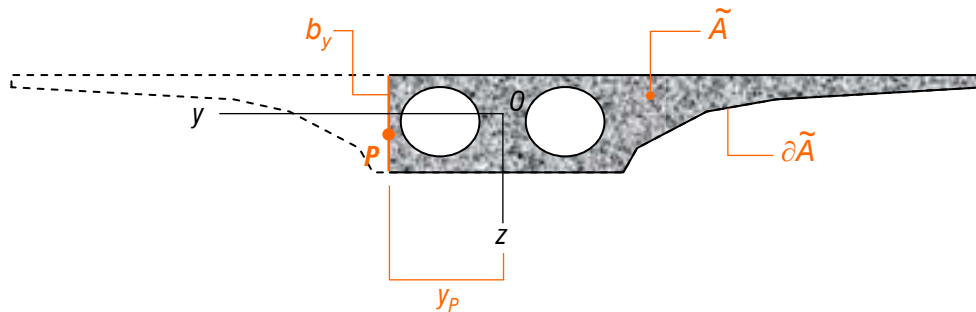
B/h	1	2.5	5	10	∞
α	0.208174	0.257592	0.291501	0.312326	0.333333

<1.4.2 TENSIONES EN SERVICIO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪Losa aligerada de ala ancha. Fracción debida al **cortante**, formulación estática



(b) **Momentos estáticos parciales.** Se evalúan sobre las secciones transversales parciales definidas en (a):

$$\tilde{S}_y = \int_{\tilde{A}} z dA \quad , \quad \tilde{S}_z = \int_{\tilde{A}} y dA$$

(a) **Rasante longitudinal en secciones verticales.** Si damos una sección longitudinal del tablero por el plano vertical $y=C^{ste}$ y denominamos b_y a su intersección con la sección transversal, tendremos:

$$R_y = \int_{b_y} \tau_{yx}^* dz = \tilde{q}_x - \left[\frac{\tilde{S}_y I_z - \tilde{S}_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_z - m_y) + \frac{\tilde{S}_z I_y - \tilde{S}_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_y + m_z) \right]$$

$$\tilde{q}_x = \frac{\tilde{A}}{A} q_x - \int_{\partial \tilde{A} - b_y} \bar{q}_x d\bar{s}$$

(c) **Rasante longitudinal en secciones horizontales.** Del mismo modo, si damos una sección longitudinal del tablero por el plano horizontal $z=C^{ste}$ y denominamos b_z a su intersección con la sección transversal, tendremos:

$$R_z = \int_{b_z} \tau_{zx}^* dz = \tilde{q}_x - \left[\frac{\tilde{S}_y I_z - \tilde{S}_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_z - m_y) + \frac{\tilde{S}_z I_y - \tilde{S}_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_y + m_z) \right]$$

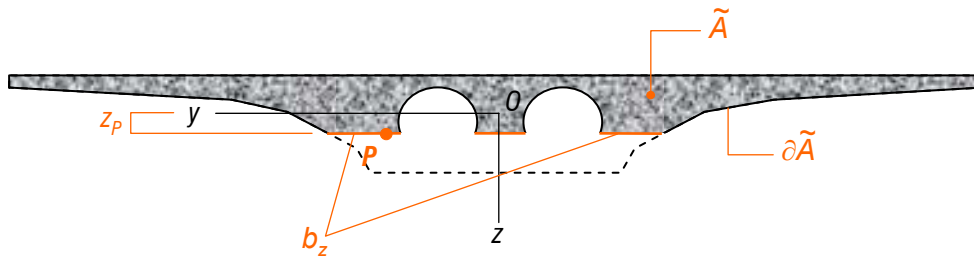
$$R_{yP} = R_y|_{y=y_P} \quad , \quad R_{zP} = R_z|_{z=z_P}$$

<1.4.2 TENSIONES EN SERVICIO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪Losa aligerada de ala ancha. Fracción debida al **cortante**, formulación estática



(b) **Momentos estáticos parciales.** Se evalúan sobre las secciones transversales parciales definidas en (a):

$$\tilde{S}_y = \int_{\tilde{A}} z dA \quad , \quad \tilde{S}_z = \int_{\tilde{A}} y dA$$

(a) **Rasante longitudinal en secciones verticales.** Si damos una sección longitudinal del tablero por el plano vertical $y=C^{ste}$ y denominamos b_y a su intersección con la sección transversal, tendremos:

$$R_y = \int_{b_y} \tau_{yx}^* dz = \tilde{q}_x - \left[\frac{\tilde{S}_y I_z - \tilde{S}_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_z - m_y) + \frac{\tilde{S}_z I_y - \tilde{S}_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_y + m_z) \right]$$

$$\tilde{q}_x = \frac{\tilde{A}}{A} q_x - \int_{\partial \tilde{A} - b_y} \bar{q}_x d\bar{s}$$

(c) **Rasante longitudinal en secciones horizontales.** Del mismo modo, si damos una sección longitudinal del tablero por el plano horizontal $z=C^{ste}$ y denominamos b_z a su intersección con la sección transversal, tendremos:

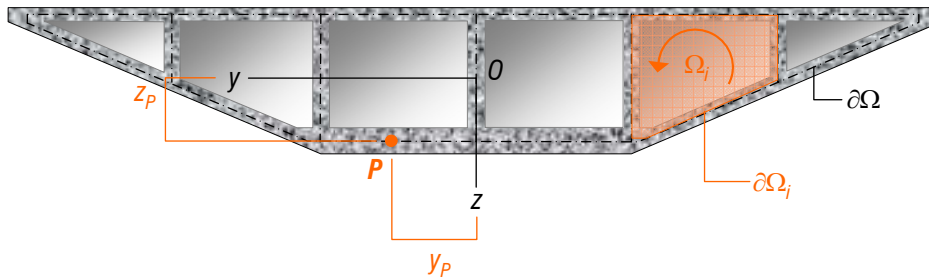
$$R_z = \int_{b_z} \tau_{zx}^* dz = \tilde{q}_x - \left[\frac{\tilde{S}_y I_z - \tilde{S}_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_z - m_y) + \frac{\tilde{S}_z I_y - \tilde{S}_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_y + m_z) \right]$$

<1.4.2 TENSIONES EN SERVICIO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Tablero en cajón multicelular.** Por la esbeltez torsional correspondiente a este tipo de tableros, estaremos en general en el **dominio de la torsión pura**. Por lo tanto, prescindiremos de bimomentos y bicortantes de torsión ($B_\omega = M_\omega = 0$) en nuestros cálculos estáticos



(b) *Rasantes* $N_{xs}^{(0)}$ *debidos al cortante* en la sección abierta

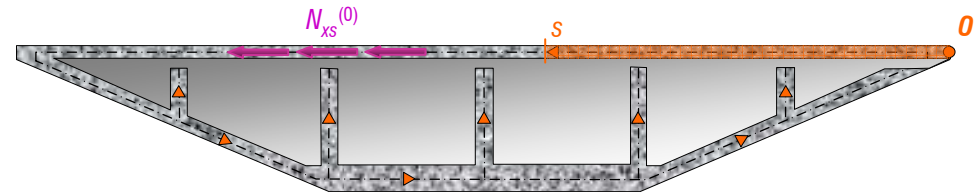
$$N_{xs}^{(0)}(s) = \tilde{q}_x(x) - \left[\frac{\tilde{S}_y I_z - \tilde{S}_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_z - m_y) + \frac{\tilde{S}_z I_y - \tilde{S}_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_y + m_z) \right]$$

$$\tilde{S}_y(s) = \int_0^s e(s) z(s) ds \quad , \quad \tilde{S}_z(s) = \int_0^s e(s) y(s) ds$$

(a) *Tensiones en P.* Tendremos directamente:

$$\sigma_{xP}^* = \frac{N_x}{A} + \frac{z_P I_z - y_P I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y - \frac{y_P I_y - z_P I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z + \omega_{DP} \frac{B_D}{I_D}$$

$$\tau_{xSP}^* = \frac{1}{e} \left[N_{xs}^{(0)} + N_{xs}^{(1)} \right]_{s=s_P} - \left[\omega_D' \right]_{s=s_P} \frac{M_D}{W_D}$$

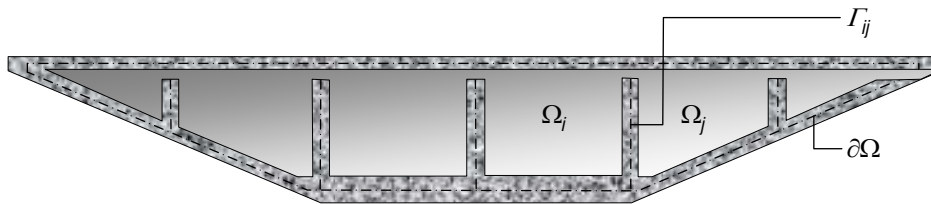


<1.4.2 TENSIONES EN SERVICIO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Tablero en cajón multicelular.** Por la esbeltez torsional correspondiente a este tipo de tableros, estaremos en general en el **dominio de la torsión pura**. Por lo tanto, prescindiremos de bimomentos y bicortantes de torsión ($B_\omega = M_\omega = 0$) en nuestros cálculos estáticos



(c) **Rasantes $N_{xs}^{(1)}$ debidos al cierre y a la torsión pura.** Ambos se determinan a partir de la circulación de las tensiones $\tau_{xs}^{(0)}$ y $\hat{\tau}_{xs}$ sobre el contorno de cada celda $\partial\Omega_j$

$$\mathbf{C}^{(0)} = \left\{ \int_{\partial\Omega_j} \frac{N_{xs}^{(0)}}{e} ds \right\}, \quad \mathbf{\Omega} = \frac{J}{2M_x} \left\{ \int_{\partial\Omega_j} \frac{\hat{N}_{xs}}{e} ds \right\}$$

$$\mathbf{N}^{(1)} = \mathbf{A}^{-1} \left[\mathbf{C}^{(0)} + \frac{2M_x}{J} \mathbf{\Omega} \right]$$

(d) **Rasantes finales N_{xs} .** Debemos distinguir dos casos, dependiendo de la posición del punto de cálculo P

(1) $P \in \partial\Omega$ (contorno exterior):

$$N_{xs(i)}(\mathbf{s}) = N_{xs(i)}^{(0)}(\mathbf{s}) + N_{(i)}^{(1)}$$

(2) $P \in \Gamma$ (almas interiores):

$$N_{xs(ij)}(\mathbf{s}) = N_{xs(ij)}^{(0)}(\mathbf{s}) + N_{(i)}^{(1)} - N_{(j)}^{(1)}$$

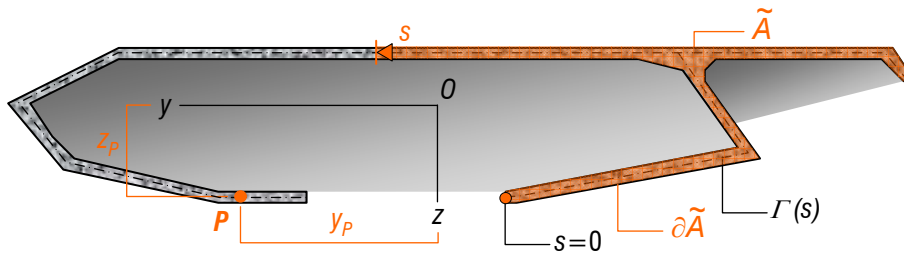
(e) **Rasante debidos a la distorsión.** Si bien en la fórmula propuesta para las tensiones τ_{xs}^* quedan incluidos los rasantes producidos por el esfuerzo bicortante de distorsión, al determinarse estos a partir de las deformaciones generalizadas, su distribución sobre cada pared de la sección resulta uniforme y representa el valor medio de este esfuerzo a lo largo de estos elementos. Conviene por lo tanto sustituir esta distribución por la determinada estáticamente por equilibrio interno al desarrollar la teoría de distorsión

<1.4.2 TENSIONES EN SERVICIO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Tableros de sección abierta.** Por la esbeltez torsional correspondiente a este tipo de tableros, estaremos en general en el **dominio de la torsión alabeada**. La fracción debida al cortante y a la torsión se resuelve por estática



(a) **Tensiones en P.** Tendremos directamente:

$$\sigma_{xP}^* = \frac{N_x}{A} + \frac{z_P I_z - y_P I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_y - \frac{y_P I_y - z_P I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} M_z + \hat{\omega}_{sP} \frac{B_{\hat{\omega}}}{I_{\hat{\omega}}} + \omega_{DP} \frac{B_D}{I_D}$$

$$\tau_{xsP}^* = \frac{N_{xsP}}{e} - \left[\omega_D' \right]_{s=s_P} \frac{M_D}{W_D}$$

(b) **Rasante en una s-sección.** Si consideramos una sección longitudinal del tablero por el plano ortogonal $s = C^{ste}$ y denominamos $e(s)$ al espesor de pared su intersección con la sección transversal, tendremos:

$$\begin{aligned} N_{xs} &= \int_{\eta=-e/2}^{e/2} \tau_{xs}^* d\eta \\ &= \tilde{q}_x - \left[\frac{\tilde{S}_y I_z - \tilde{S}_z I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_z - m_y) + \frac{\tilde{S}_z I_y - \tilde{S}_y I_{yz}}{I_y I_z - I_{yz}^2} (Q_y + m_z) \right] + \frac{\tilde{S}_{\hat{\omega}}}{I_{\hat{\omega}}} (M_x + b_{\hat{\omega}}) \\ \tilde{q}_x &= \frac{\tilde{A}}{A} q_x - \int_{\partial \tilde{A} - e} \bar{q}_x d\bar{s} \end{aligned}$$

$$\tilde{S}_y(s) = \int_0^s z(s) e(s) ds$$

$$\tilde{S}_z(s) = \int_0^s y(s) e(s) ds$$

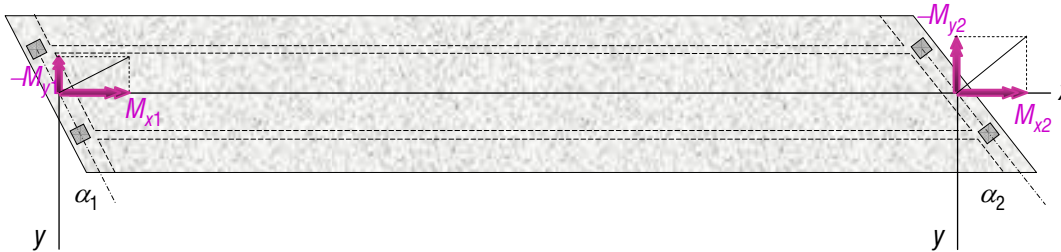
$$\tilde{S}_{\hat{\omega}}(s) = \int_0^s \hat{\omega}_s(s) e(s) ds$$

<1.4.2 TENSIONES EN SERVICIO>

<1.4 PREDICCIÓN DE LA RESPUESTA DEL TABLERO>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Puentes oblicuos.** La oblicuidad de un tablero de puente siempre viene asociada a las **condiciones de apoyo** del mismo, tanto en pilas como en estribos. En estos últimos, esta circunstancia impone una relación cinemática entre la rotaciones fuera del plano del tablero, que viene acompañada de una condición de estática consistente, asociado a que en la junta de dilatación las tensiones normales han de cancelarse, luego la suma de los momentos conjugados de las rotaciones θ_x y θ_y ha de ser nula:



$$\begin{cases} \theta_{xi} - \tan \alpha_i \theta_{yi} = 0 \\ \tan \alpha_i M_{xi} + M_{yi} = 0 \end{cases}$$

De la ecuación de equilibrio se deduce entonces que la oblicuidad produce **empotramiento a flexión** del tablero. Como ejemplo, supongamos que los bordes son paralelos y que se aplica una carga lineal uniforme q_z sobre toda la longitud del modelo. En el caso de tablero de gran esbeltez torsional, se obtiene entonces ($\kappa = EI_y/GJ$):

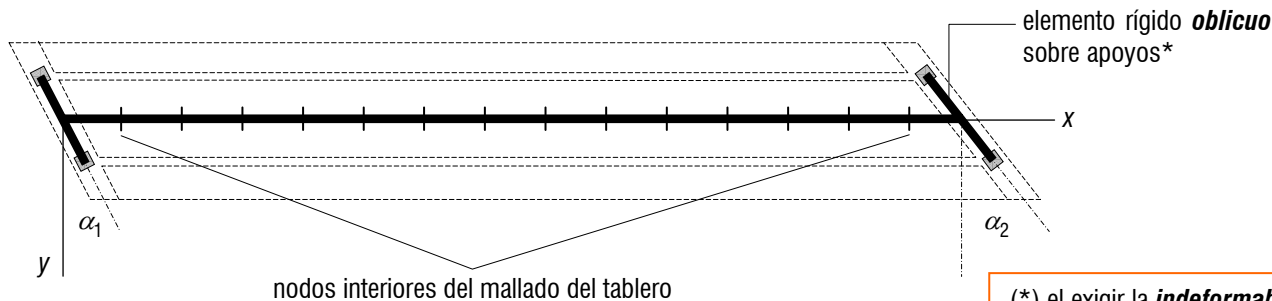
$$\begin{cases} M_{y1} = -M_{y2} = \frac{q_z L^2}{12(1 + \kappa \operatorname{ctan}^2 \alpha)} \\ M_{x1} = -M_{x2} = -\frac{\operatorname{ctg}^2 \alpha q_z L^2}{12(1 + \kappa \operatorname{ctan}^2 \alpha)} \end{cases}$$

<1.5.1 PUENTES OBLICUOS>

<1.5 PUENTES OBLICUOS Y PUENTES CURVOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Puentes oblicuos.** Conviene subrayar que *no es posible resolver* exactamente el problema de la viga “oblicua” si la rigidez torsional del tablero es baja, ya que en este caso *el alabeo* resulta ser la única deformación efectiva de torsión, y la sección *material* de apoyo no puede asociarse a un único valor de esta variable generalizada, definida en secciones ortogonales a la directriz



(*) el exigir la *indeformabilidad* de este elemento es consistente con la teoría de vigas, sin embargo en el caso de tableros metálico o mixtos, es frecuente disponer riostras extremas, en cuyo caso bastaría asignar las características mecánicas de estas vigas físicas transversales al las barras extremas (*oblicuas*) del modelo

En la práctica, como el tablero se modela mediante *EF* conectados en serie, la consideración de la *oblicuidad* se lleva a cabo de forma muy sencilla si se incorpora al modelo *barras transversales* sobre apoyos. Además, con esta disposición también se puede analizar con garantía suficiente tableros de débil esbeltez torsional, si se toma la precaución de desactivar el alabeo de los nuevos elementos

<1.5.1 PUENTES OBLICUOS>

<1.5 PUENTES OBLICUOS Y PUENTES CURVOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

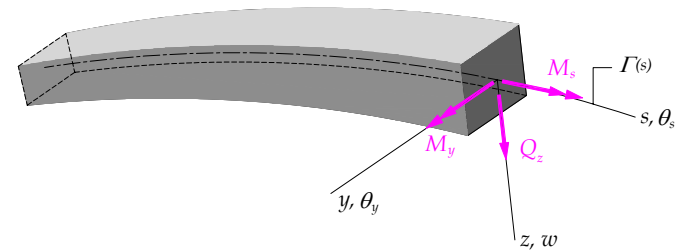
■ **Puentes curvos.** La curvatura en planta se traduce *estructuralmente* en el acoplamiento entre flexión y torsión del tablero, modelado este como viga. Ello puede apreciarse a nivel local, tanto cinemática como estáticamente (*ecuaciones de equilibrio interno*), en las relaciones:



■ Debido al acoplamiento flexión-torsión inherente a la curvatura en planta, los tableros de puentes curvos se diseñan en general con secciones en cajón uni o multicelular, de elevado módulo de torsión J . En la imagen: *Pont de Saint-Cloud* en París, tablero tri-celular de hormigón pretensado

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_s}{ds} = \chi\theta_y + \frac{M_s}{GJ} \\ \frac{d\theta_y}{ds} = -\chi\theta_s + \frac{M_y}{EI_y} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \frac{dM_s}{ds} = \chi M_y - m_s \\ \frac{dM_y}{ds} = Q_z - \chi M_s - m_y \end{array}$$

Estas ecuaciones han de satisfacerse en *cada punto del modelo*, cuyo dominio físico de definición es el segmento de *curva directriz* del tablero $\Gamma(s)$. La solución analítica del problema no requiere más consideraciones. Sin embargo, la resolución numérica mediante códigos **EF** exige valorar las características del elemento finito disponible



<1.5.2 PUENTES CURVOS>

<1.5 PUENTES OBLICUOS Y PUENTES CURVOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Análisis por el MEF.** La formulación de un elemento finito para vigas curvas requiere expresar las ecuaciones cinemáticas en coordenadas curvilíneas y calcular la matriz de deformaciones $\mathbf{B}(\xi)$ de acuerdo con el algoritmo siguiente, donde $\mathbf{N}(\xi)$ son las **funciones de forma** y \mathbf{u}^e los **desplazamientos nodales** del elemento:

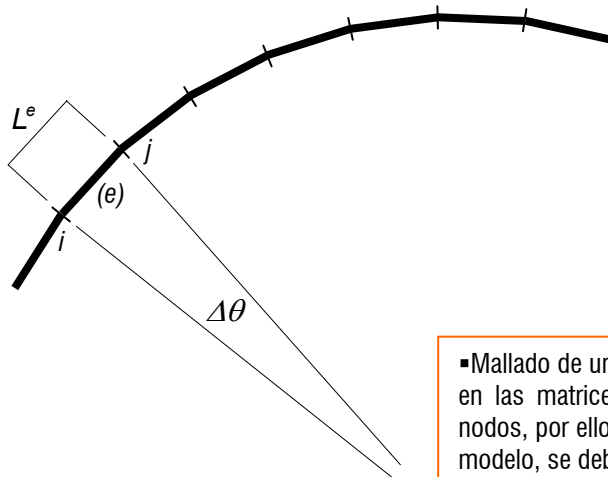
$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{N}(\xi)\mathbf{u}^e \quad , \quad \xi = \frac{s}{L^e}$$

$$\mathbf{e}^*(\xi) = \mathbf{B}(\xi)\mathbf{u}^e \quad , \quad \mathbf{B}(\xi) = \mathbf{B}_0\mathbf{N}(\xi) + \frac{1}{L^e}\mathbf{B}_1\frac{d\mathbf{N}(\xi)}{d\xi}$$

con

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & \chi z & 0 \\ 0 & 0 & \chi z \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & 0 & z \\ 0 & -z & 0 \\ 1 & y & 0 \end{bmatrix}$$

y $\mu = 1 - \chi y$, $\chi = R^{-1}$. Entonces, la cuestión se reduce a si nuestro **software** dispone de este tipo de elemento y en caso negativo, como proceder para obtener resultados válidos con elementos estándar (*barra recta*)



▪ Mallado de una viga curva modelada mediante barras rectas: $\chi=0$ y $\mu=1$ en las matrices \mathbf{B}_i . El acoplamiento se localiza exclusivamente en los nodos, por ello y con el fin de ajustar correctamente el comportamiento del modelo, se debe adoptar una subdivisión adecuada ($\Delta\theta \approx 2^\circ$)

<1.5.2 PUENTES CURVOS>

<1.5 PUENTES OBLICUOS Y PUENTES CURVOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

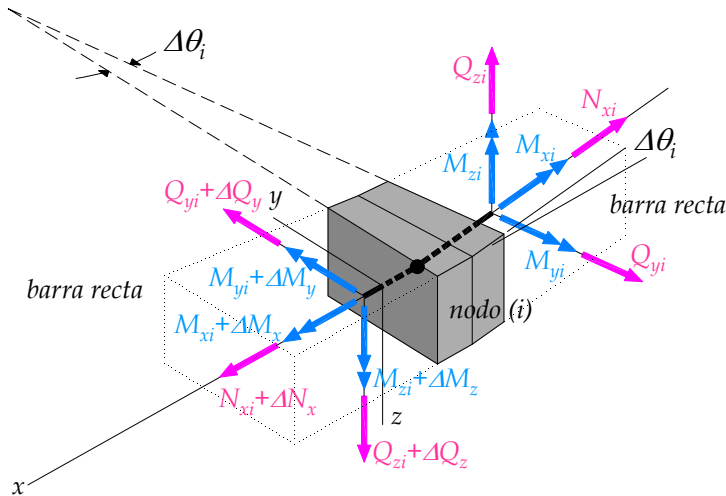
■ **Análisis por el MEF.** Desarrollemos con más detalle el último concepto (*acoplamiento nodal*) y añadamos a la formulación los esfuerzos asociados a los desplazamientos en el plano horizontal $\{u, v, \theta_z\}$. Para ello evaluemos el equilibrio del nodo (*i*) supuesto libre de carga:

$$\begin{aligned} -N_{xi} + \cos\Delta\theta_i(N_{xi} + \Delta N_x) - \sin\Delta\theta_i(Q_{yi} + \Delta Q_y) &= 0 \\ -Q_{yi} + \cos\Delta\theta_i(Q_{yi} + \Delta Q_y) + \sin\Delta\theta_i(N_{xi} + \Delta N_x) &= 0 \\ -Q_{zi} + Q_{zi} + \Delta Q_z &= 0 \\ -M_{xi} + \cos\Delta\theta_i(M_{xi} + \Delta M_x) - \sin\Delta\theta_i(M_{yi} + \Delta M_y) &= 0 \\ -M_{yi} + \cos\Delta\theta_i(M_{yi} + \Delta M_y) + \sin\Delta\theta_i(M_{xi} + \Delta M_x) - \Delta s_i(Q_{zi} + \Delta Q_z) &= 0 \\ -M_{zi} + M_{zi} + \Delta M_z + \Delta s_i(Q_{yi} + \Delta Q_y) &= 0 \end{aligned}$$

Tras simplificar, reagrupar e introducir $\Delta\theta_i = \Delta s_i/R_i$ resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta Q_z}{\Delta s_i} &= 0 & \frac{\Delta N_x}{\Delta s_i} - \frac{Q_{yi}}{R_i} &= 0 \\ \frac{\Delta M_x}{\Delta s_i} - \frac{M_{yi}}{R_i} &= 0 & \frac{\Delta Q_y}{\Delta s_i} + \frac{N_{xi}}{R_i} &= 0 \\ \frac{\Delta M_y}{\Delta s_i} + \frac{M_{xi}}{R_i} - Q_{zi} &= 0 & \frac{\Delta M_z}{\Delta s_i} + Q_{yi} &= 0 \end{aligned}$$

Estas ecuaciones exponen el **acoplamiento** flexión-torsión en la **viga curva** y flexión-extensión en el **arco**. Ambos requieren el adecuado control de $\Delta\theta$

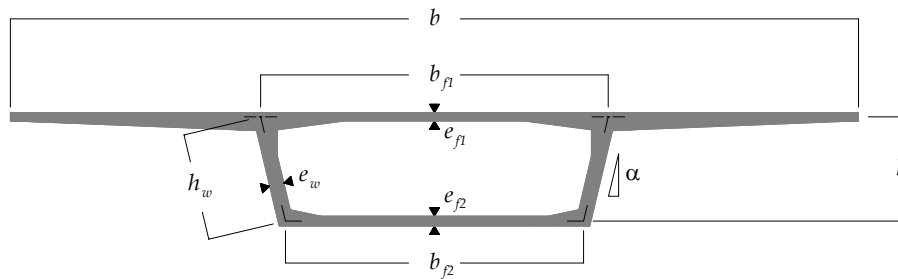


<1.5.2 PUENTES CURVOS>

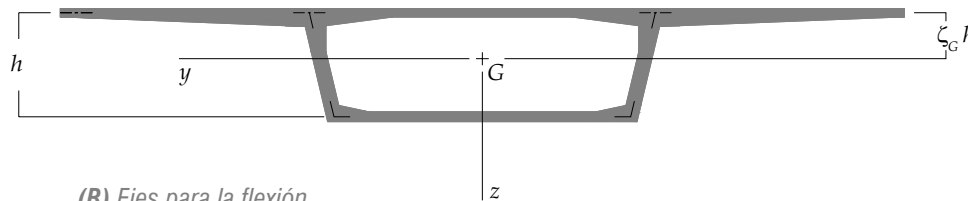
<1.5 PUENTES OBLICUOS Y PUENTES CURVOS>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Parámetros de la flexión.** Adoptaremos *espesores medios* para las distintas paredes así como parámetros adimensionales de área $\alpha_i = A_{fi}/A_w$, siendo A_{f1} , A_{f2} y A_w las áreas de las losas superior e inferior y de las almas respectivamente



(A) Definición geométrica



(B) Ejes para la flexión

$$\rho = \frac{b}{b_{f2}} \quad , \quad \bar{\rho} = \frac{b_{f1}}{b_{f2}} \quad , \quad A = (\alpha_1 + 2 + \alpha_2)A_w$$

$$\zeta_G = \frac{1 + \alpha_2}{\alpha_1 + 2 + \alpha_2} \quad , \quad I_G = I_y + I_z$$

$$I_y = \frac{1 + 2(\alpha_1 + \alpha_2) + 3\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + 2 + \alpha_2} \frac{A_w h^2}{3}$$

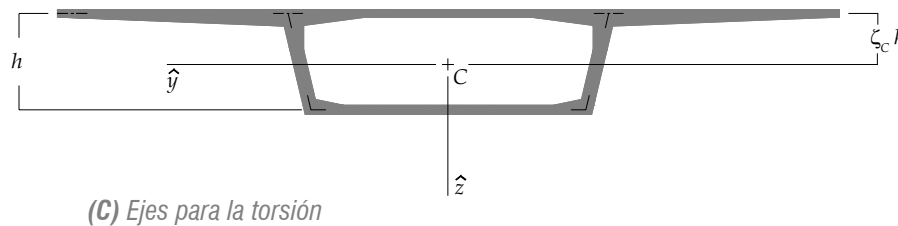
$$I_z = \left[\alpha_1 \rho^2 + 2(\bar{\rho}^2 + \bar{\rho} + 1) + \alpha_2 \right] \frac{A_w b_{f2}^2}{12}$$

<A.1 PARÁMETROS MECÁNICOS de la sección en cajón unicelular>

<ANEXO A>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Parámetros de la torsión.** Nuevamente adoptamos *espesores medios* para las distintas paredes así como parámetros adimensionales de área $\alpha_i = A_{fi}/A_w$, siendo A_{f1} , A_{f2} y A_w las áreas de las losas superior e inferior y de las almas respectivamente



$$\zeta_c = \frac{1}{2} \frac{\Lambda \Psi - [2\bar{\rho}(\bar{\rho} + 2) + \alpha_2(3\bar{\rho} + 1)]}{\alpha_1 \bar{\rho}^2 + 2(\bar{\rho}^2 + \bar{\rho} + 1) + \alpha_2}$$

$$J = \Psi(1 + \bar{\rho})A_w h^2 \quad , \quad \Omega = (1 + \bar{\rho}) \frac{h b_{f2}}{2}$$

$$I_c = I_G + (\zeta_c - \zeta_G)^2 (\alpha_1 + 2 + \alpha_2) A_w h^2$$

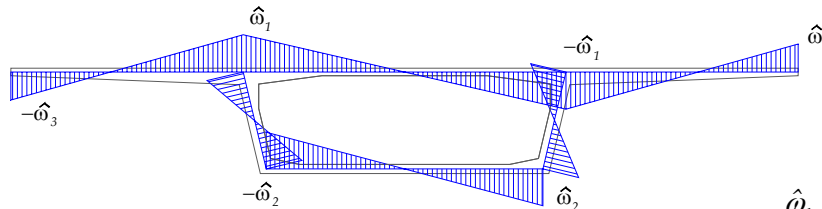
$$\Lambda = 1 - \bar{\rho}^3 + 2 \left(\frac{h_w}{b_{f2}} \right)^2 [2(\bar{\rho} + 2) + 3\alpha_2] + \frac{3\rho\bar{\rho}}{\alpha_1} [\alpha_1 \rho + 2(\bar{\rho} + 1) + \alpha_2] \quad , \quad \Psi = \frac{\alpha_1 \alpha_2 (1 + \bar{\rho})}{\alpha_1 + 2\alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{h_w}{b_{f2}} \right)^2 + \alpha_2 \rho \bar{\rho}}$$

<A.1 PARÁMETROS MECÁNICOS de la sección en cajón unicelular>

<ANEXO A>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ Parámetros de la torsión (continuación)



(D) Alabeo unitario

$$\hat{\omega}_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi}{\alpha_1} - \frac{\zeta_c}{\rho} \right) \rho \bar{\rho} h b_{f2}$$

$$\hat{\omega}_2 = \frac{1}{2} \left(\frac{\Psi}{\alpha_2} + \zeta_c - 1 \right) h b_{f2}$$

$$\hat{\omega}_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_c}{\bar{\rho}} - \frac{\Psi}{\alpha_1} \right) \rho \bar{\rho} h b_{f2}$$

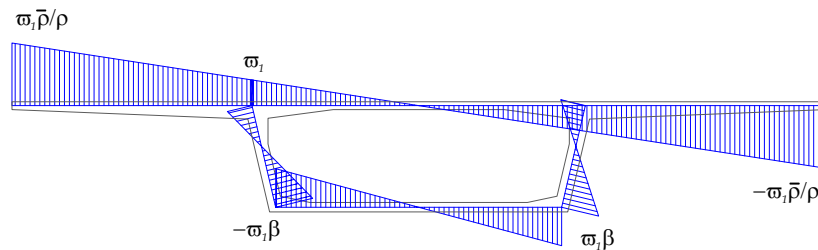
$$I_{\hat{\omega}} = \frac{1}{3} \left[(2 + \alpha_1) \hat{\omega}_1^2 - 2 \hat{\omega}_1 \hat{\omega}_2 + (2 + \alpha_2) \hat{\omega}_2^2 + \alpha_1 (1 - \bar{\rho} / \rho) (\hat{\omega}_3 - \hat{\omega}_1) \hat{\omega}_3 \right] A_w$$

<A.1 PARÁMETROS MECÁNICOS de la sección en cajón unicelular>

<ANEXO A>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Parámetros de la distorsión.** Adoptaremos *espesores medios* para las distintas paredes así como parámetros adimensionales de área $\alpha_i = A_{fi}/A_w$, siendo A_{f1} , A_{f2} y A_w las áreas de las losas superior e inferior y de las almas respectivamente



(E) Alabeo unitario

$$\beta = \frac{\alpha_1(\rho^2 / \bar{\rho}) + 2\bar{\rho} + 1}{\alpha_2 + \bar{\rho} + 2}$$

$$\varpi_1 = \frac{1}{2} \mu^2 \frac{\Omega}{(1 + \bar{\rho})(1 + \bar{\rho}\beta)} \quad , \quad \mu = \frac{2\bar{\rho}}{1 + \bar{\rho}}$$

$$I_D = \frac{1}{3} \left[\alpha_1 \left(\frac{\rho}{\bar{\rho}} \right)^2 + 2 \frac{1 + \beta^3}{1 + \beta} + \alpha_2 \beta^2 \right] \varpi_1^2 A_w \quad , \quad W_D = 4 \left[\frac{\alpha_1}{\bar{\rho}^2} + \frac{1}{2} (1 + \beta)^2 \left(\frac{b_{f2}}{h_w} \right)^2 + \alpha_2 \beta^2 \right] \left(\frac{\varpi_1}{b_{f2}} \right)^2 A_w$$

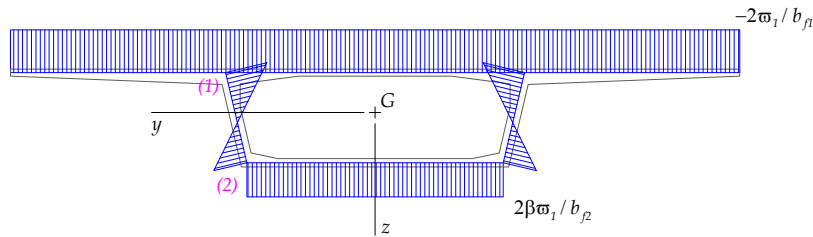
$$I_b = \frac{1}{1 - \nu^2} \left(\frac{\mu}{\bar{\rho}} \right)^2 \frac{\kappa_1 + \bar{\rho}^2 \kappa_2 + 2(1 + \bar{\rho} + \bar{\rho}^2) \kappa_1 \kappa_2}{1 + 2(\kappa_1 + \kappa_2) + 3\kappa_1 \kappa_2} \left(\frac{e_w}{h_w} \right)^2 A_w \quad \text{con} \quad k_w = \frac{EA_w}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{e_w}{h_w} \right)^2 \quad , \quad k_{fi} = \frac{EA_{fi}}{12(1 - \nu^2)} \left(\frac{e_{fi}}{b_{fi}} \right)^2 \quad \text{y} \quad \kappa_i = \frac{k_{fi}}{k_w}$$

<A.1 PARÁMETROS MECÁNICOS de la sección en cajón unicelular>

<ANEXO A>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

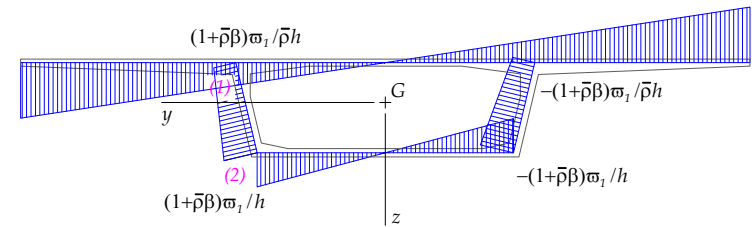
■ Parámetros de la distorsión (continuación)



(F) Patrón η_{vD} para $v(y,z)$

$$v_{(1)} = \eta_{vD}(y_{(1)}, z_{(1)}) \gamma_D(x) = -2 \frac{\varpi_1}{b_{f1}} \gamma_D$$

$$v_{(2)} = \eta_{vD}(y_{(2)}, z_{(2)}) \gamma_D(x) = 2\beta \frac{\varpi_1}{b_{f2}} \gamma_D$$



(G) Patrón η_{wD} para $w(y,z)$

$$w_{(1)} = \eta_{wD}(y_{(1)}, z_{(1)}) \gamma_D(x) = (1 + \bar{\rho}\beta) \frac{\varpi_1}{\bar{\rho}h} \gamma_D$$

$$w_{(2)} = \eta_{wD}(y_{(2)}, z_{(2)}) \gamma_D(x) = (1 + \bar{\rho}\beta) \frac{\varpi_1}{h} \gamma_D$$

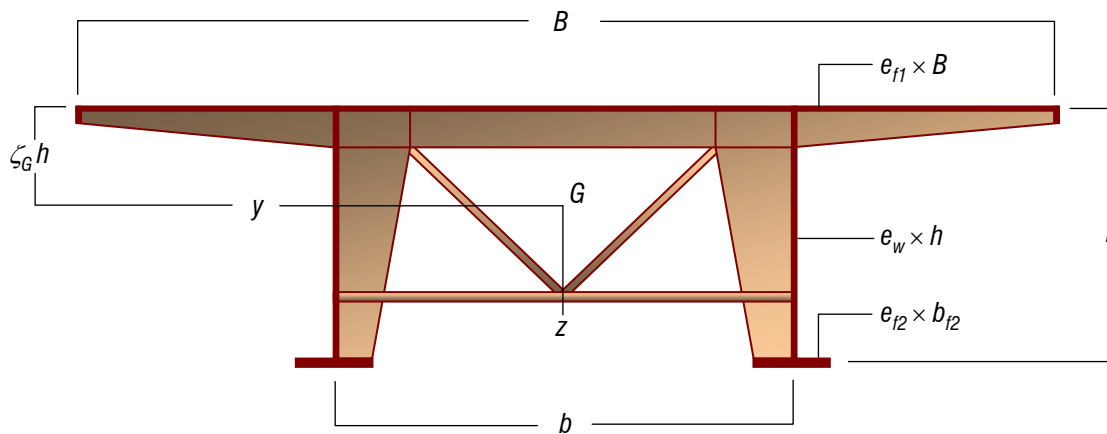
Debe tenerse en cuenta que los desplazamientos de los puntos materiales de la sección transversal $v(y,z)$ y $w(y,z)$ se miden ahora en el sistema de referencia general, mientras que anteriormente se formularon en coordenadas locales (s, η)

<A.1 PARÁMETROS MECÁNICOS de la sección en cajón unicelular>

<ANEXO A>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Parámetros de la flexión.** Adoptaremos *espesores medios* para las distintas paredes así como parámetros adimensionales de área $\alpha_i = A_{fi}/A_w$, siendo A_{f1} , A_{f2} y A_w las áreas de las alas superior e inferiores y de las almas respectivamente



(A) Definición geométrica y ejes para la flexión

$$\rho = \frac{B}{b} \quad , \quad \beta_2 = \frac{b_{f2}}{b}$$

$$A = [\alpha_1 + 2(1 + \alpha_2)]A_w$$

$$\zeta_G = \frac{1 + 2\alpha_2}{\alpha_1 + 2(1 + \alpha_2)} \quad , \quad I_G = I_y + I_z$$

$$I_y = \frac{1 + 2(\alpha_1 + 2\alpha_2) + 6\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1 + 2(1 + \alpha_2)} \frac{A_w h^2}{3}$$

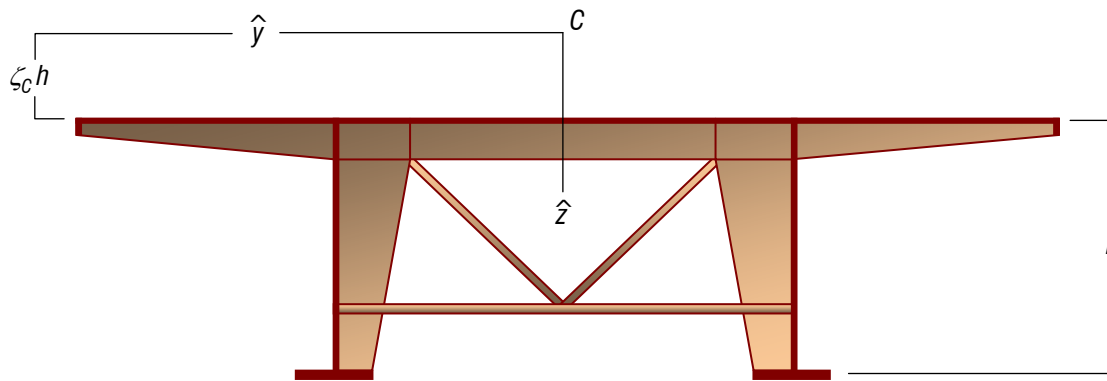
$$I_z = \left[\alpha_1 \rho^2 + 6 + 2\alpha_2 (3 + \beta_2^2) \right] \frac{A_w b^2}{12}$$

<A.2 PARÁMETROS MECÁNICOS de la sección doble-viga>

<ANEXO A>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Parámetros de la torsión.** Nuevamente adoptamos *espesores medios* para las distintas paredes así como parámetros adimensionales de área $\alpha_i = A_{fi}/A_w$, siendo A_{f1} , A_{f2} y A_w las áreas de las alas superior e inferiores y de las almas respectivamente



(B) Ejes para la torsión

$$\zeta_C = \frac{3 + 2\alpha_2(3 - \beta_2^2)}{\alpha_1\rho^2 + 6 + 2\alpha_2(3 + \beta_2^2)}$$

$$J = \frac{1}{3} A_w (2e_w^2 + \alpha_1 e_{f1}^2 + 2\alpha_2 e_{f2}^2)$$

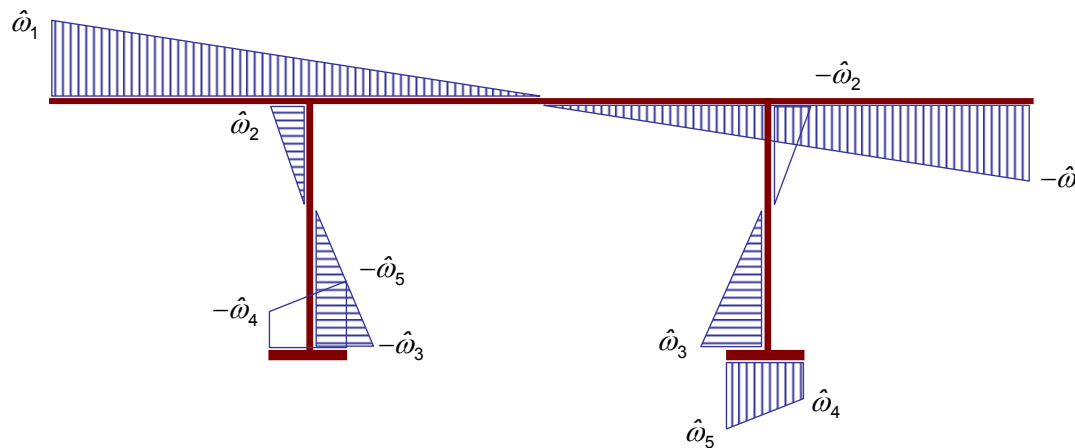
$$I_C = I_G + (\zeta_C - \zeta_G)^2 [\alpha_1 + 2(1 + \alpha_2)] A_w h^2$$

<A.2 PARÁMETROS MECÁNICOS de la sección doble-viga>

<ANEXO A>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

■ **Parámetros de la torsión** (*continuación*). Las fórmulas propuestas corresponden a despreciar la colaboración de un posible plano inferior de arriostramiento entre las vigas longitudinales



$$\hat{w}_1 = \varsigma_c B h / 2$$

$$\hat{w}_2 = \varsigma_c b h / 2$$

$$\hat{w}_3 = (1 - \varsigma_c) b h / 2$$

$$\hat{w}_4 = [1 - \beta_2 - \varsigma_c (1 + \beta_2)] b h / 2$$

$$\hat{w}_5 = [1 + \beta_2 - \varsigma_c (1 - \beta_2)] b h / 2$$

(C) Alabeo unitario

$$I_{\hat{w}} = \frac{1}{12} \left\{ \varsigma_c^2 (\alpha_1 \rho^2 + 6) + 2(1 - 3\varsigma_c) + 2\alpha_2 [3(1 - \varsigma_c)^2 + \beta_2^2 (1 + \varsigma_c)^2] \right\} A_w (b h)^2$$

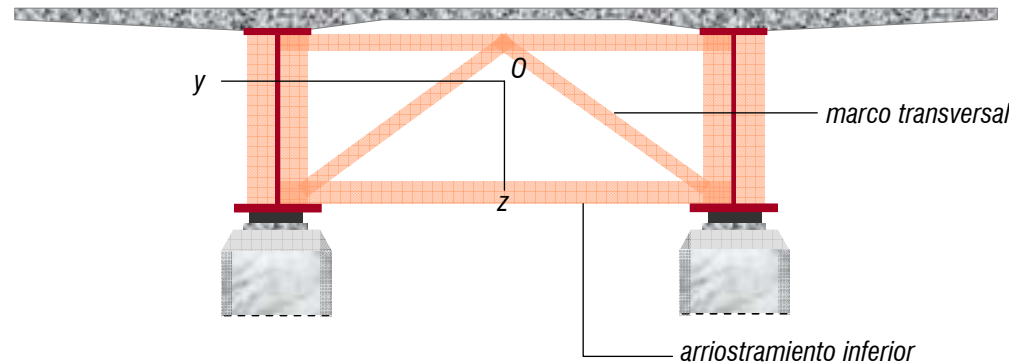
<A.2 PARÁMETROS MECÁNICOS de la sección doble-viga>

<ANEXO A>

01 El modelo viga en el análisis de tableros

▪ **Parámetros de la distorsión.** En tableros de doble-viga, es usual disponer un *plano de arriostramiento inferior*, tanto por motivos constructivos como resistentes. Su efecto sobre la torsión y la distorsión es apreciable y puede computarse transformando el sistema doble-viga en un cajón equivalente utilizando el espesor ficticio e^* correspondiente (ver sección 1.3) y aplicando las fórmulas de la sección unicelular. En cualquier caso, el control de la distorsión siempre requerirá marcos o diafragmas transversales puesto que su esbeltez λ_D^* seguirá siendo muy baja, aún teniendo en cuenta este arriostramiento

▪ **Secciones mixtas.** Su tratamiento se llevará a cabo de acuerdo con las indicaciones de la sección 1.3, homogeneizando las propiedades de la losa superior a las del acero estructural, pero cuidando de respetar su posición espacial real (*respetando el canto total h*)



- 2.0 Motivación**
- 2.1 Modelado del tablero**
- 2.2 Disposición de la malla para plantas más generales**
- 2.3 Introducción de acciones e interpretación de resultados**

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

❑ Después del **elemento 1D** o **viga**, el siguiente modelo que se aborda es el **sistema 1D** o **emparrillado** de barras. Para regular su aplicación al análisis de puentes debemos

- **Identificar** los tableros aptos
- **Establecer** las reglas para su correcto modelado como sistema de barras en el contexto de los puentes rectos
- **Extender** su aplicación a otras geometrías en planta
- **Aplicar** los resultados del cálculo del modelo a la comprobación de la construcción real (*ELS* y *ELU*)

❑ Vamos a desarrollar todos estos aspectos aplicados del modelo en el **marco actual del análisis estructural** (gran difusión de los códigos de **EF** y ordenadores eficientes y accesibles), marginando todas aquellas características tradicionalmente presentadas en los textos pero que solo se justifican en un **contexto seminal** o histórico del método

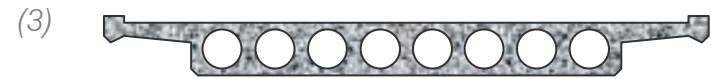
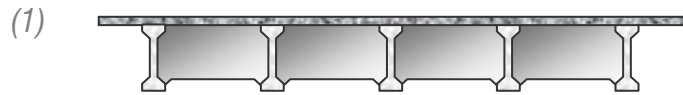
02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

□ En el marco del *análisis estructural*

- Un emparrillado es un *sistema espacial de elementos 1D o barras*
- Su análisis se lleva a cabo por el método de rigidez, lo cual proporciona una *gran versatilidad* respecto a formas y condiciones de contorno
- Por otra parte, si el emparrillado consiste en una retícula plana, ortogonal y uniforme (separación y características de los elementos homogéneas) también puede reproducir con suficiente precisión el comportamiento de cuerpos continuos como las *losas rectas*

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

❑ En el contexto del **análisis de puentes**, determinados tableros muestran una gran proximidad morfológica a estos sistemas: los tableros de vigas y losa con riostras transversales (1), pero también son frecuentes los tableros losa, macizos (2) o aligerados (3)



❑ En cualquier caso, el **análisis del tablero** requerirá **plasmar** el modelo e **interpretar** los resultados del cálculo

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

□ Trataremos en primer lugar los *tableros de planta recta*, dejando para más adelante las restantes geometrías en planta e interesándonos en primer lugar por como *plasmear el modelo*, lo cual requiere satisfacer dos cuestiones:

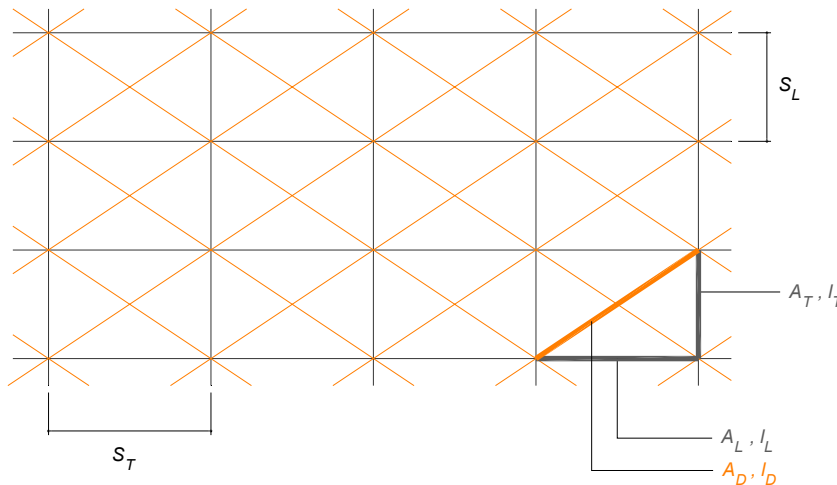
- *Definir la geometría de la retícula*
- *Establecer las características mecánicas de las barras*

□ Para todas las tipologías adecuadas a la elección del modelo emparrillado, daremos *reglas puestas al día* (en el contexto actual del cálculo de estructuras), a saber:

- *Tableros de vigas y losa*
- *Tableros de vigas celulares*
- *Tableros losa macizos*
- *Tableros losa aligerados*

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ El principal **handicap** del modelo emparrillado, aplicado al análisis de tableros de puentes, reside en su **incapacidad natural para captar adecuadamente la rigidez de membrana** de estas construcciones, tanto si se trata de un tablero losa como si es un tablero de vigas y losa. Comenzaremos por desarrollar las fórmulas adecuadas para la asimilación del medio continuo (losa) al sistema discreto (emparrillado) cuando se consideran únicamente acciones contenidas en el plano medio de ambos



$$I_L = s_T, \quad I_T = s_L$$

$$\lambda = \frac{I_L}{I_T} = \frac{s_T}{s_L}$$

$$I_D = \sqrt{I_L^2 + I_T^2} = \sqrt{s_T^2 + s_L^2}$$

$$I_L = \frac{\lambda I_D}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, \quad I_T = \frac{I_D}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

$$\Omega = I_L I_T = \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} I_D^2$$

$$\alpha_L = \frac{A_L}{A_D}, \quad \alpha_T = \frac{A_T}{A_D}$$

<2.1.0 UNA CUESTIÓN PREVIA: la acción de membrana de la losa>

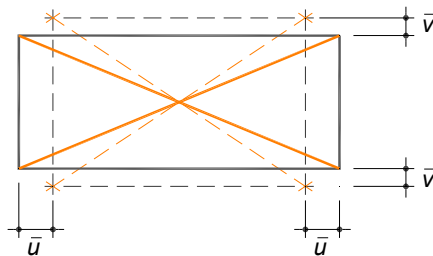
<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Energía de deformación del emparrillado

$$U_G = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L & \varepsilon_T & \varepsilon_D \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} EA_L I_L & 0 & 0 \\ 0 & EA_T I_T & 0 \\ 0 & 0 & 2EA_D I_D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \\ \varepsilon_D \end{Bmatrix} = EA_D I_D \left(\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L & \varepsilon_T \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\lambda \alpha_L}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\alpha_T}{\sqrt{1+\lambda^2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \end{Bmatrix} + \varepsilon_D^2 \right)$$

(1) Extensión de una celda elemental



$$\varepsilon_L = \frac{2\bar{u}}{l_L}, \quad \varepsilon_T = -\frac{2\bar{v}}{l_T}$$

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta l_D}{l_D} \approx 2 \frac{l_L \bar{u} - l_T \bar{v}}{l_D^2} = \left(\frac{l_L}{l_D} \right)^2 \varepsilon_L + \left(\frac{l_T}{l_D} \right)^2 \varepsilon_T$$

$$U_G = EA_D I_D \begin{Bmatrix} \varepsilon_L & \varepsilon_T \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} \left(\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} \right)^2 + \frac{\lambda \alpha_L}{2\sqrt{1+\lambda^2}} & \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 \\ \left(\frac{\lambda}{1+\lambda^2} \right)^2 & \frac{1}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{\alpha_T}{2\sqrt{1+\lambda^2}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \end{Bmatrix}$$

$$U_s = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \int_{\Omega} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \end{Bmatrix} d\Omega = \frac{1}{2} \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L & \varepsilon_T \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \nu \\ \nu & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_L \\ \varepsilon_T \end{Bmatrix} \Omega$$

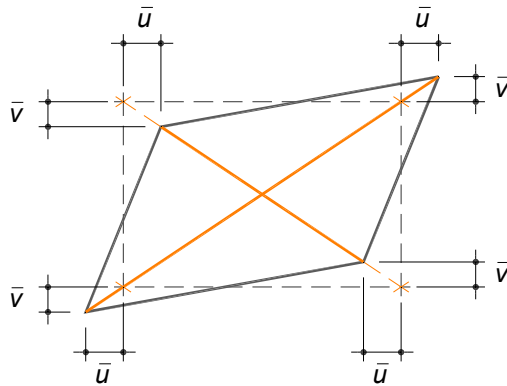
$$\frac{EA_D}{l_D} = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} \frac{\nu Eh}{1-\nu^2}$$

<2.1.0 UNA CUESTIÓN PREVIA: la acción de membrana de la losa>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(2) Distorsión de una celda elemental



$$\gamma = \frac{2\bar{u}}{l_T} + \frac{2\bar{v}}{l_L}$$

$$\varepsilon_D = \frac{\Delta l_D}{l_D} \approx 2 \frac{l_L \bar{u} + l_T \bar{v}}{l_D^2} = \frac{l_L l_T}{l_D^2} \left(\frac{2\bar{u}}{l_T} + \frac{2\bar{v}}{l_L} \right) = \frac{\Omega}{l_D^2} \gamma$$

$$U_s = \frac{1}{2} \int_{\Omega} Gh \gamma_{xy}^2 d\Omega = \frac{1}{2} \left[2 \int_{s=0}^{l_D} EA_D \varepsilon_D^2 ds \right] = U_G$$

$$\frac{1}{2} Gh \gamma^2 \Omega = EA_D \varepsilon_D^2 l_D = EA_D \left(\frac{\Omega}{l_D^2} \right)^2 \gamma^2 l_D$$

$$\frac{EA_D}{l_D} = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda} Gh$$

$$\frac{EA_D}{l_D} = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda} \frac{\nu Eh}{1 - \nu^2} = \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda} Gh$$

$$\frac{\nu Eh}{1 - \nu^2} = \frac{Eh}{2(1 + \nu)}$$

$$\nu = 1/3$$

$$A_D = \frac{G}{E} \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda} h l_D = \frac{3}{8} \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda} h l_D$$

$$A_L = \frac{G}{E} \frac{1 - \nu \lambda^2}{\lambda \nu} h l_L = \frac{3}{4} \frac{3 - \lambda^2}{2\lambda} h l_L$$

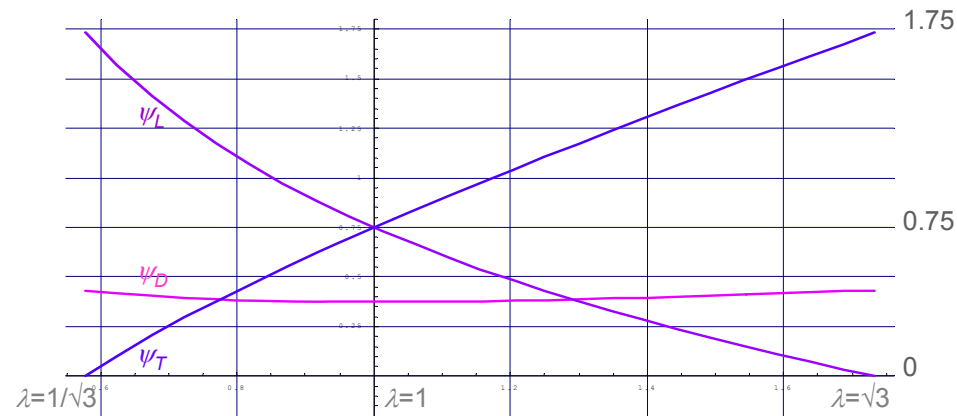
$$A_T = \frac{G}{E} \frac{\lambda^2 - \nu}{\lambda \nu} h l_T = \frac{3}{4} \frac{3\lambda^2 - 1}{2\lambda} h l_T$$

<2.1.0 UNA CUESTIÓN PREVIA: la acción de membrana de la losa>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

$$\psi_L = \frac{A_L}{hI_L} = \frac{3}{4} \frac{3 - \lambda^2}{2\lambda}, \quad \psi_D = \frac{A_D}{hI_D} = \frac{3}{8} \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda}, \quad \psi_T = \frac{A_T}{hI_T} = \frac{3}{4} \frac{3\lambda^2 - 1}{2\lambda}$$



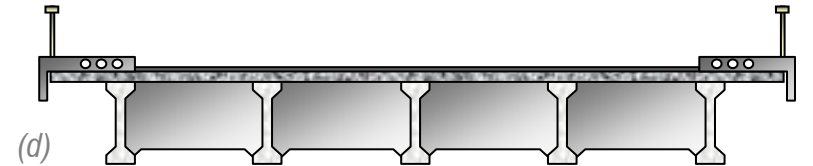
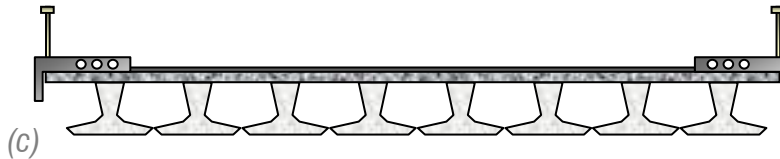
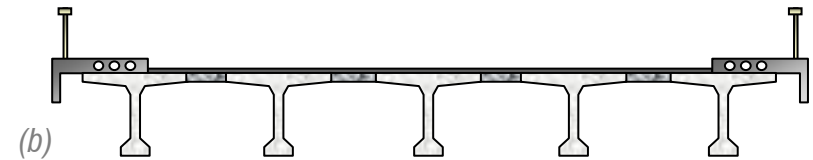
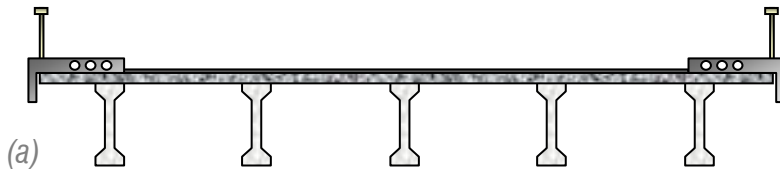
λ	$1/\sqrt{3}$	$3/4$	1	$3/2$	$\sqrt{3}$
ψ_L	$\sqrt{3}$	1.2188	$3/4$	0.1875	0
ψ_D	$\sqrt{3}/4$	0.3906	$3/8$	0.4063	$\sqrt{3}/4$
ψ_T	0	0.3438	$3/4$	1.4375	$\sqrt{3}$

<2.1.0 UNA CUESTIÓN PREVIA: la acción de membrana de la losa>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ En este apartado incluiremos los tableros formados por distintos tipos de **vigas prefabricadas**: en I (a), de ala ancha (b), yuxtapuestas (c), contemplando además la posibilidad de riostras transversales (d)



■ Añadiremos que los **tableros mixtos** de vigas de acero estructural bajo calzada pueden modelarse del mismo modo que los anteriores, del tipo (a) o (d)

<2.1.1 TABLEROS DE VIGAS Y LOSA>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ **Geometría del emparrillado de barras.** Supondremos que, en principio, el tablero es del tipo (a), luego no posee riostras transversales. En tal caso el emparrillado estará organizado en dos planos, asociando el *superior* a la **acción de la losa** y el *inferior* a la **acción de las vigas físicas**

1) *Plano inferior* (acción de las vigas físicas)

(a) **elementos longitudinales:** según las vigas reales

2) *Plano superior* (acción de la losa)

(a) **elementos longitudinales:** según las vigas reales y a $0.3h_c$ de los borde libres (nervios de borde). Disponer elementos intermedios proporciona mayor refinamiento al modelado de la losa superior y puede ser necesario en tableros de gran anchura, para mantener valores aceptables del parámetro de malla λ o bien si $s_L \geq L/6$

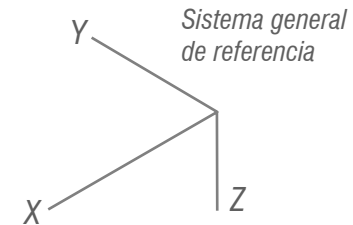
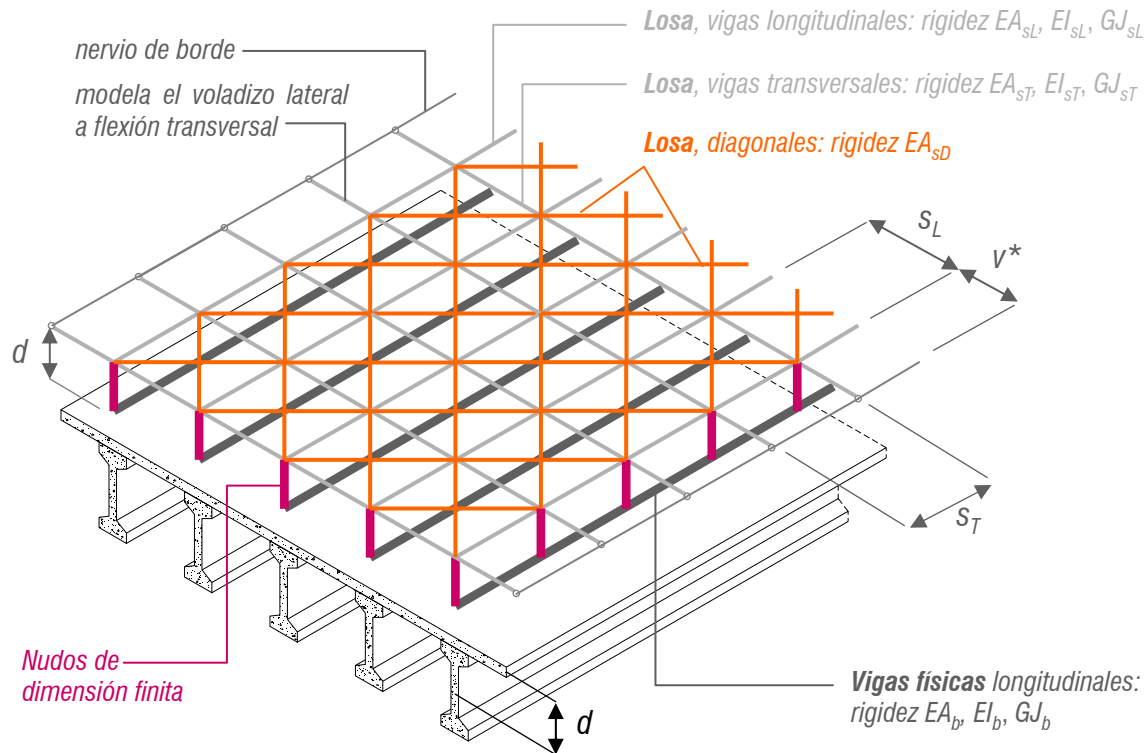
(b) **elementos transversales:** sobre apoyos y divisiones intermedias hasta disponer un **mínimo** de 9 barras transversales (en tableros estrechos puede ser necesario distribuir más elementos para ajustar el parámetro de malla λ)

(c) **diagonales:** entre los nudos de la retícula superior. Se desconectarán las rotaciones θ_x , θ_y y θ_z en ambos extremos

<2.1.1 TABLEROS DE VIGAS Y LOSA>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros



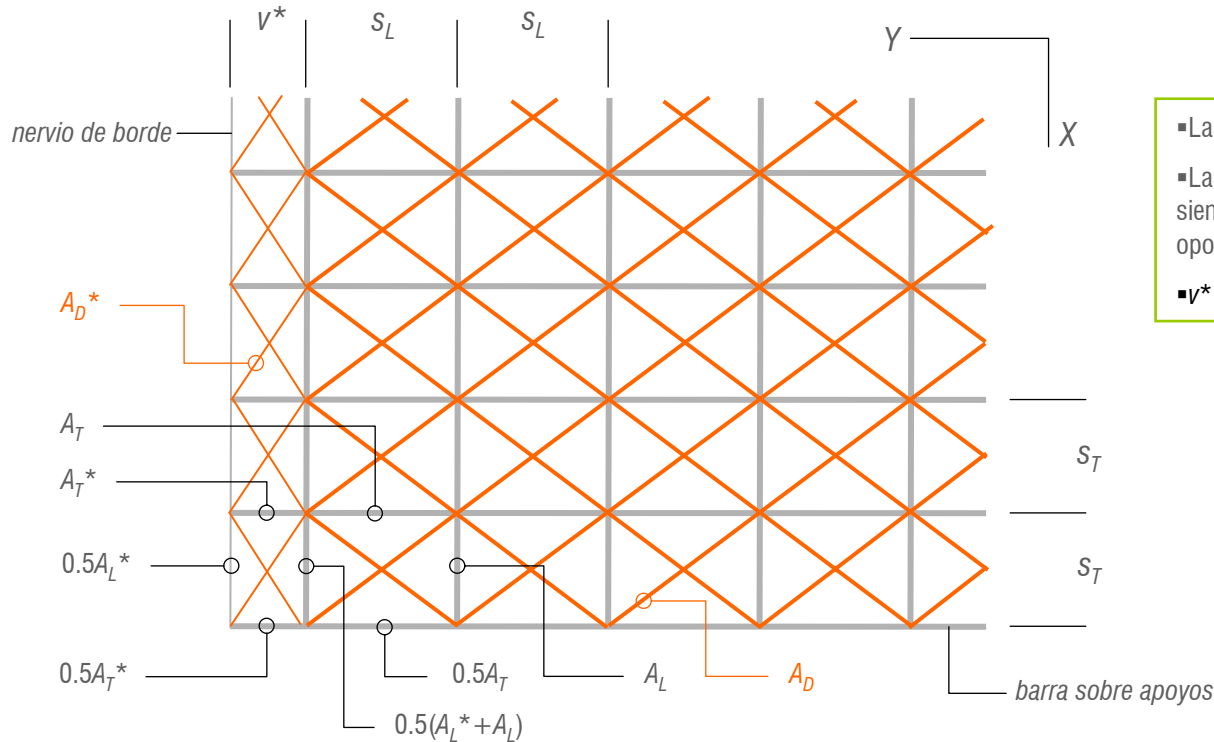
- Grados de libertad: $\mathbf{u}^e = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$
- Parámetros mecánicos: $A, \alpha_y, \alpha_z, J, I_y, I_z$
- En general los voladizos laterales serán de ancho $v=0.5s_L$, y se podrá incorporar su rigidez de membrana por el procedimiento descrito siempre que $s_T/v \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. De lo contrario, solo cabrá computar su flexión transversal en la forma en que se representa en la Figura

<2.1.1 TABLEROS DE VIGAS Y LOSA>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Características mecánicas de las barras del plano superior, “acción membrana”

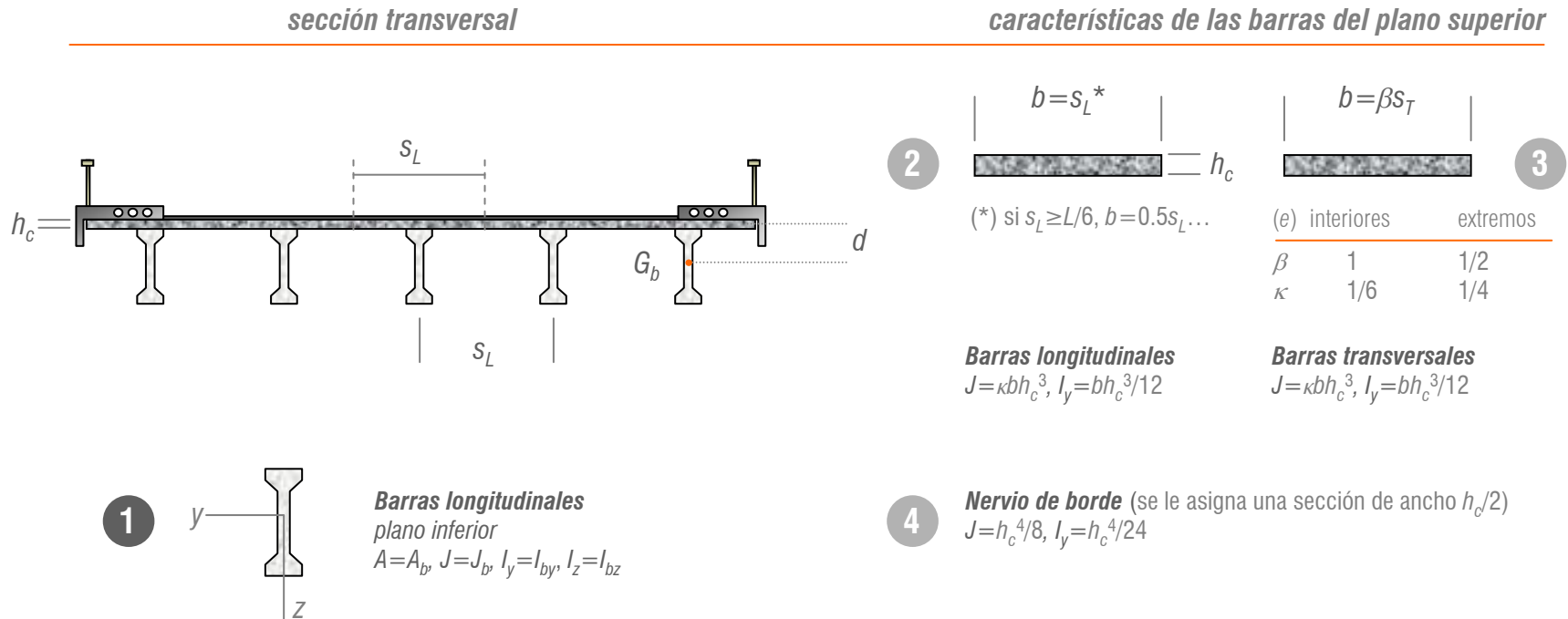


<2.1.1 TABLEROS DE VIGAS Y LOSA>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Características mecánicas de las barras, “acción emparrillado”

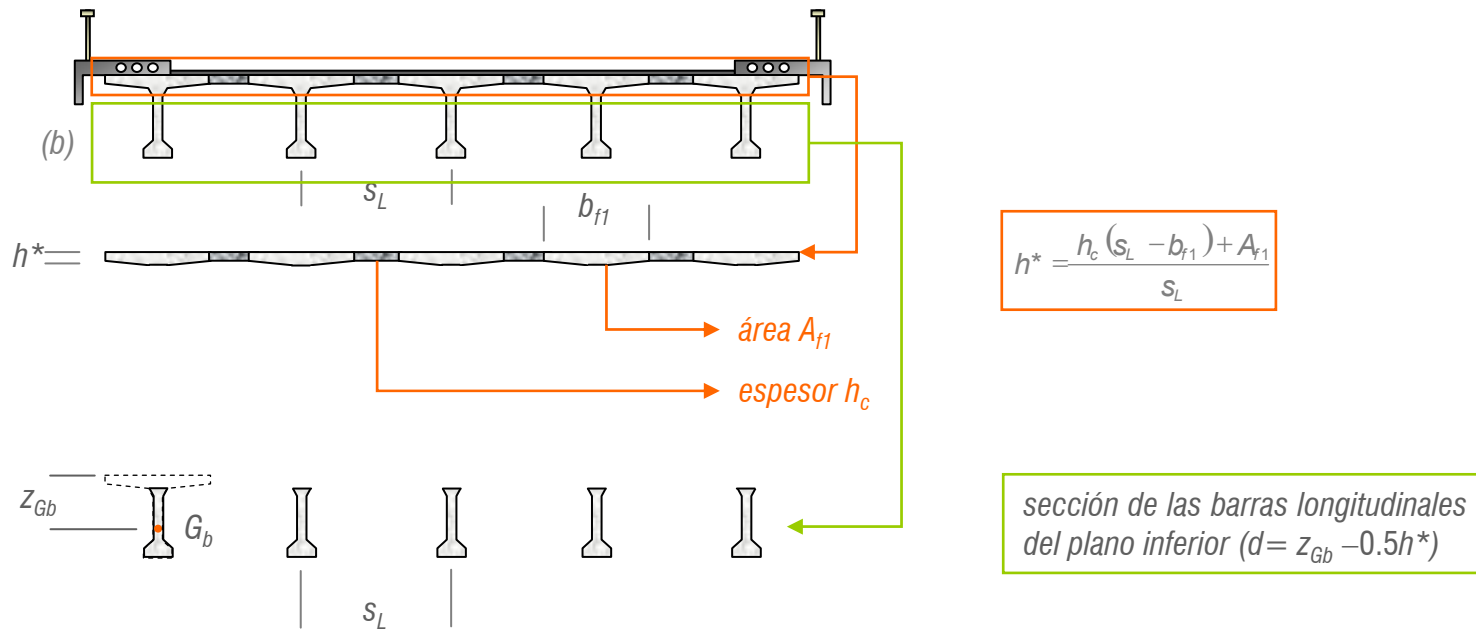


<2.1.1 TABLEROS DE VIGAS Y LOSA>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

▪ **Otros casos:** tableros tipo (b). Se analizan como los anteriores (*modelo biplano*), incorporando las alas a la losa superior

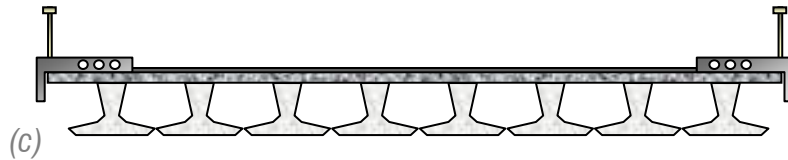


<2.1.1 TABLEROS DE VIGAS Y LOSA>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

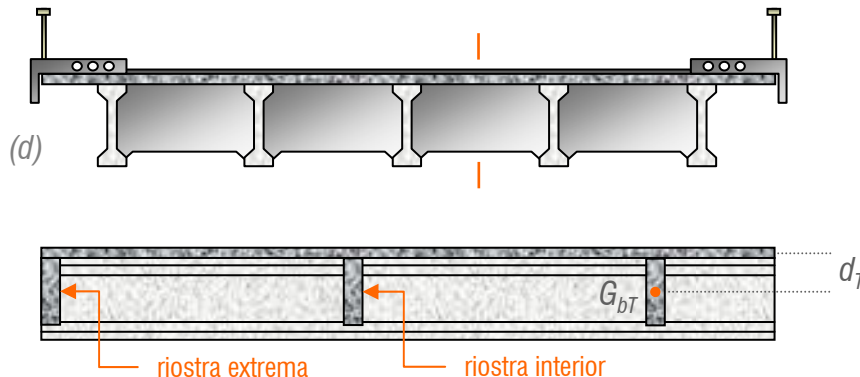
02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

▪ **Otros casos:** tableros tipo (c). Su modelado se lleva a cabo de idéntica forma que en los tableros del tipo (a)



En estos tableros se suele cumplir $s_L < L/6$, por lo que para las barras longitudinales interiores se tendrá directamente $b = s_L$

▪ **Otros casos:** tableros tipo (d). Las riostras exigen otro plano de barras y condicionan el mallado en el plano superior



Plano intermedio (modelo triplano) para la acción de las riostras interiores, que contiene **elementos transversales** dispuestos según las vigas físicas, $d_T = z_{GbT} - 0.5h_c$

Nudos de dimensión finita para la conexión del plano superior y el plano intermedio

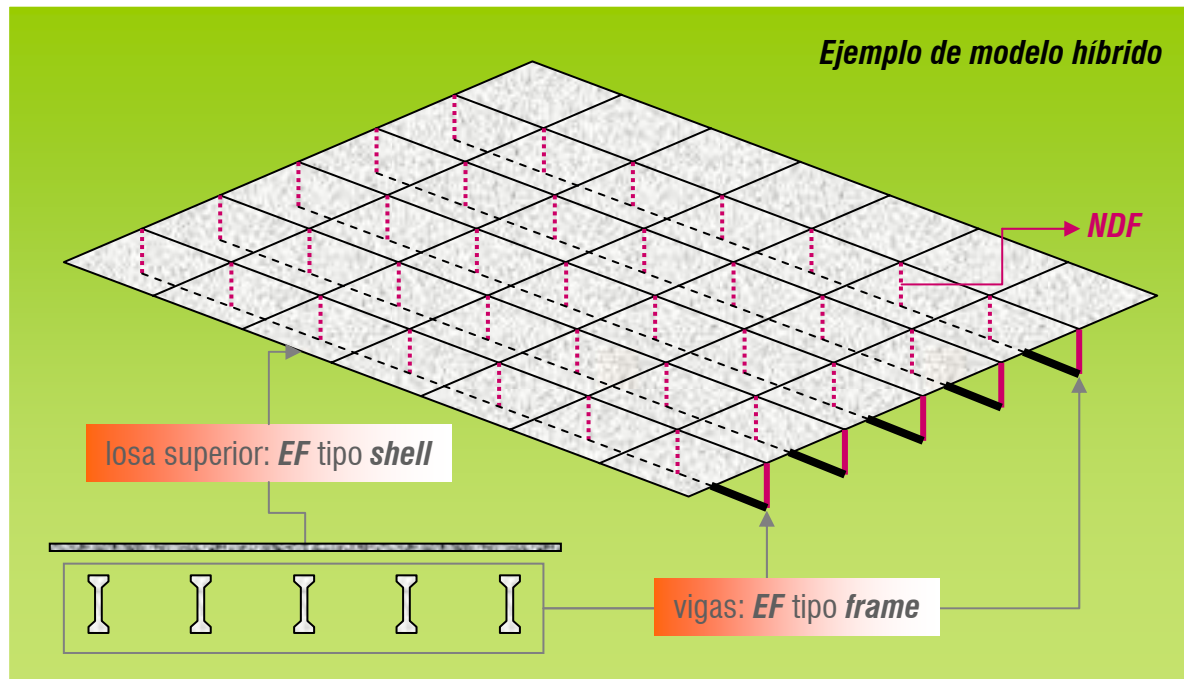
Riostras extremas: si difieren de las interiores, se modelarán individualmente, en su posición espacial real

<2.1.1 TABLEROS DE VIGAS Y LOSA>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

▪ **Modelo alternativo:** para estos tableros, se puede optar por un sistema híbrido 1D(vigas) + 2D(losa), que adicionalmente permite captar de forma exacta la **flexión local** y el **arrastre de cortante** del piso del tablero

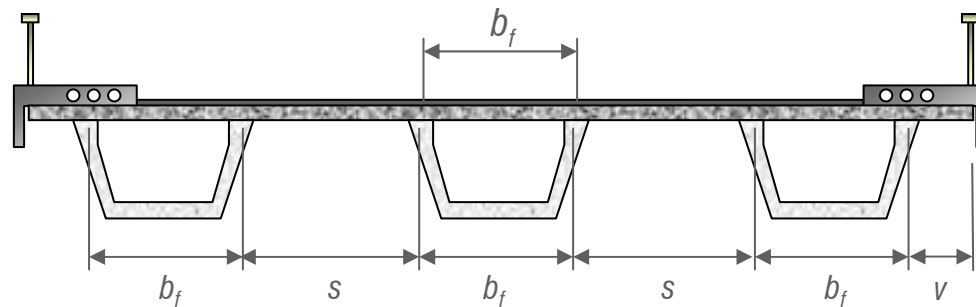


<2.1.1 TABLEROS DE VIGAS Y LOSA>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Abordemos ahora los tableros formados por **dos o más vigas artesa**, generalmente prefabricadas, unidas transversalmente mediante una losa sobrepuesta hormigonada in situ. Supondremos que cada artesa se comporta como una viga, para lo cual deberá controlarse la relación b_f/L . Si la condición anterior no se ve satisfecha, se debe optar por el modelo **lámina plegada**



$$s = s_{VA} - b_f$$

en general, se cumple $s > b_f$

■ La gran rigidez torsional de las **vigas celulares** proporciona empotramiento a las bandas de losa entre artesas, lo cual permite aumentar s . Este efecto aumenta si se disponen diafragmas transversales sobre apoyos

<2.1.2 TABLEROS DE VIGAS CELULARES>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ **Geometría del emparrillado de barras.** Supondremos que, en principio, el tablero no posee riostras transversales. En tal caso el emparrillado estará nuevamente organizado en dos planos, asociando el *superior* a la **acción de la losa** y el *inferior* a la **acción de las vigas artesa**

1) *Plano inferior* (acción de las vigas físicas)

(a) **elementos longitudinales:** según las vigas reales

2) *Plano superior* (acción de la losa)

(a) **elementos longitudinales:** según la unión alma-losa de las vigas reales, a $0.3h_c$ de los borde libres (nervios de borde) y al menos un elemento intermedio por banda de losa entre artesas, por lo que $n_{Lmin} = 3n_{VA} + 1$ (aquí se computa los nervios de borde). Más elementos proporcionan mayor refinamiento del modelado de la losa y son necesarios en tableros de gran anchura, para mantener valores aceptables del parámetro de malla λ o bien si $s \geq L/4$

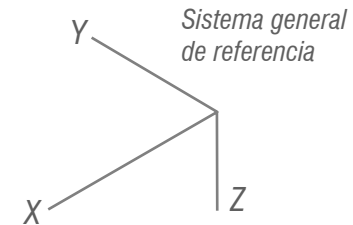
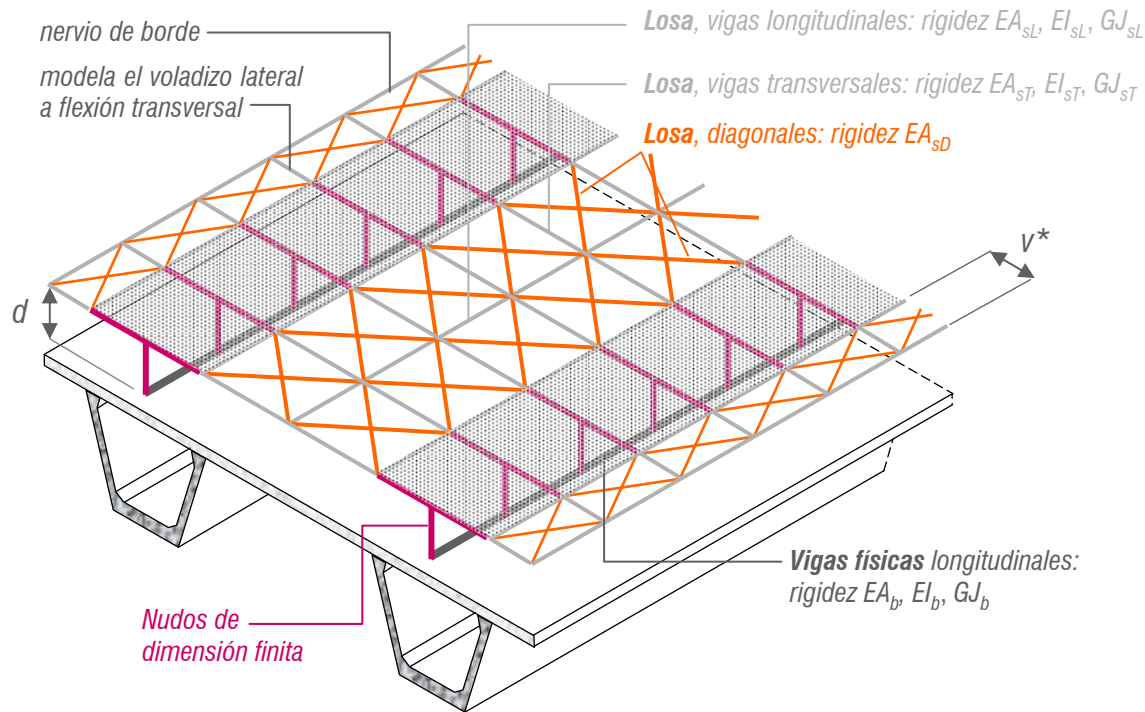
(b) **elementos transversales:** sobre apoyos y divisiones intermedias hasta disponer un **mínimo** de 9 barras transversales (en tableros estrechos puede ser necesario distribuir más elementos para ajustar el parámetro de malla λ)

(c) **diagonales:** entre los nudos de la retícula superior, adecuadamente desconectadas

<2.1.2 TABLEROS DE VIGAS CELULARES>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros



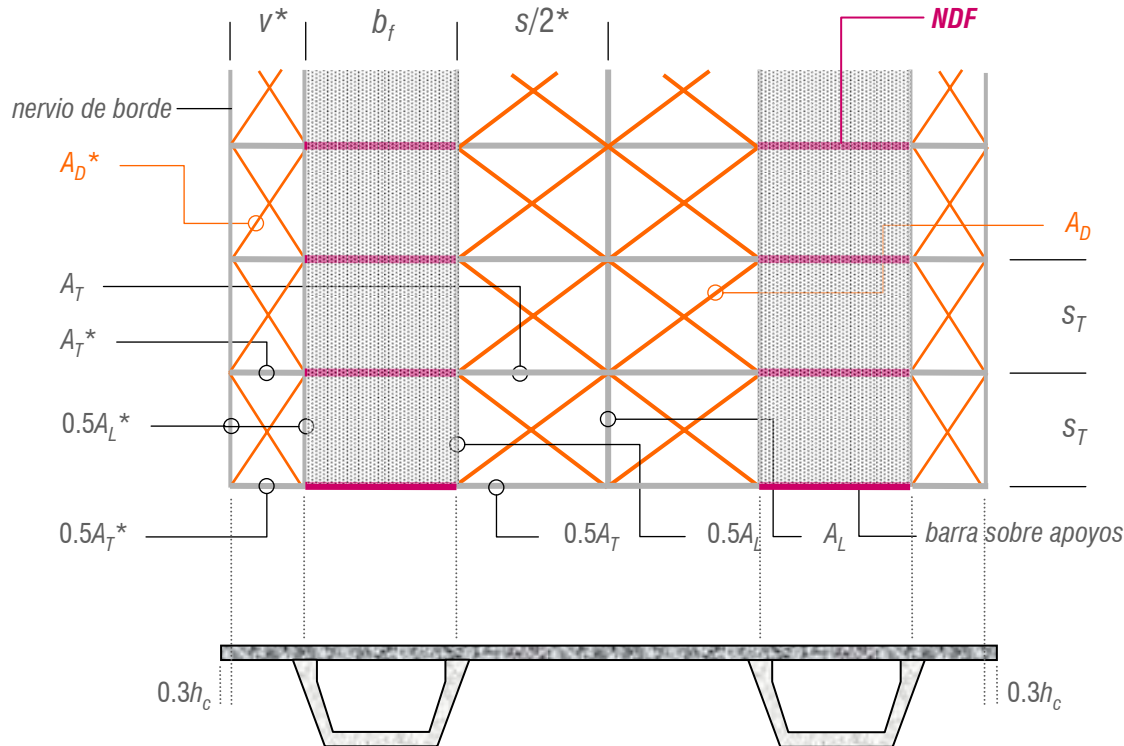
- Grados de libertad: $\mathbf{u}^e = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z\}^T$
- Parámetros mecánicos: $A, \alpha_y, \alpha_z, J, I_y, I_z$
- En general los voladizos laterales serán de ancho $v > 0.5b_f$, y se podrá incorporar su rigidez de membrana por el procedimiento descrito siempre que $s_T/v^* \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. De lo contrario, solo cabrá computar su flexión transversal o modificar el mallado

<2.1.2 TABLEROS DE VIGAS CELULARES>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Características mecánicas de las barras, “acción membrana”



■ Las áreas A_L , A_T y A_D se determinan con $\lambda = 2s_T/s$, $\lambda = 3s_T/s \dots$ y h_c

■ Las áreas A_L^* , A_T^* y A_D^* se determinan con $\lambda^* = s_T/v^*$ y h_c siempre que $\lambda^* \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, para lo cual puede resultar oportuno modificar el mallado principal

■ $v^* = v - 0.3h_c$

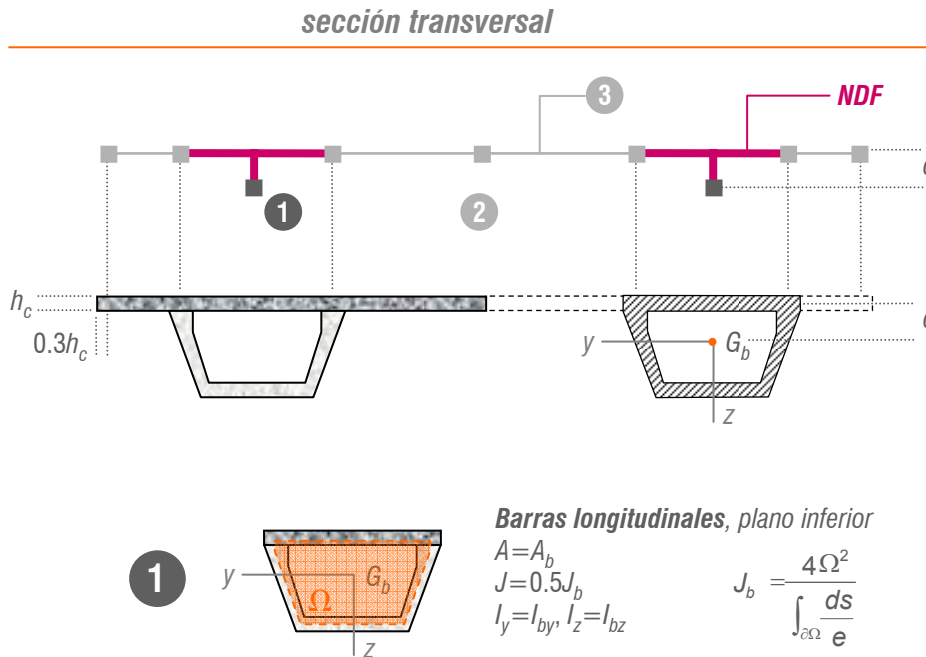
■ (*) Banda entre vigas artesas: la separación entre barras longitudinales será igual a $s/2$, $s/3 \dots$ en función de s/L y del ajuste de λ y λ^*

<2.1.2 TABLEROS DE VIGAS CELULARES>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Características mecánicas de las barras, “acción emparrillado”



Barras longitudinales, plano inferior

$$A = A_b$$

$$J = 0.5J_b$$

$$I_y = I_{by}, I_z = I_{bz}$$

$$J_b = \frac{4\Omega^2}{\int_{\partial\Omega} \frac{ds}{e}}$$

características de las barras del plano superior

	$b = \beta s / 2^* \text{ o } \beta v$		$b = \beta s_T$	
2				
	(e) exteriores	interiores	(e) interiores	extremos
β	1/2	1	1	1/2
κ	1/4	1/6	1/6	1/4

Barras longitudinales

$$J = \kappa b h_c^3, I_y = b h_c^3 / 12$$

Barras transversales

$$J = \kappa b h_c^3, I_y = b h_c^3 / 12$$

■ (*) si $s \geq L/4$, se añaden barras longitudinales y $b = \beta s / 3 \dots$

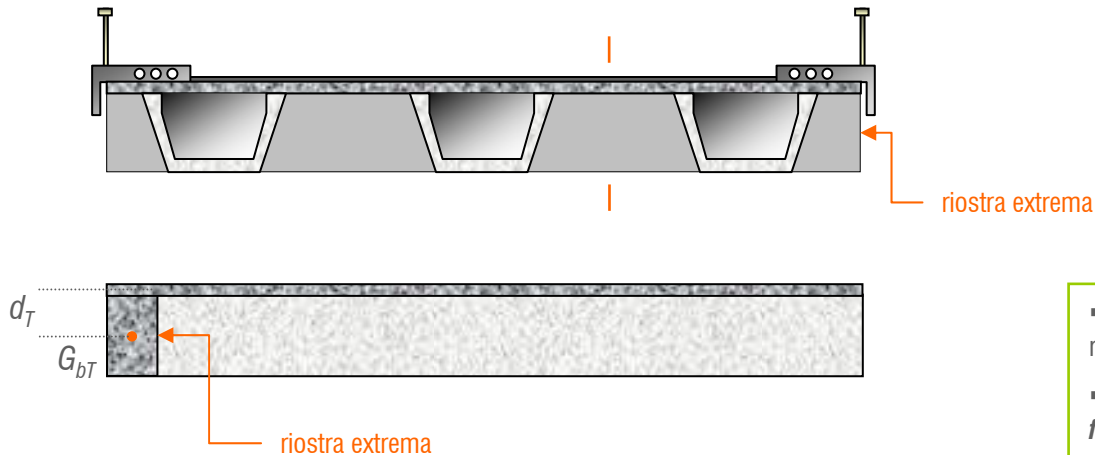
■ Al suponer indeformable la sección de las vigas cajón, de ancho b_f , la rigidez de los voladizos laterales debe asignarse totalmente a los elementos que se disponen en las bandas exteriores v^*

<2.1.2 TABLEROS DE VIGAS CELULARES>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ **Características mecánicas de las barras**, “acción emparrillado”: en estos tableros, se prescinde sistemáticamente de las riostras interiores. En cambio, disponer riostras extremas proporciona economía ya que permite reducir el canto de la losa sobrepuesta o bien aumentar la separación entre artesas.



- Las **riostras extremas** se modelan en su posición espacial real, $d_T = z_{GbT} - 0.5h_c$ dando lugar a un modelo **triplano**
- Se conectan al plano superior mediante **nudos de dimensión finita**

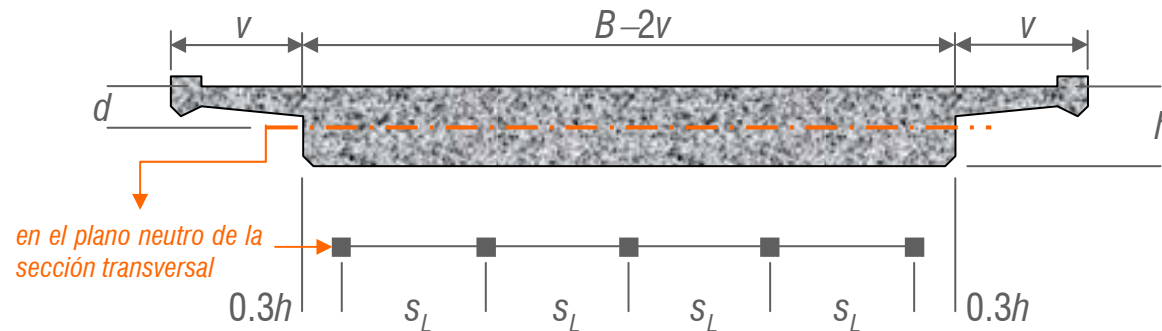
■ Finalmente, indicar que los **tableros mixtos** con dos o más vigas artesa en acero estructural y losa de HA sobrepuesta también pueden modelarse según las indicaciones de este apartado

<2.1.2 TABLEROS DE VIGAS CELULARES>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

- En este apartado trataremos los tableros de **sección maciza y espesor uniforme hormigonados in situ**, para los cuales el modelo emparrillado constituye tradicionalmente una herramienta eficiente para la estimación de la flexión, siempre que la relación $(B-2v)/L_{ef} > 1/4$

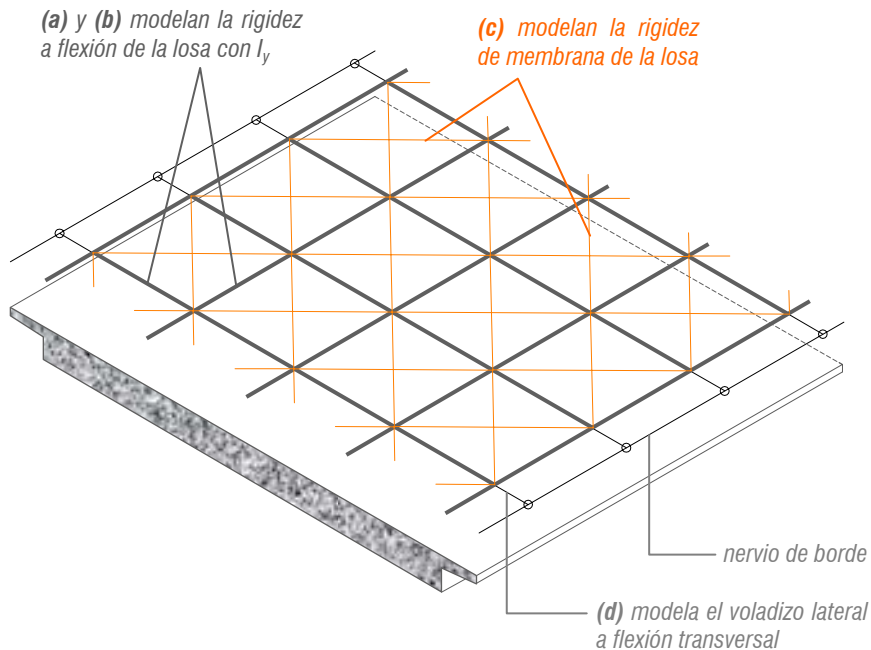


- Los **voladizos laterales** pueden modelarse en su posición espacial real, utilizando entonces **nudos de dimensión finita** para conectarlos al plano medio de la losa, pero como en general el vuelo v es pequeño comparado con el ancho B , resulta suficiente manejar un modelo de plano único

<2.1.3 TABLEROS LOSA MACIZOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros



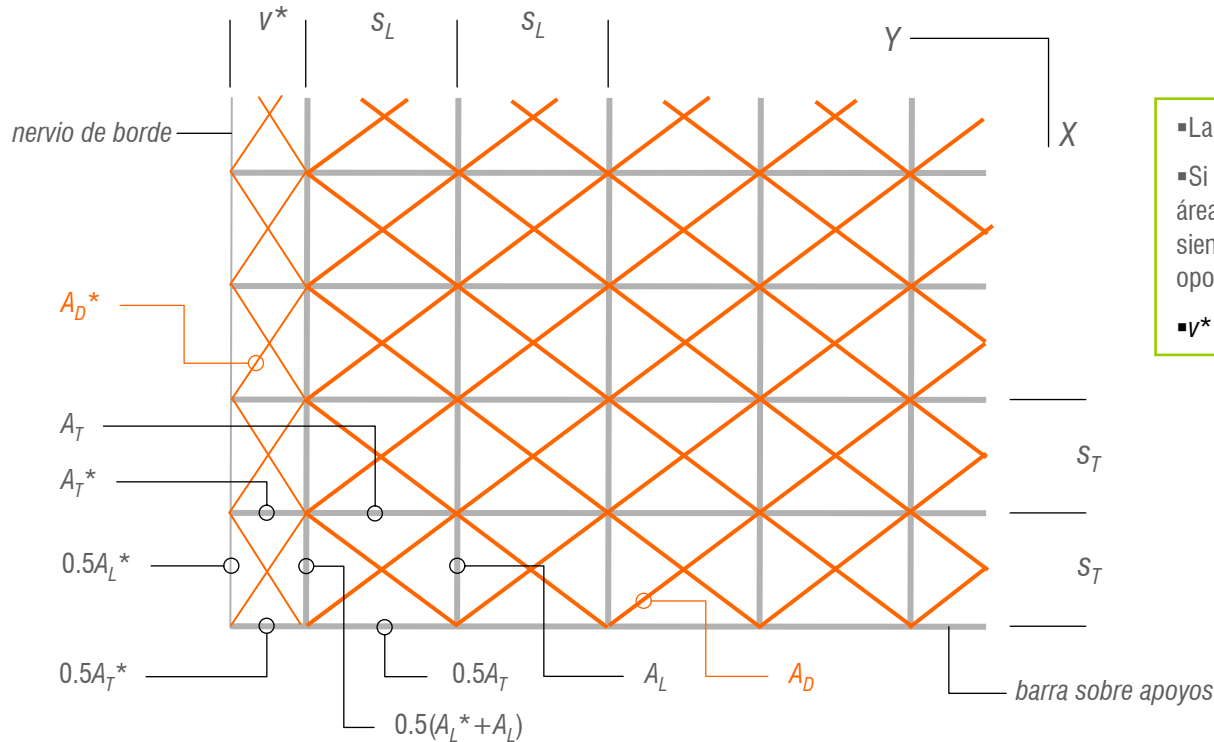
- (a) **Elementos longitudinales:** las barras exteriores se sitúan a $0.3h$ de la arista de la losa *sin voladizos*, distribuyendo las restantes uniformemente con $\lambda = s_T/s_L$ comprendido entre 1 (tableros anchos) y $\sqrt{3}$ (tableros estrechos) y respetando la posición de los aparatos de apoyo
- (b) **Elementos transversales:** obligatoriamente sobre apoyos, añadiendo barras intermedias separadas s_T , hasta disponer un **mínimo** de 9 barras transversales por vano
- (c) **diagonales:** entre los nudos de la retícula, desconectando las rotaciones θ_x , θ_y y θ_z en ambos extremos
- (d) **voladizos laterales:** si el tablero posee pequeños voladizos laterales de ancho v , se podrá incorporar su rigidez de membrana por el procedimiento descrito siempre que $s_T/v \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. De lo contrario, solo cabrá computar su flexión transversal en la forma en que se representa en la Figura. El nervio de borde se situará a $0.3h_c$ de la arista libre

<2.1.3 TABLEROS LOSA MACIZOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Características mecánicas de las barras, “acción membrana”



■ Las áreas A_L , A_T y A_D se determinan con $\lambda = s_T/s_L$ y h

■ Si h_v es el espesor medio de los voladizos laterales, las áreas A_L^* , A_T^* y A_D^* se determinan con $\lambda^* = s_T/v^*$ y h_v siempre que $\lambda^* \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, para lo cual puede resultar oportuno modificar el mallado principal

■ $v^* = v + 0.3(h - h_v)$

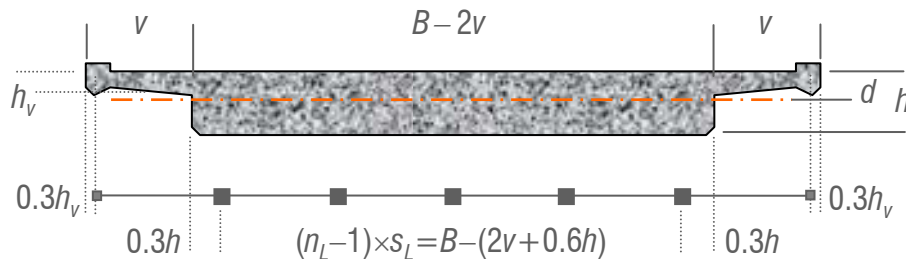
<2.1.3 TABLEROS LOSA MACIZOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ **Características mecánicas de las barras, “acción emparrillado”.** Grados de libertad: $\mathbf{u}^e = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y\}^T$, desconectando nodalmente las rotaciones coplanarias θ_z

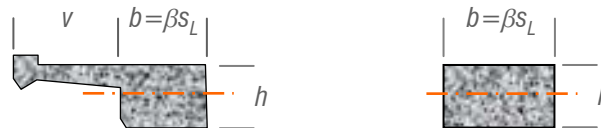
sección transversal



1

Barras longitudinales

$$J = \kappa b h^3, I_y = \rho b h^3 / 12$$



(e) exteriores

interiores

$$\beta = 1/2 + 0.3h/s_L$$

$$\kappa = 1/4$$

$$\rho = 1 + 3\varepsilon^2 + \gamma\delta [\delta^2 + 3(1-\varepsilon-\delta)^2]$$

$$1$$

$$1/6$$

$$1 + 3\varepsilon^2$$

características de las barras del emparrillado

2

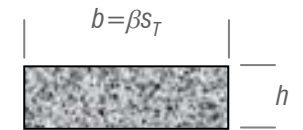
Barras transversales

banda central

$$J = \kappa b h^3, I_y = b h^3 / 12$$

bandas laterales (voladizos)

$$J = \kappa b h_v^3, I_y = b h_v^3 / 12$$



(e) interiores

extremos

$$\beta = 1$$

$$\kappa = 1/6$$

$$1/2$$

$$1/4$$

3

Nervio de borde (se le asigna una sección de ancho $h_v/2$)

$$J = h_v^4 / 8, I_y = h_v^4 / 24$$

$$\delta = \frac{h_v}{h}, \quad \gamma = \frac{v}{b}, \quad \alpha = \frac{2v}{B-2v} \delta, \quad \varepsilon = \frac{\alpha(1-\delta)}{1+\alpha}$$

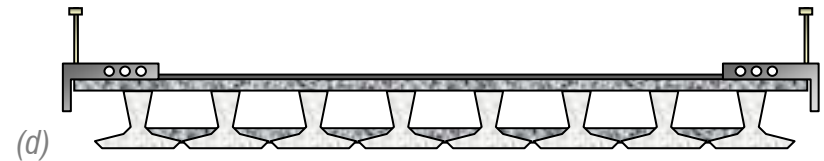
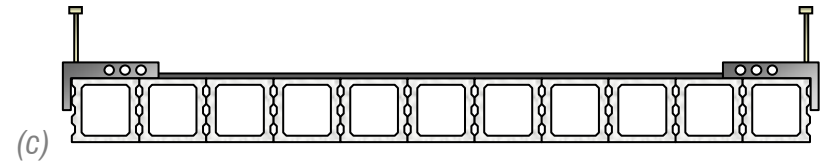
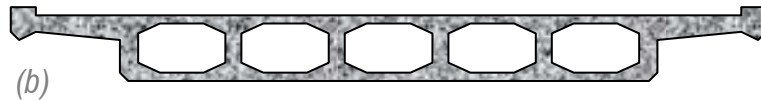
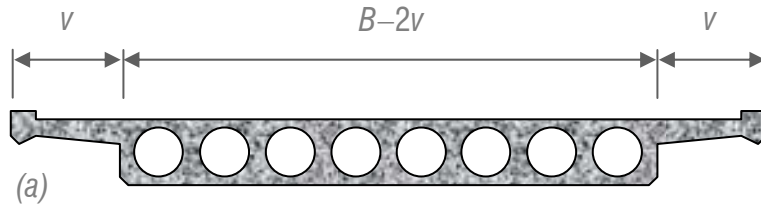
$$d = (1-\varepsilon)h/2$$

<2.1.3 TABLEROS LOSA MACIZOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Finalmente trataremos los tableros de **sección aligerada y espesor uniforme**. Estas losas suelen hormigonarse *in situ*, moldeando los alvéolos mediante piezas especiales de poliestireno expandido (a) o encofrados perdidos de madera (b). Menos frecuentes son los tableros a base de elementos prefabricados longitudinales, en los que la capacidad de reparto transversal se proporciona en obra, mediante llaves de cortante (c) o losas superior e inferior (d)

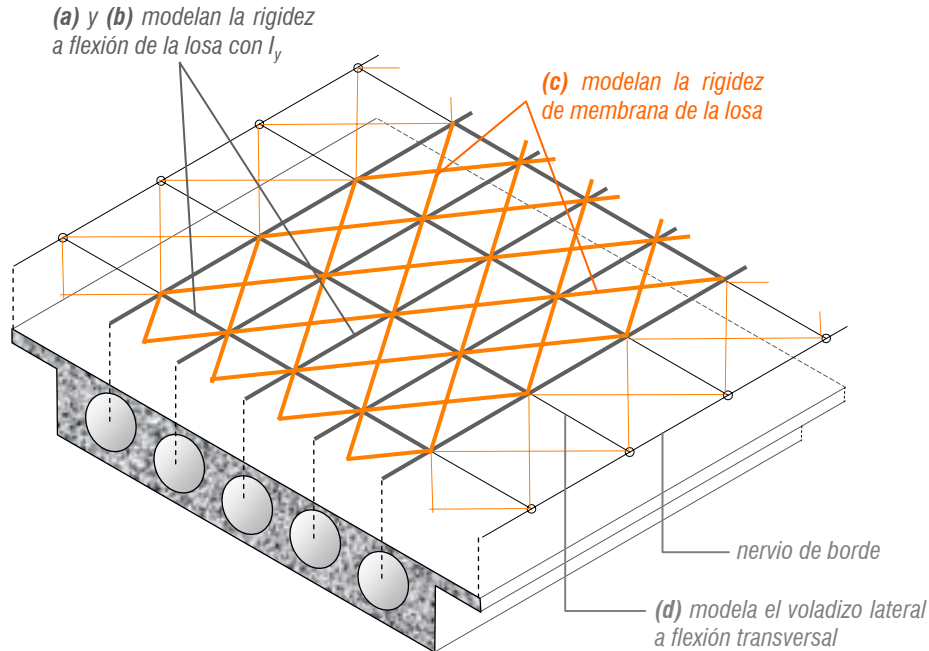


■ Para todos ellos, el modelo emparrillado también constituye una herramienta eficiente para la estimación de la flexión, siempre que la relación $(B-2v)/L_{ef} > 1/4$

<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros



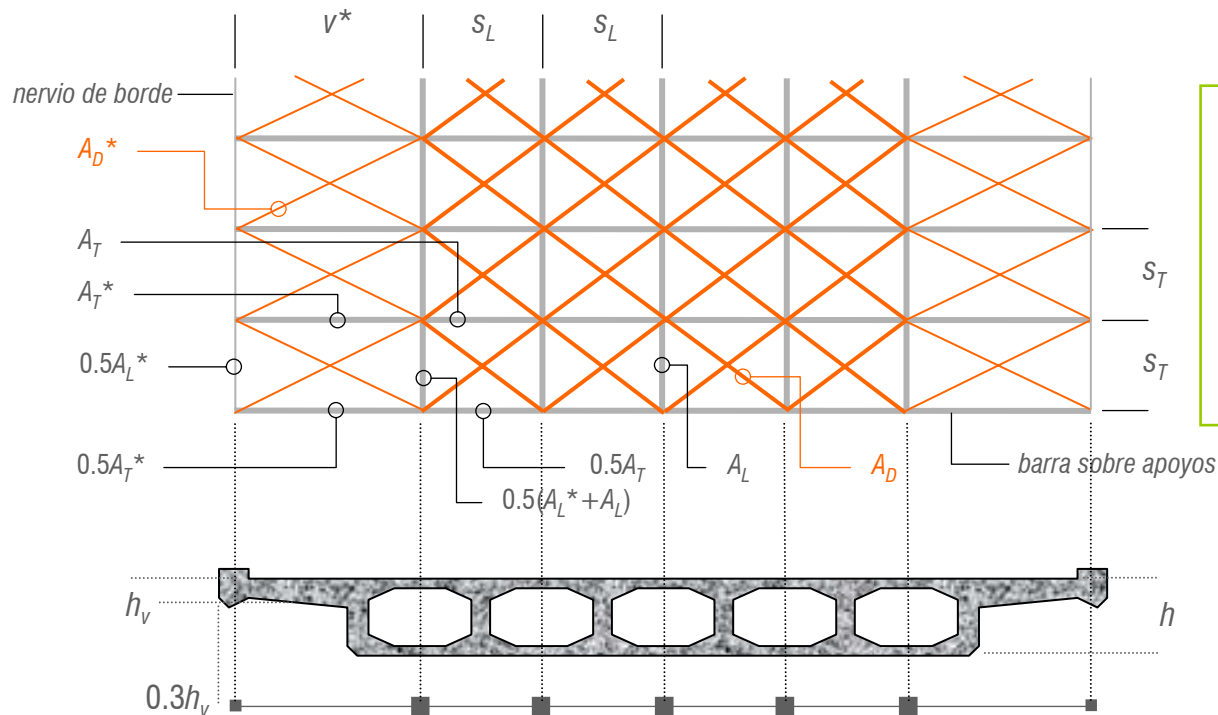
- (a) **Elementos longitudinales:** uno por aligeramiento
- (b) **Elementos transversales:** obligatoriamente sobre apoyos, añadiendo barras intermedias separadas s_T , hasta disponer un **mínimo** de 9 barras transversales por vano
- (c) **diagonales:** entre los nudos de la retícula, desconectando las rotaciones θ_x , θ_y y θ_z en ambos extremos
- (d) **voladizos laterales:** Los **voladizos laterales** pueden modelarse en su posición espacial real, utilizando entonces **nudos de dimensión finita** para conectarlos al plano medio de la losa, pero como en general el vuelo v es pequeño comparado con el ancho B , resulta suficiente manejar un modelo de plano único. En cualquier caso, se podrá incorporar su rigidez de membrana por el procedimiento habitual siempre que $s_T/v^* \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. De lo contrario, solo cabrá computar su flexión transversal. El nervio de borde se situará a $0.3h_c$ de la arista libre

<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ Características mecánicas de las barras, “acción membrana”



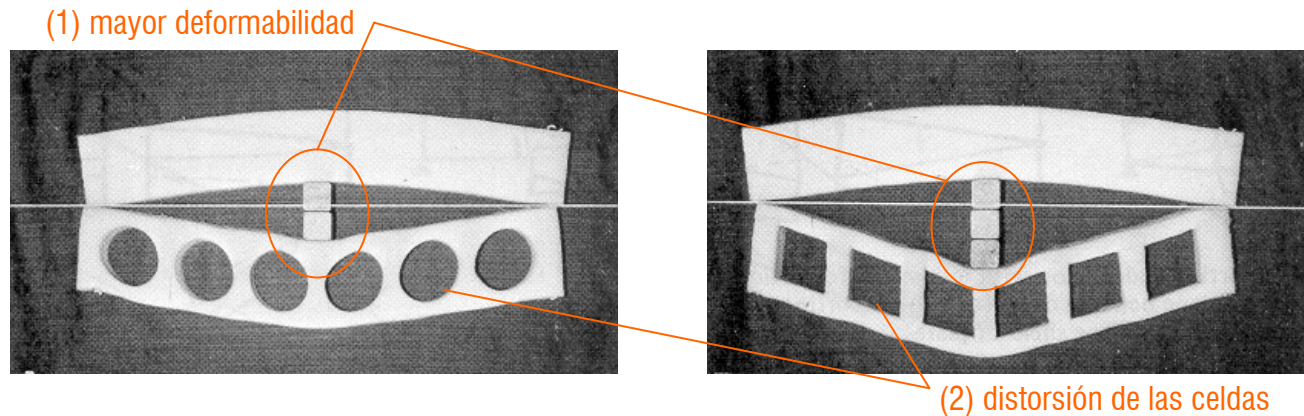
- Las áreas A_L , A_T y A_D se determinan con $\lambda = s_T/s_L$ y h^*
- Si h_v es el espesor medio de los voladizos laterales, las áreas A_L^* , A_T^* y A_D^* se determinan con $\lambda^* = s_T/v^*$ y h_v siempre que $\lambda^* \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, para lo cual puede resultar oportuno modificar el mallado principal
- $h^* = h - \varnothing$ o $e_{f1} + e_{f2}$, según el tipo de aligeramiento
- $v^* = 0.5[B - (n_L - 1)s_L] - 0.3h_v$, cuidando de excluir los dos nervios de borde del número de elementos longitudinales n_L

<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ **Características mecánicas de las barras**, “acción emparrillado”. La presencia de aligeramientos induce una **mayor deformabilidad** del sistema. Para ilustrar esta propiedad, resulta muy adecuado recurrir al ensayo representado a continuación, tomado de la obra de E.C. Hambly “*Bridge deck behaviour*”



- (1) y (2) inducen **pérdida de eficacia** a cambio del **ahorro de peso propio**
- La distorsión detectada exige computar la **deformación a cortante** de las barras transversales, lo cual requiere definir un área de cortante A_Q para estos elementos

<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

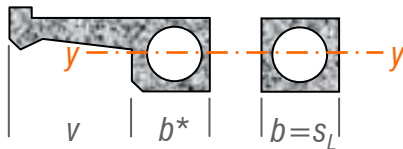
02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ **Características mecánicas de las barras, acción emparrillado.** Grados de libertad: $\mathbf{u}^e = \{u, v, w, \theta_x, \theta_y\}^T$, desconectando nodalmente las rotaciones coplanarias θ_z

elementos longitudinales

Parámetros de flexión

(a)



■ El momento de inercia I_y de cada sección transversal se determina respecto al plano neutro de la sección transversal completa, computando en su caso (vigas exteriores) el **ancho eficaz** del voladizo:

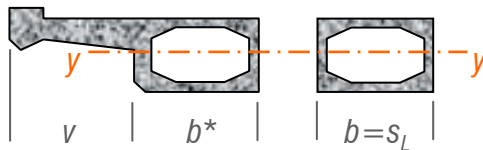
$$v_{ef} = \min\{L_{ef}/12, v\}$$

■ Para las vigas interiores del caso (a), si $v=0$ entonces:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \left[1 - \frac{3\pi\rho}{16} \left(\frac{d}{h} \right)^4 \right]$$

con $\rho = h/b$ y $d \equiv \emptyset$

(b)



■ Para el nervio de borde tomaremos de nuevo $I_y = h_v^4/24$ y $J = h_v^4/8$

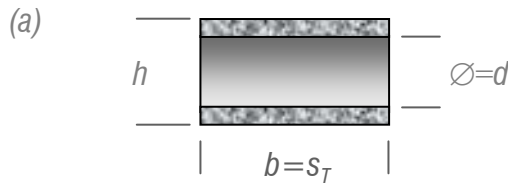
<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

elementos transversales

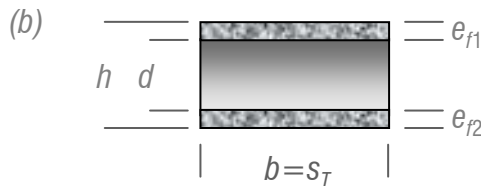
Parámetros de flexión



$$I_y = \frac{bh^3}{12} \left[\alpha \frac{e_w}{h} + \beta \right] , \quad A_Q = bh \left[\alpha' \frac{e_w}{h} - \beta' \right] \quad e_w: \text{espesor mínimo de las almas}$$

$$\alpha = 0.175 \left[1 - 0.198(d/h)^{-1.7} \right] , \quad \beta = 0.981 \left[1 - 0.095(d/h)^4 \right]$$

$$\alpha' = 0.626 \left[1 - 1.015(d/h) \right] , \quad \beta' = 0.055 \left[1 - 0.838(d/h)^{-2.2} \right]$$



$$\rho_i = e_{fi} / h , \quad \alpha_i = e_{fi} / e_w$$

$$I_y = \frac{bh^3}{12} \left[\rho_1^3 + \rho_2^3 \frac{3\rho_1\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (1 + d/h)^2 \right] , \quad A_Q = bh \left[(\rho_1^3 + \rho_2^3) \frac{2(1+\nu)(h/s_L)^2}{1 + (\alpha_1^3 + \alpha_2^3)(h/s_L)} \right]$$

■ **Barras extremas** (*riostros sobre apoyos*): son invariablemente de sección maciza, por lo que las fórmulas a aplicar corresponden al caso (a) con $(\alpha=0, \beta=1)$ y $(\alpha'=0, \beta'=0)$, siendo b el ancho de la viga riostra.

<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

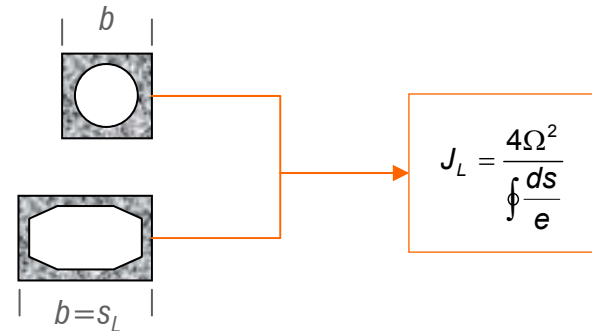
02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

Parámetros de torsión

elementos longitudinales

$$J = \frac{J_L}{1+q}$$

barras exteriores: se suele despreciar la colaboración del voladizo. Además el espesor del alma externa suele ser mayor que el de las almas interiores, e_w



$$q = \frac{J_T / s_T}{J_L / s_L}$$

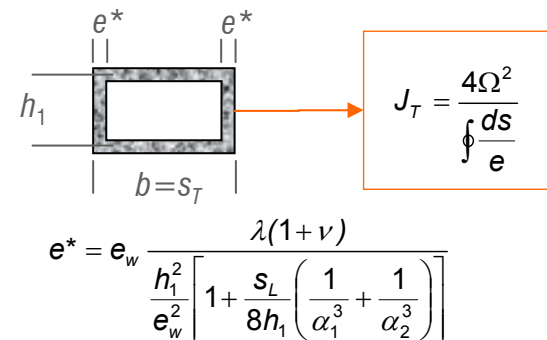
elementos transversales

$$J = \frac{J_T}{1+q}$$

barras extremas:(riostras sobre apoyos): son siempre de sección maciza, por lo que la fórmula a aplicar es

$$J = \kappa b h^3$$

y $\kappa = 0.25[1 - 0.63\rho(1 - \rho^4/12)]$ con $\rho = h/b$

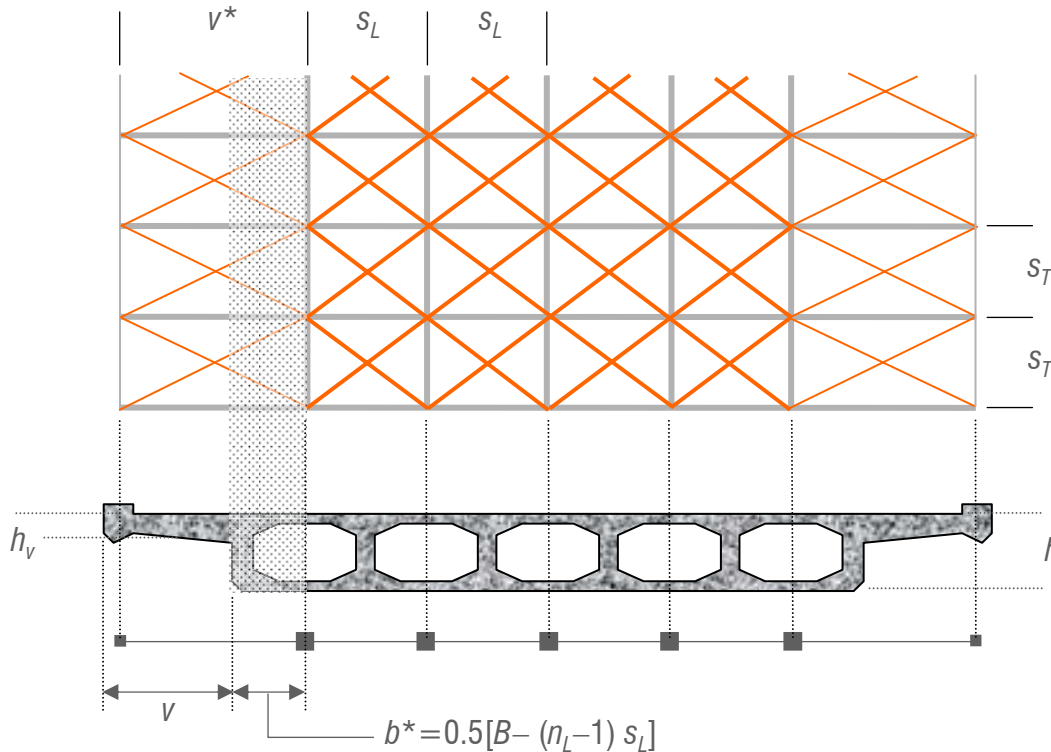


<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ **Imprecisiones** del modelo propuesto (plano): se localizan todas en la banda de ancho b^*



(a) **rigidez de membrana de la banda de voladizo:** la banda computada es más ancha que el voladizo real ($v^* > v$) y además, sobre b^* el espesor efectivo de la losa ($h - \emptyset$ o $e_{f1} + e_{f2}$ según corresponda) difiere de h_v

(b) **flexión transversal de la banda de voladizo:** se sobrestima el vuelo ($v^* > v$) y se reduce el ancho de la banda central (de mayor canto) en $2b^*$, resultando a priori un modelo más flexible transversalmente. Este defecto se compensa por la mayor rigidez a torsión de la viga longitudinal exterior, mejorando así el empotramiento del voladizo lateral v^*

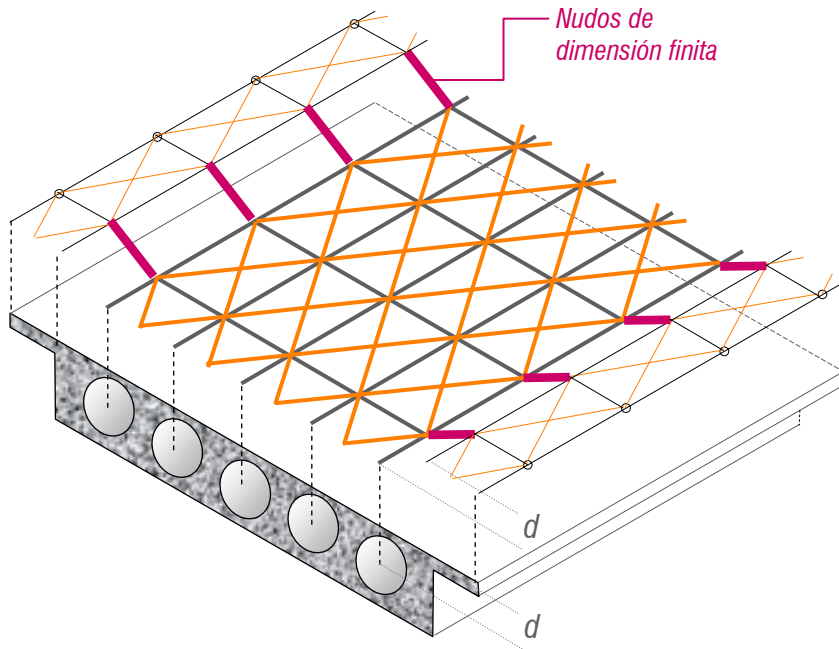
(c) **ELU de flexión transversal del voladizo:** debe comprobarse con los esfuerzos evaluados en la sección de unión del voladizo real con el cuerpo central de la losa

<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

■ **Imprecisiones** del modelo propuesto: en cambio, con un modelo espacial se cancelan todos estos inconvenientes



■ Los voladizos laterales se modelan en su posición espacial real, esto es con una excentricidad d respecto al plano neutro del cuerpo central del tablero, igual a $(h-h_v)/2$ si los aligeramientos son del tipo (a), es decir alvéolos circulares centrados

■ Ello requiere emplear **Nudos de Dimensión Finita**, que conecten el plano neutro del cuerpo central del tablero con el de los voladizos

■ Nuevamente h_v es el espesor medio de los voladizos laterales. Las áreas A_L^* , A_T^* y A_D^* se determinan con $\lambda^* = s_T/v$ y h_v siempre que $\lambda^* \in [1/\sqrt{3}, \sqrt{3}]$, para lo cual puede resultar oportuno modificar el mallado principal

■ Obviamente, como alternativa al emparrillado descrito se puede adoptar un modelo 2D espacial (con **NDF**). Conviene anotar que con esta opción, la flexión local y el arrastre de cortante en las alas laterales quedarán perfectamente caracterizados

<2.1.4 TABLEROS LOSA ALIGERADOS>

<2.1 MODELADO DEL TABLERO>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

▪ Cuando la planta del tablero se hace más compleja, el único modelo **viable a bajo coste** es el **emparrillado**, salvo que la relación ancho luz autorice un análisis como viga. Sin embargo, solo se obtendrá una respuesta plenamente fiable con modelos de **EF** más sofisticados (híbridos o 2D)

▪ **Normas generales** para la puesta en práctica:

(1) Las **barras longitudinales** deben coincidir con los **apoyos reales** y mantenerse en número constante a lo largo del emparrillado (*ello puede exigir desdoblar algún elemento en plantas que bifurquen*)

(2) La disposición de **barras transversales** debe ser lo más **ortogonal** posible a las longitudinales, procurando conservar el parámetro $\lambda = s_T/s_L$ en toda la retícula

(3) Los **diafragmas** deben incorporarse siempre al modelo

▪ **Normas particulares.** Seremos más específicos para dos tipos de tablero:

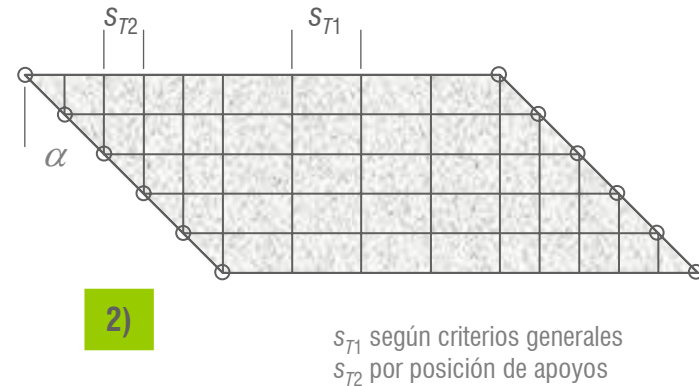
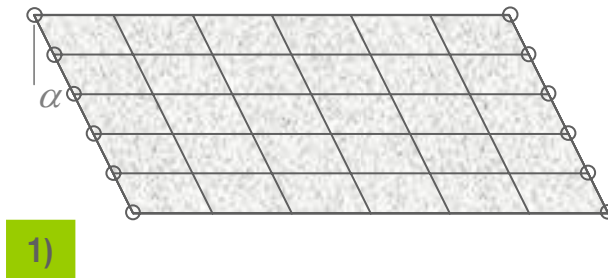
(a) Los **tableros oblicuos** de bordes paralelos

(b) Los **tableros curvos**

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(a) *Normas particulares* para **tableros oblicuos** con bordes paralelos (para los cuales existe más experimentación)

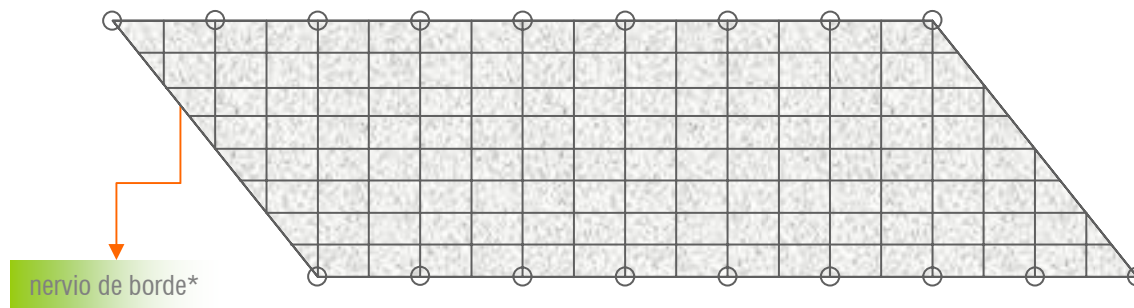
- Las **barras longitudinales** deben ser paralelas a los bordes libres
- Las **barras transversales** pueden ser
 - 1) paralelas a las líneas de apoyo para $\alpha < 20^\circ$
 - 2) ortogonales a las barras longitudinales si $\alpha \geq 35^\circ$
 - 3) los diafragmas intermedios, si existen, pueden condicionar el trazado transversal de la retícula



02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(a) Normas particulares para **tableros oblicuos de gran anchura**

- En **losas macizas**, conviene disponer las barras longitudinales **perpendiculares a los bordes apoyados**



(*) se le asigna una sección de ancho $h/2$ más el posible voladizo (con su b_{ef})

- Si se trata de un **tablero de vigas prefabricadas**, las barras longitudinales deben seguir la dirección de los nervios físicos, generalmente **paralelos a los bordes libres** para evitar las zonas triangulares laterales, de difícil solución
- En **losas aligeradas** también manda el trazado de los aligeramientos, que suele ser entonces **ortogonal a las líneas de apoyo**, macizando las citadas zonas triangulares

<2.2 DISPOSICIÓN DE LA MALLA PARA PLANTAS MÁS GENERALES>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(b) Normas particulares para **tableros curvos**

- Aunque sea usual establecer reglas para tableros con **bordes ortogonales** (de trazado polar) estas tienen poco interés práctico puesto que en general las losas curvas se diseñan con **bordes apoyados paralelos** y no radiales
- Además estas estructuras suelen ser **losas** hormigonadas in situ, macizas o bien aligeradas. Por ello es suficiente ajustarse a los criterios establecidos anteriormente para tableros rectos, teniendo en cuenta que:
 - 1) Las **barras longitudinales** deben seguir ahora el trazado de los bordes libres (curvos)
 - 2) Las **barras transversales** deben disponerse paralelas a las líneas de apoyo en estribos (salvo si el apoyo es radial), pudiendo ser necesario aumentar su número si la abertura de los segmentos determinados sobre los ejes curvos longitudinales es excesiva (2 a 5º es lo recomendado, siempre que no se disponga del software apropiado, es decir de **elementos curvos**)

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

□ El **proceso constructivo** es clave a la hora de computar las acciones **permanentes**, debiendo diferenciar los tableros de vigas prefabricadas de los ejecutados totalmente apeados (losas). Las indicaciones siguientes corresponden a tableros rectos con pretensado longitudinal

(1) Peso propio. *Es determinante el proceso constructivo*

- Las vigas prefabricadas, y en particular las artesas, resisten su peso **G** y el de la losa sobrepuesta (*incluido las prelosas*) **individualmente** y de forma isostática, luego este no afecta al emparrillado
- En cambio en tableros hormigonados in situ (losas) el peso **G** debe asignarse a las **vigas transversales del emparrillado**

(2) Pretensado

- En tableros de vigas prefabricadas y debido a la **fluencia** del hormigón, el pretensado se **transferirá parcialmente** al emparrillado (*biplano*) a través de sus **elementos longitudinales**, con un valor no constante **G^*** , **una vez se haya materializado el piso del tablero**
- En tableros losa, esta acción afectará directamente a los **elementos longitudinales del emparrillado** (*plano*)

<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(3) Cargas muertas. *Importa su disposición geométrica.*

- Las de carácter **superficial** se asignan a las **vigas transversales** del emparrillado
- Las lineales (*impostas, barreras...*) se reducen a las **barras longitudinales** como densidades lineales de carga q_z y m_x

(4) Sobrecarga de uso debidas al tráfico de vehículos. *Se aplican al emparrillado*

(a) componentes verticales: son de dos tipos

- **Cargas repartidas** (9 kN/m², 5 kN/m² o 2.5 kN/m²) a las **vigas transversales** del emparrillado
- **Cargas concentradas** (vehículos de 2×300 kN, 2×200 kN o 2×100 kN) con **reparto isostático** entre los **nudos** tributarios de la retícula

(b) componentes horizontales: son de dos tipos

- **Densidad lineal** debida al frenado, arranque o cambio de velocidad de los vehículos, distribuida uniformemente sobre los **elementos longitudinales** tributarios del carril virtual 1 (IAP-11)
- **Fuerza centrífuga puntual** en puentes de planta curva ($R < 1500$ m), en cualquier **nudo** de la malla

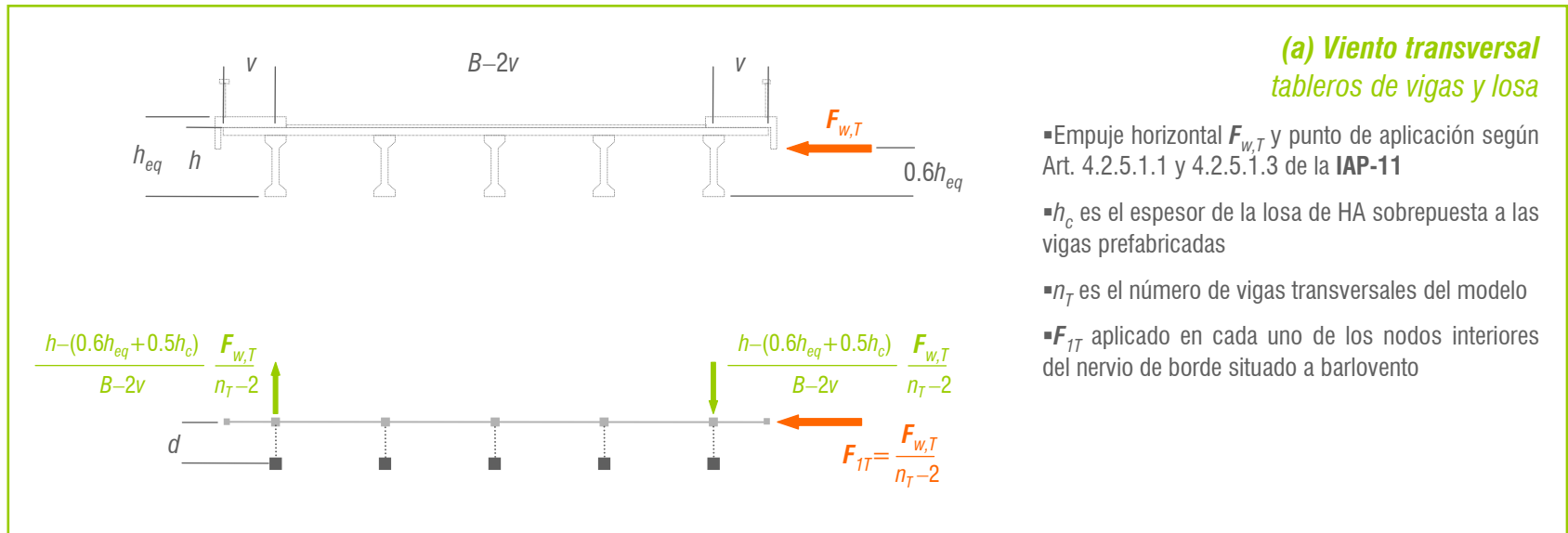
<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(5) Acciones climáticas. Viento

- Se aplican al emparrillado, independientemente de que deban también considerarse durante la construcción



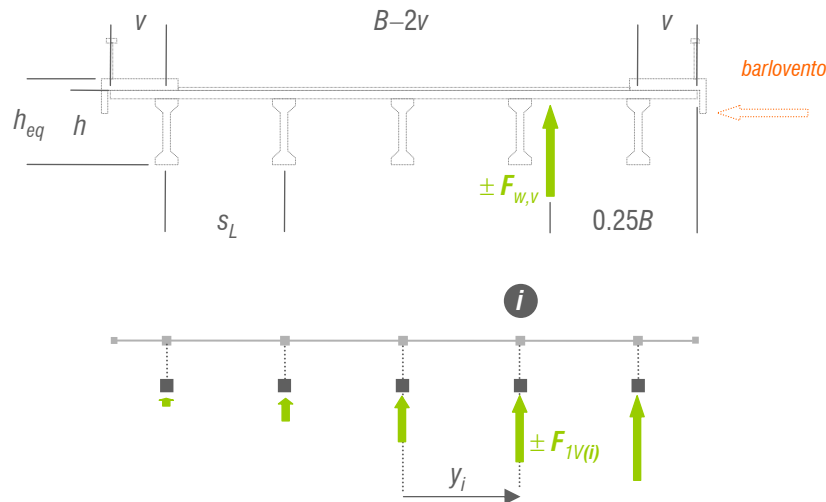
<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(5) Acciones climáticas. Viento

- Se aplican al emparrillado, independientemente de que deban también considerarse durante la construcción



(a) Viento transversal tableros de vigas y losa

- Empuje vertical $F_{w,v}$ y punto de aplicación según Art. 4.2.5.1.2 y 4.2.5.1.3 de la IAP-11
- n_L es el número de vigas físicas longitudinales del tablero
- n_T es el número de vigas transversales del modelo
- $F_{1V(i)}$ aplicado en cada uno de los nodos interiores dispuestos a lo largo de la viga física (i)

$$F_{1V(i)} = \frac{F_{w,v}}{n_T - 2} \left[\frac{1}{n_L} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{s_L} + \frac{n_L - 1}{2} \right) \frac{\eta_i}{\sum \eta_i^2} \right], \quad \eta_i = \frac{y_i}{s_L}$$

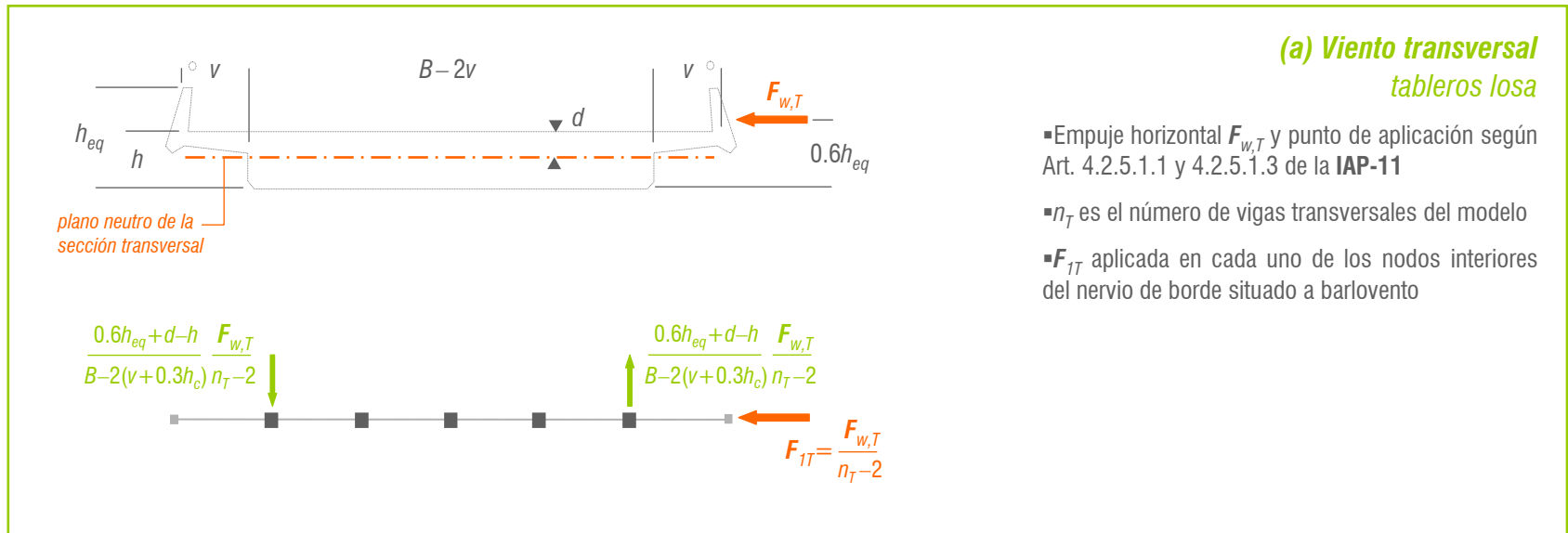
<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(5) Acciones climáticas. Viento

- Se aplican al emparrillado, independientemente de que deban también considerarse durante la construcción



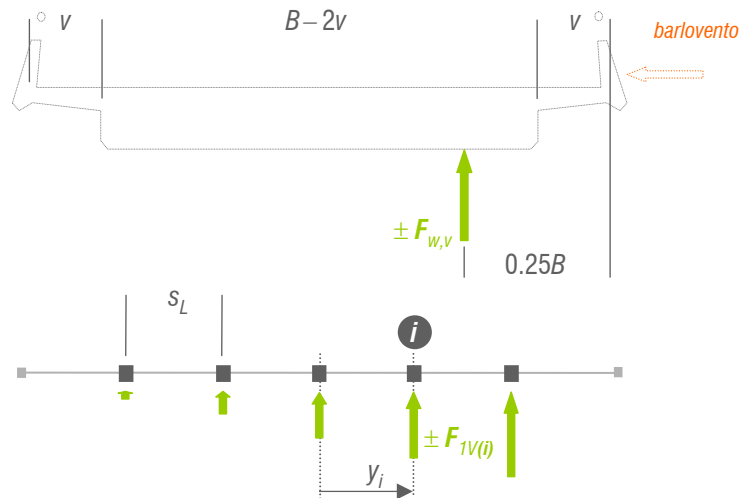
<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(5) Acciones climáticas. Viento

- Se aplican al emparrillado, independientemente de que deban también considerarse durante la construcción



(a) Viento transversal tableros losa

- Empuje vertical $F_{w,v}$ y punto de aplicación según Art. 4.2.5.1.2 y 4.2.5.1.3 de la IAP-11
- n_L es el número de vigas longitudinales del modelo (no se computa los nervios de borde)
- n_T es el número de vigas transversales del modelo
- $F_{1V(i)}$ aplicado en cada uno de los nodos interiores dispuestos a lo largo de la viga física (i)

$$F_{1V(i)} = \frac{F_{w,v}}{n_T - 2} \left[\frac{1}{n_L} + \frac{1}{2} \left(\frac{v}{s_L} + \frac{n_L - 1}{2} \right) \frac{\eta_i}{\sum \eta_i^2} \right], \quad \eta_i = \frac{y_i}{s_L}$$

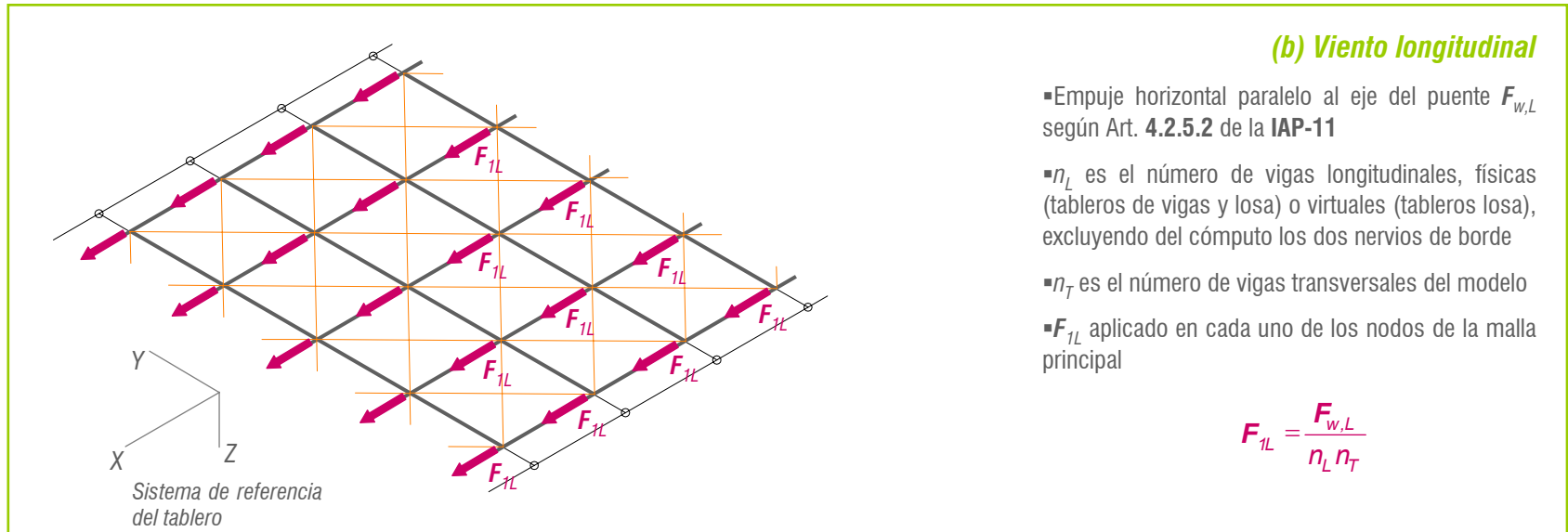
<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(5) Acciones climáticas. Viento

- Se aplican al emparrillado, independientemente de que deban también considerarse durante la construcción



<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(5) Acciones climáticas. Acción térmica y nieve

- Acción térmica (según Art. 4.3.1 de la IAP-11). Consiste en componente **uniforme** y componentes de la **diferencia de temperatura vertical y horizontal**. Las dos primeras se aplican a todos los elementos del emparrillado, mientras que la tercera afecta a las dos caras laterales del tablero

	en contracción	en dilatación
Máxima variación de la componente uniforme de temperatura	$\Delta T_{N,con} = T_0 - T_{e,min}$	$\Delta T_{N,exp} = T_{e,max} - T_0$
T_0 es la temperatura inicial del elemento (temperatura media del tablero cuando se coarta su movimiento, ver Art. 4.3.1.1.3)		
T_e es la componente uniforme de la temperatura del tablero, con valores mínimo y máximo según Art. 4.3.1.1.2		
	fibra superior más caliente	fibra superior más fría
Componente de la diferencia vertical de temperatura	$\Delta T_{M,heat}$	$\Delta T_{M,cool}$
ΔT_M según Art. 4.3.1.2.1		

- Nieve (según Art. 4.4.2 de la IAP-11). Se aplica a las barras transversales del emparrillado

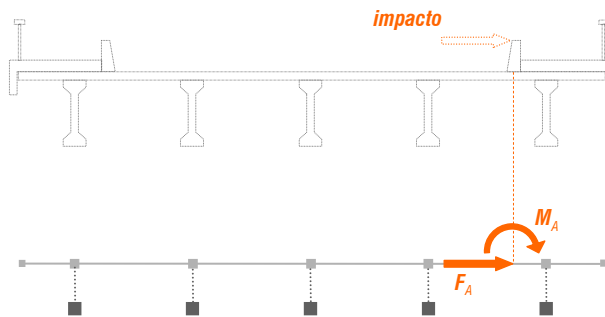
<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(6) Acciones accidentales. Impactos y sismo

- Los **impactos contra sistemas de contención de vehículos** se definen en 5.1.2 de la IAP-11. Su efecto se asimila a una **fuerza horizontal transversal** y **momento de eje longitudinal** concomitante, aplicados en su posición real en sección transversal. Se considera además una fuerza vertical simultánea, de valor $0.75Q_{1k}=225$ kN, debida a la presencia del vehículo



impacto contra sistema de contención

- Fuerza horizontal F_A y momento M_A facilitados por el fabricante o bien determinados como valor característico de la resistencia del sistema de anclaje del pretil
- Acción vertical del vehículo ($0.75Q_{1k}$) situada próxima a los anclajes del sistema de contención, en la posición más desfavorable

- Conceptualmente, la **acción sísmica** debe ajustarse a la distribución real de masas del tablero

<2.3.1 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

- La respuesta del emparrillado nos proporciona una representación *discreta* del comportamiento *continuo* del tablero. Desde un punto de vista práctico, ello exige transformar los esfuerzos en **barras** en esfuerzos en **vigas físicas+losa** o en una **losa maciza o aligerada**
 - 1) **Tableros de vigas y losa.** Los esfuerzos en las vigas físicas se deducen directamente de los determinados en las correspondientes barras del emparrillado. En cambio, para la losa sobrepuesta, un refinamiento insuficiente de la malla puede exigir un cálculo local adicional para la correcta estimación de los efectos de las cargas concentradas (vehículo pesado, anclaje de pretiles...)
 - 2) **Tableros losa.** Los esfuerzos de flexión y de membrana pueden estimarse con las fórmulas siguientes

(2.a) Acción membrana

$$n_{xx} = \frac{8\lambda}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{N_L / I_L}{3-\lambda^2} + \nu \frac{N_T / I_T}{3\lambda^2-1} \right)$$

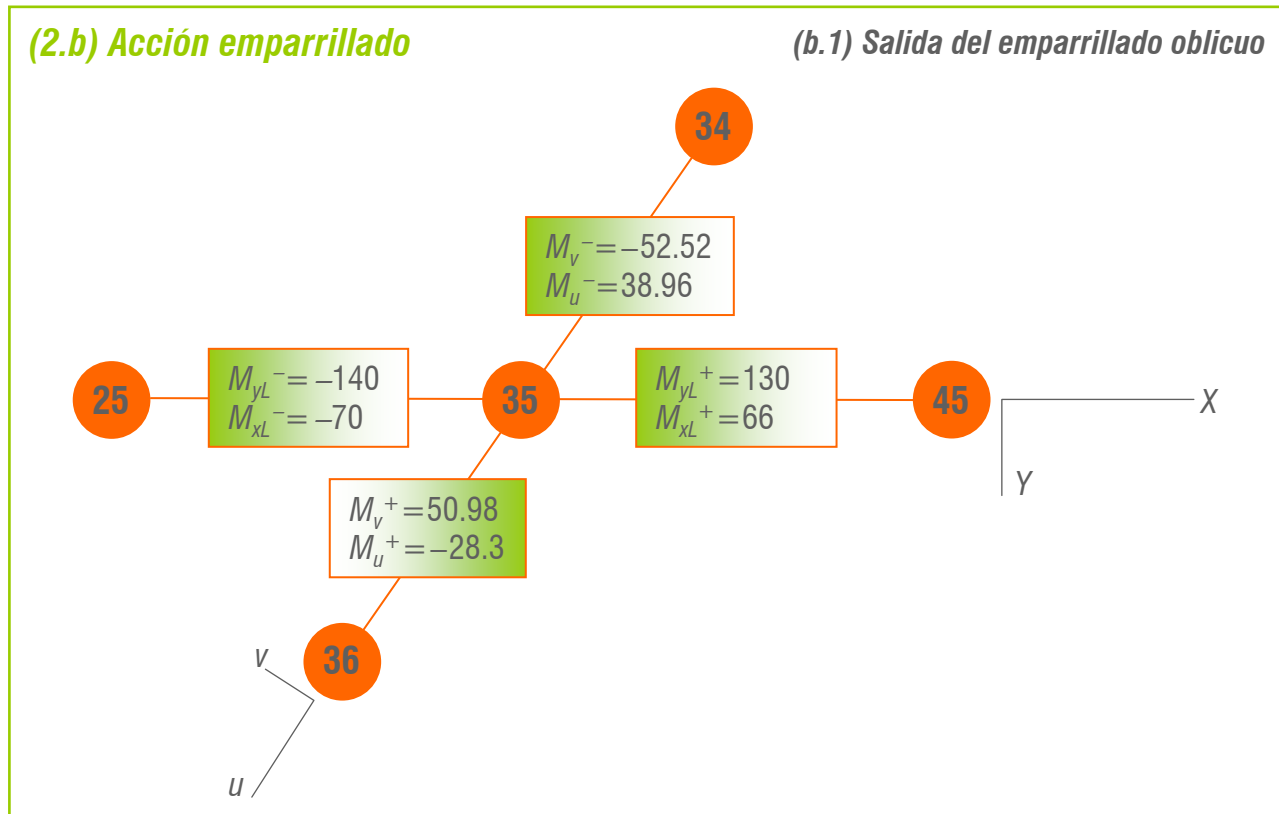
$$n_{yy} = \frac{8\lambda}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{N_T / I_T}{3\lambda^2-1} + \nu \frac{N_L / I_L}{3-\lambda^2} \right)$$

$$n_{xy} = \frac{8}{3(1+\nu)} \frac{N_D}{I_D}$$

<2.3.2 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros



<2.3.2 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

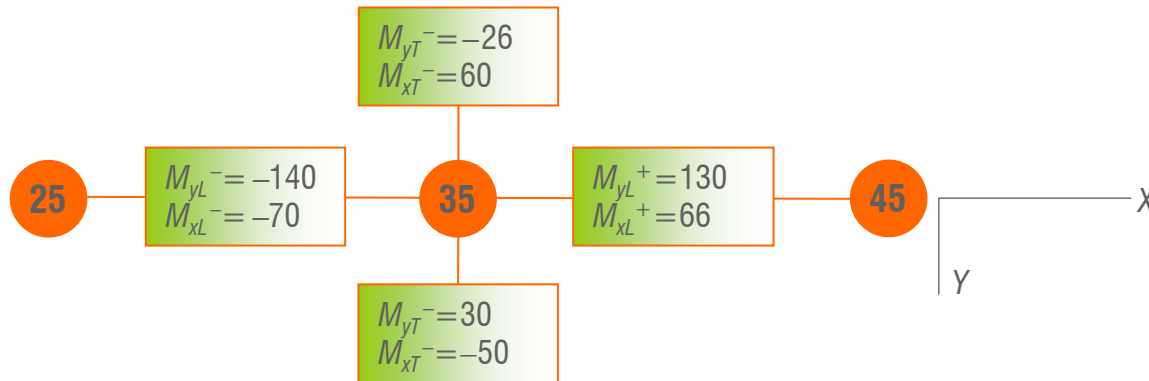
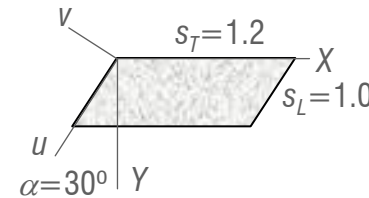
02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(2.b) Acción emparrillado

$$M_{xT} = \cos \alpha M_u - \sin \alpha M_v$$

$$M_{yT} = \sin \alpha M_u + \cos \alpha M_v$$

(b.2) Transformación de coordenadas

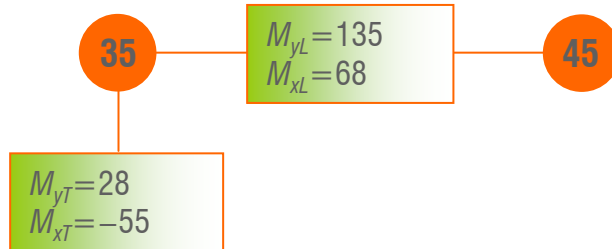


<2.3.2 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

(2.b) Acción emparrillado

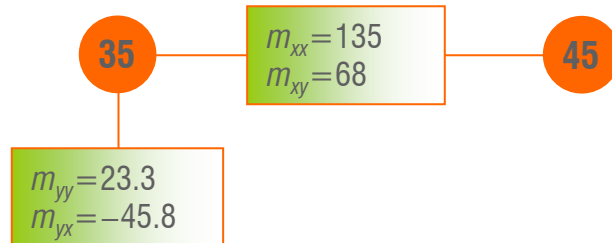


(b.3) Valores promediados

$$\begin{cases} M_{yL} = \frac{1}{2}(M_{yL}^+ - M_{yL}^-) \\ M_{xL} = \frac{1}{2}(M_{xL}^+ - M_{xL}^-) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{yT} = \frac{1}{2}(M_{yT}^+ - M_{yT}^-) \\ M_{xT} = \frac{1}{2}(M_{xT}^+ - M_{xT}^-) \end{cases}$$

(2.b) Acción emparrillado



(b.4) Valores unitarios

$$\begin{cases} m_{xx} = M_{yL} / s_L, \quad m_{xy} = M_{xL} / s_L \\ m_{yy} = M_{yT} / s_T, \quad m_{yx} = M_{xT} / s_T \end{cases}$$

$$\bar{m}_{xy} = \frac{1}{2}(m_{xy} - m_{yx})$$

<2.3.2 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

02 El modelo emparrillado en el análisis de tableros

momentos de diseño de la armadura de la losa (disposición ortogonal del armado)

armadura inferior	expresión <i>standard</i>	si (b) < 0	si (a) < 0
m_{xx}^*	(a) $m_{xx} + \overline{m}_{xy} $	$m_{xx} + \overline{m}_{xy}^2 / m_{yy} $	0
m_{yy}^*	(b) $m_{yy} + \overline{m}_{xy} $	0	$m_{yy} + \overline{m}_{xy}^2 / m_{xx} $
si (a) y (b) < 0 no es necesario disponer armadura inferior			
armadura superior	expresión <i>standard</i>	si (d) > 0	si (c) > 0
m_{xx}^*	(c) $m_{xx} - \overline{m}_{xy} $	$m_{xx} - \overline{m}_{xy}^2 / m_{yy} $	0
m_{yy}^*	(d) $m_{yy} - \overline{m}_{xy} $	0	$m_{yy} - \overline{m}_{xy}^2 / m_{xx} $
si (c) y (d) > 0 no es necesario disponer armadura superior			

<2.3.2 INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

<2.3 INTRODUCCIÓN DE ACCIONES E INTERPRETACIÓN DE RESULTADOS>

- 3.0 Motivación**
- 3.1 Introducción al cálculo local**
- 3.2 Técnicas de emparrillado y de elementos finitos**
- 3.3 Métodos simplificados de evaluación de la flexión local del piso del tablero**

03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

□ Este tercer tema no se destina directamente (*a diferencia de los anteriores*) al modelado y análisis de determinados tableros de puentes, sino que se dedica a **complementarlo** mediante el denominado **cálculo local**, siendo objetivos prioritarios del mismo:

- Establecer claramente los **motivos** y **circunstancias** del cálculo local
- Exponer las **técnicas** de cálculo local en el actual ámbito del cálculo de estructuras
- Comentar los **métodos clásicos** que fueron desarrollados con este mismo fin

□ El cálculo local es necesario cuando el modelo global seleccionado **prescinde**, total o parcialmente, de la **deformabilidad** del tablero en **sección transversal**, tal y como sucede sistemáticamente con el modelo viga y en algunos casos con el modelo emparrillado (*quedan excluidos los tableros losa macizos o con aligeramientos circulares*)

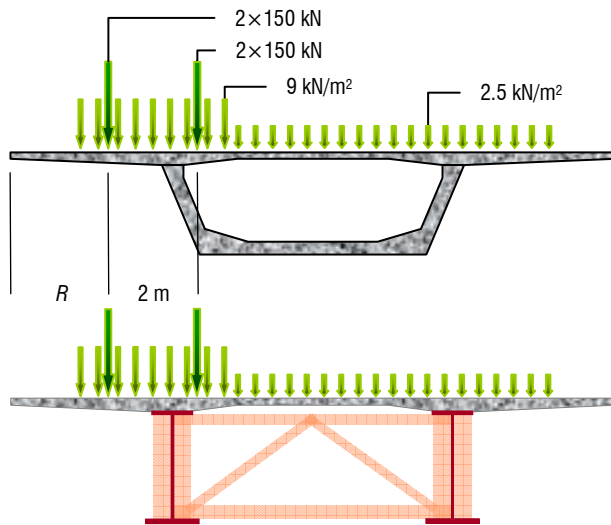
□ Estas deformaciones están principalmente originadas por las **flexiones locales** del piso bajo la acción de las sobrecargas de uso (SCU) y principalmente de los **vehículos pesados** (Art. 4.1.2.1 a) de la IAP-11). A continuación y a modo de introducción, se ilustran y comentan casos estándar que requieren cálculo local

03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

Sección transversal

modelos para el tablero que requieren cálculo local

(a) tablero mono-viga: cajón de HP, mixto o metálico



(b) tablero de doble-viga: mixto o metálico

▪ **modelo viga:** requiere el cálculo local del piso bajo la acción de las cargas permanentes G y de la sobrecarga de uso Q_{SCU} , de posición y distribución variables. Para ello, la losa superior puede suponerse simplemente apoyada a lo largo de las almas exteriores e interiores (si existen). Este cálculo se duplica en el caso de los cajones metálicos, puesto que la chapa superior también debe dimensionarse a flexión local entre rigidizadores longitudinales

▪ **modelo viga:** como en el caso anterior, requiere el cálculo local de la losa superior para $G + Q_{SCU}$, supuesta esta apoyada a lo largo de las dos vigas longitudinales. En el caso de los cajones metálicos, vuelve a ser necesario comprobar la flexión tanto de los elementos transversales (principalmente vigas de piso y cuchillos de voladizo) como de la chapa superior, que debe dimensionarse a flexión local entre rigidizadores longitudinales

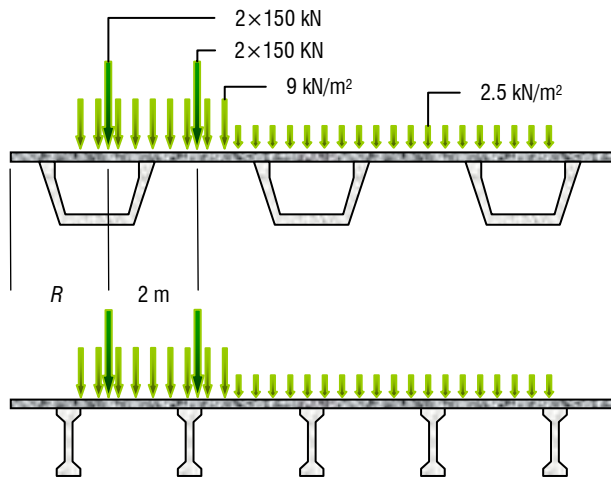
▪ **modelo emparrillado:** si el mallado de la losa superior es suficientemente fino, solo las soluciones metálicas requerirán algún tipo de comprobación local (la de la chapa superior, como en los casos anteriores)

03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

Sección transversal

modelos para el tablero que requieren cálculo local

(c) tablero de vigas celulares y losa: artesas prefabricadas de HP o metálicas



▪ **modelo emparrillado:** requiere cálculo local del piso (*bajo las acciones $G+Q_{scu}$*), puesto que en general el mallado entre artesas no es suficientemente fino para captar las flexiones locales en estas bandas. La losa superior vuelve a suponerse simplemente apoyada a lo largo de las almas de todas las artesas. Alternativamente, puede modelarse únicamente las bandas tipo suponiendo sus aristas longitudinales apoyadas/empotradas (salvo en voladizos laterales)

▪ **modelo emparrillado:** como en el caso anterior, requiere el cálculo local del piso *salvo* que el mallado del plano superior sea muy *fino*. Nuevamente, supondremos la losa superior simplemente apoyada a lo largo de las vigas prefabricadas, sometida a las acciones $G+Q_{scu}$. Alternativamente, puede modelarse únicamente las bandas tipo suponiendo sus aristas longitudinales apoyadas/empotradas (salvo en voladizos laterales)

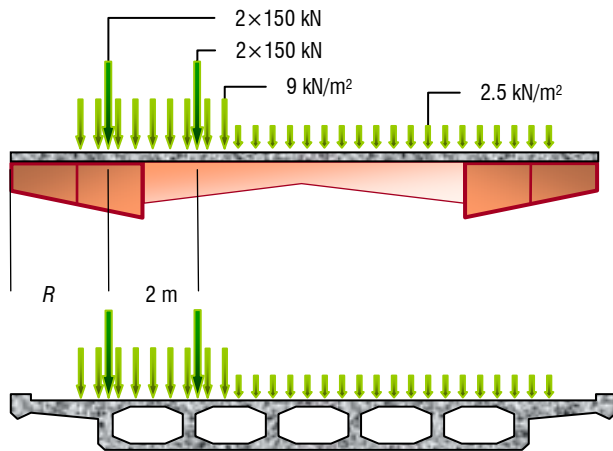
(d) tablero de vigas y losa: vigas prefabricadas de HP o metálicas

03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

Sección transversal

modelos para el tablero que requieren cálculo local

(e) **emparrillado mixto:** dos vigas longitudinales laterales y vigas de piso transversales (*posibles voladizos laterales*) con losa sobrepuesta



▪ **modelo emparrillado:** requiere invariablemente el cálculo local de la losa superior, puesto que el emparrillado suele ajustarse exclusivamente a las vigas físicas del tablero mixto. Este se lleva a cabo para un elemento de piso delimitado por dos vigas de piso consecutivas y las almas interiores de las vigas longitudinales, suponiendo condiciones de contorno ideales (*apoyo/empotramiento*)

▪ **modelo emparrillado:** la posición de las barras longitudinales, fijada por las características torsionales del tablero, y las características mecánicas asignadas a las barras transversales (*computando también la acción de la losa inferior*), obligan a la evaluación adicional de la flexión local. Esta se analiza por bandas tipo, con las condiciones de contorno ideales definidas para los tableros de viga y losa sobrepuesta

▪ **modelo losa:** se recurre a los aligeramientos rectangulares en busca de una mayor reducción del peso propio, por lo que el cálculo local para las bandas de losa superior entre almas resulta en general necesario. Este se lleva a cabo como en el caso anterior

(f) **tablero losa con aligeramientos rectangulares**

03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

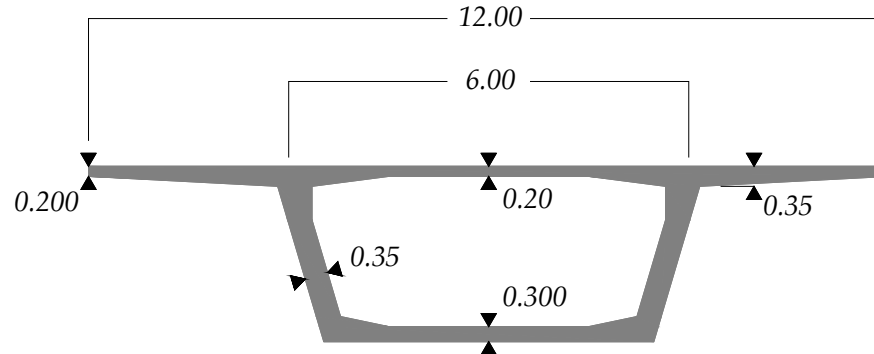
- ❑ Evidentemente, con este análisis adicional se pretende **estimar la flexión del piso del tablero** sin necesidad de procesar un modelo global tipo lámina plegada, más costoso, cuando las características morfológicas del tablero permiten su análisis como **viga** (*tableros de luces medias con sección doble-viga o en cajón*) o como **emparrillado** (*caso de los tableros de vigas y losa*)
- ❑ En el **primer caso**, la losa superior se supone **simplemente apoyada sobre las almas**, como simplificación del problema. Una segunda aproximación, adecuada para los **emparrillados** que modelan tableros de vigas longitudinales y losa sobrepuesta, o losas aligeradas, consiste en adoptar **condiciones de contorno ideales** para las bandas de losa resultantes: **simple apoyo/empotramiento + borde libre** en bandas de voladizo
- ❑ En todos los casos, la flexión local del piso se puede estimar mediante un modelo de barras, o **emparrillado**, o bien mediante **EF 2D tipo placa**. A continuación, se muestran ejemplos para ambas posibilidades
- ❑ Por último, recordar que el cálculo local **no determina totalmente el estado tensional** del piso del tablero. Solo proporciona las **flexiones locales** de la losa de hormigón o del piso ortótropo metálico, que a su vez deben sumarse a los **esfuerzos de membrana debidos a la flexión global** del tablero

<3.1 INTRODUCCIÓN AL CÁLCULO LOCAL>

03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

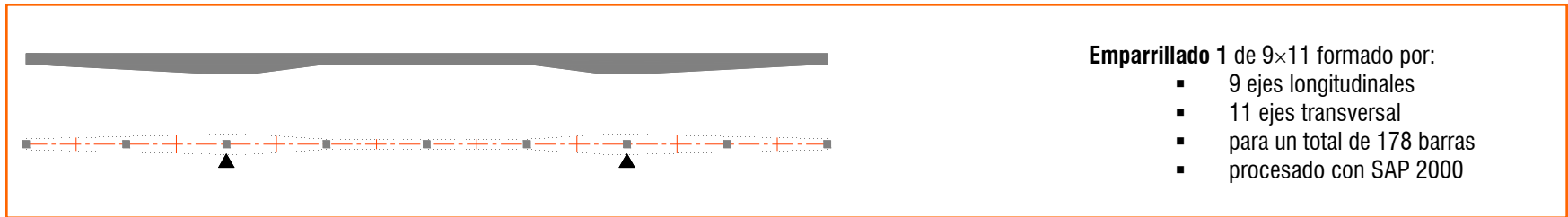
■ **Caso (I): tablero modelado como viga.** Esta situación es la que menos dudas ofrece, puesto que el modelo global supone la sección transversal perfectamente rígida y por lo tanto ignora totalmente los efectos locales

■ Estos pueden entonces evaluarse por dos *técnicas alternativas*, mediante *emparrillado* de barras (EF 1D) o como *losa continua* (EF 2D) apoyada sobre las almas de las vigas físicas. Para ilustrar ambas opciones, nos interesaremos por un tablero en cajón unicelular de vano único, de 30 m de luz, cuya sección transversal se representa a continuación. Lo supondremos simplemente apoyado y con diafragmas perfectamente rígidos en las secciones extremas

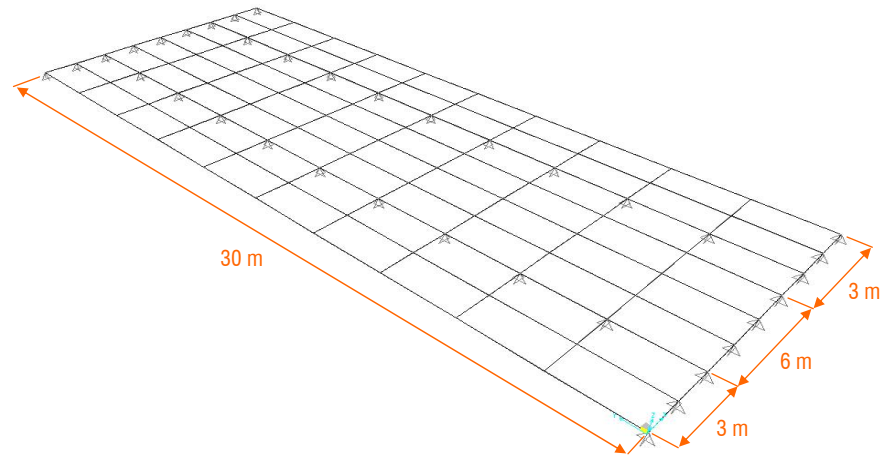
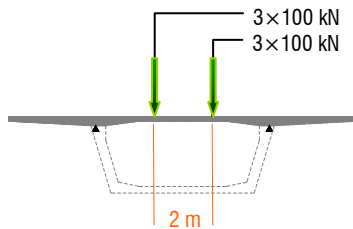


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

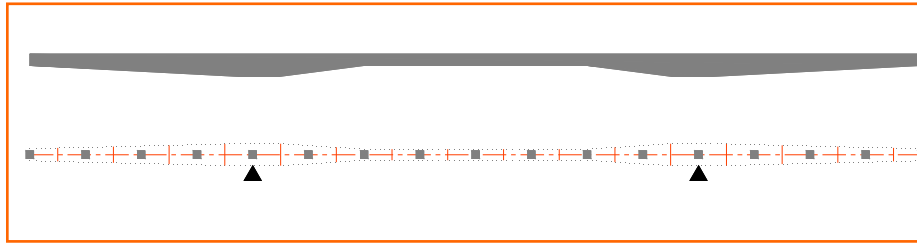
■ **Análisis mediante emparrillado de barras (EF 1D).** Como primer ejemplo, se procesan dos emparrillados de barras, aumentando la densidad de la retícula con el fin de observar la evolución de la respuesta en función del número y distribución de los elementos. Las barras transversales se toman de sección constante



Cargas: vehículo pesado de la **IAP-98** centrado longitudinal y transversalmente. Las cargas se llevan a los nudos del emparrillado por reparto isostático



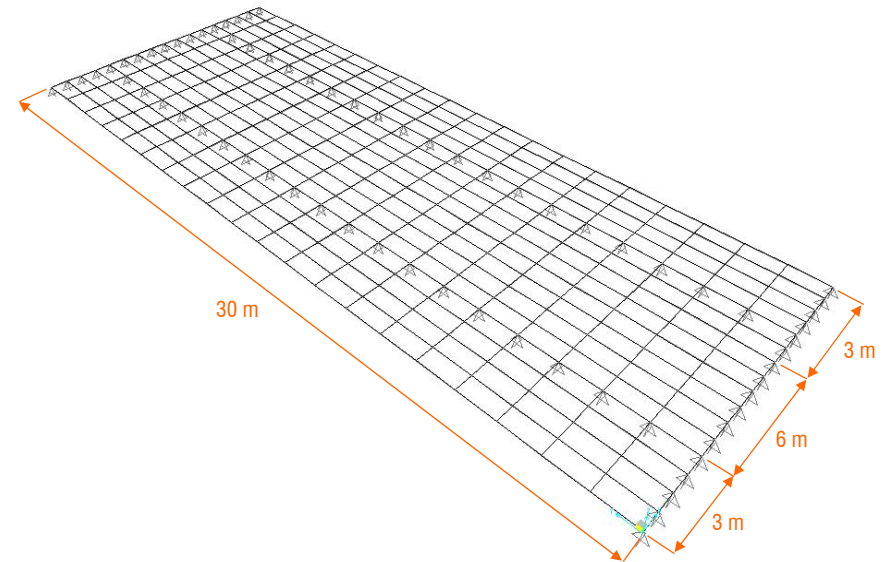
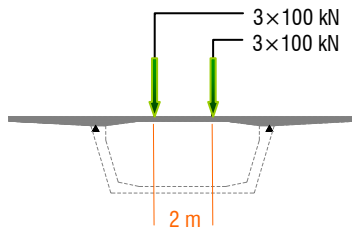
03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros



Emparrillado 2 de 17×21 formado por:

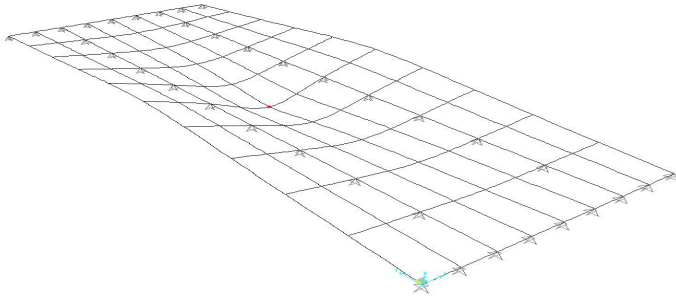
- 17 ejes longitudinales
- 21 ejes transversal
- para un total de 676 barras
- procesado con SAP 2000

Cargas: vehículo pesado de la **IAP-98** centrado longitudinal y transversalmente. Las cargas se llevan a los nudos del emparrillado por reparto isostático

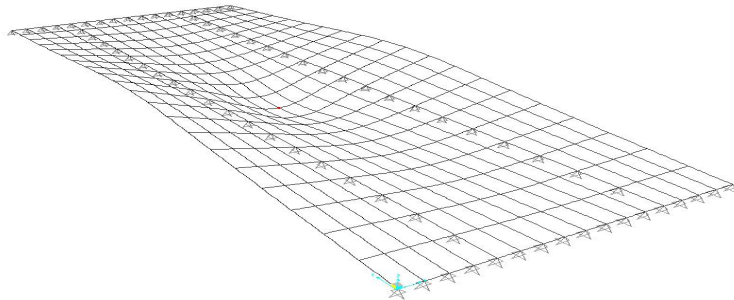


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

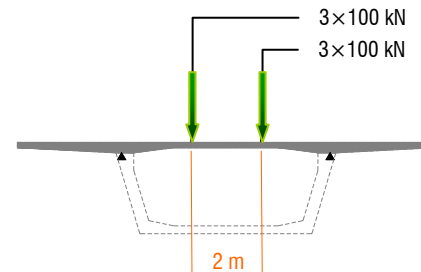
Emparrillado 1 $w=9,03$ mm



Emparrillado 2 $w=9,12$ mm

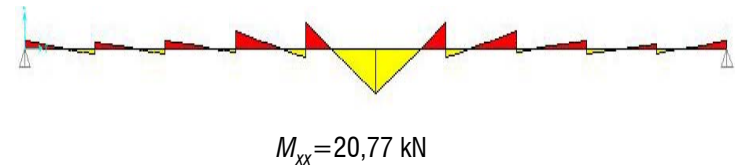
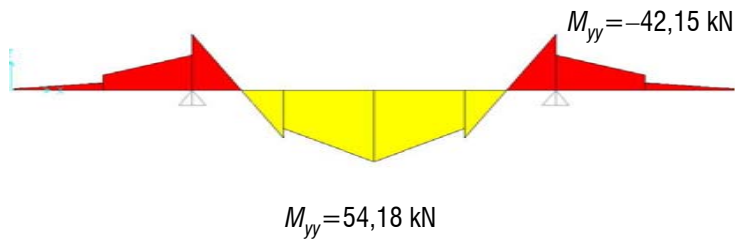


Caso de carga 1: vehículo pesado de la IAP-98 centrado longitudinal y transversalmente

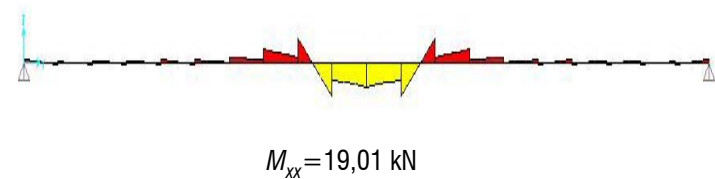
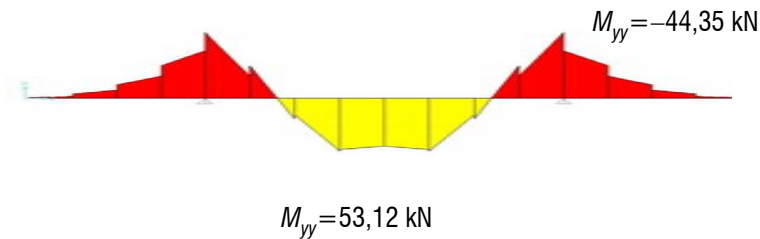


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

Emparrillado 1. Diagramas de momentos flectores en las barras transversales y longitudinales más solicitadas y valor de los esfuerzos máximos equivalentes en la losa

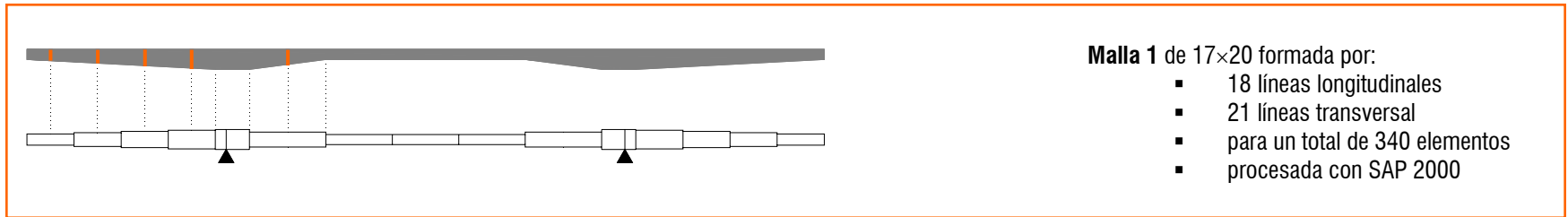


Emparrillado 2. Diagramas de momentos flectores en las barras transversales y longitudinales más solicitadas y valor de los esfuerzos máximos equivalentes en la losa

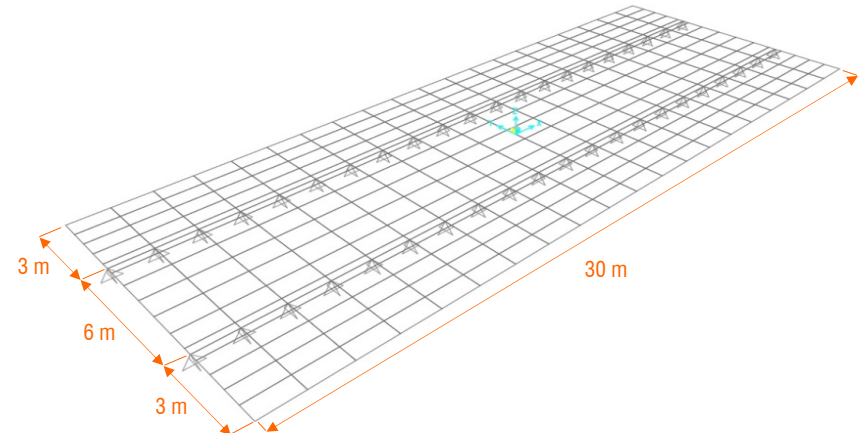
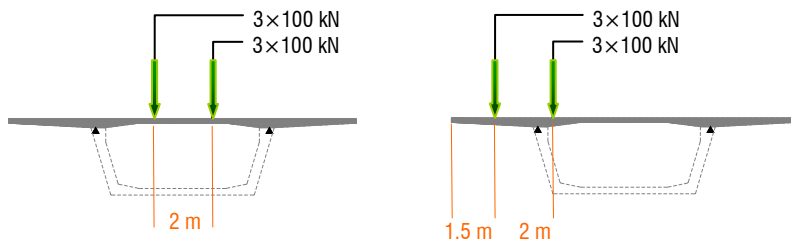


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

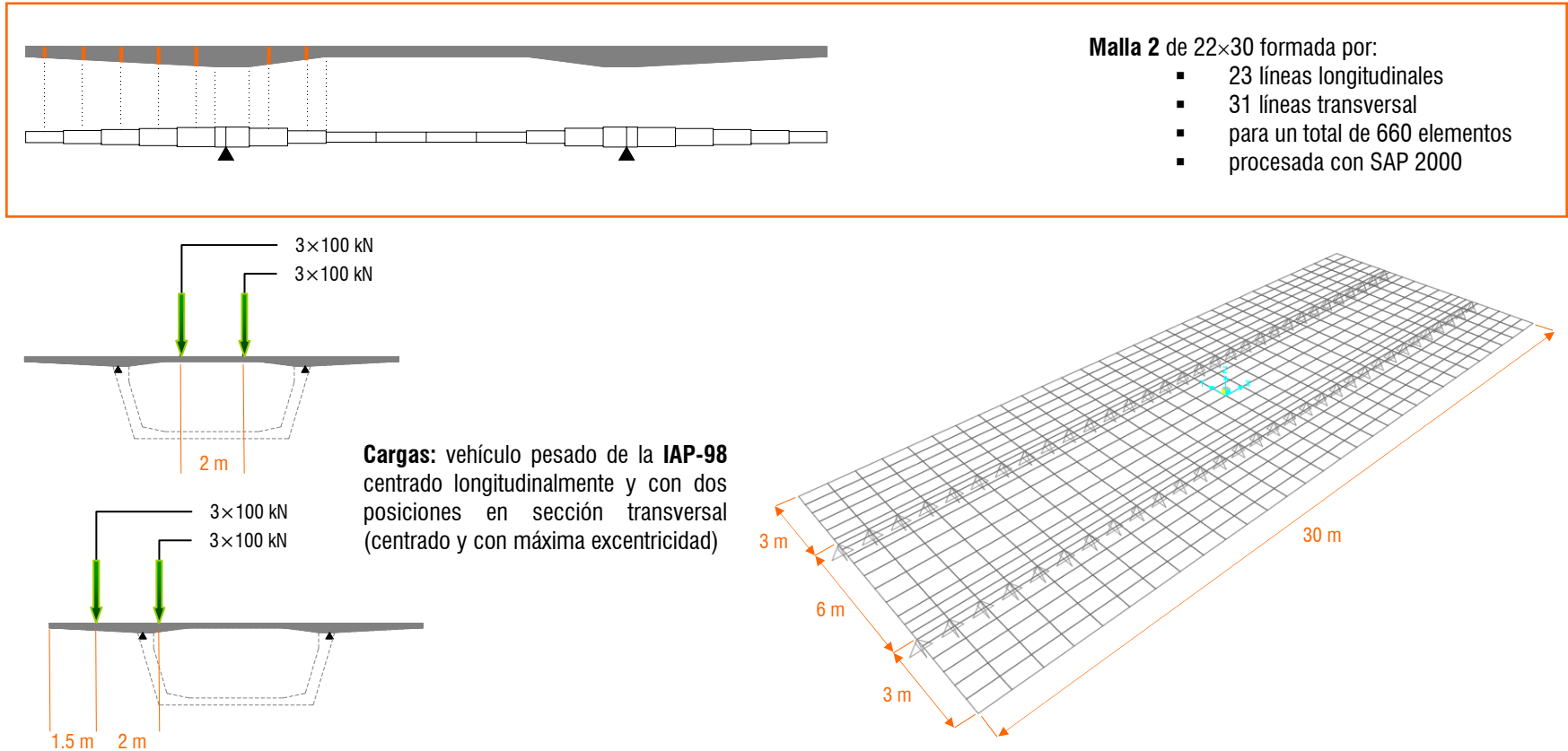
■ **Análisis como losa continua (EF 2D).** Se han procesado tres densidades de malla distintas, reduciendo progresivamente el tamaño del elemento para observar la evolución de la respuesta según el grado de refinamiento del mallado. El resultado se muestra en forma de mapas de flechas (*superficie deformada*) y momentos flectores



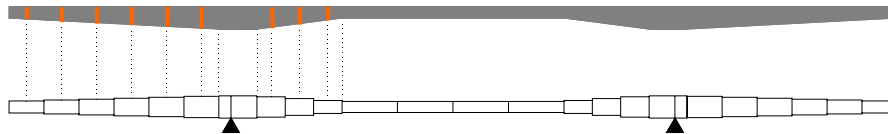
Cargas: vehículo pesado de la **IAP-98** centrado longitudinalmente y con dos posiciones en sección transversal (centrado y con máxima excentricidad)



03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

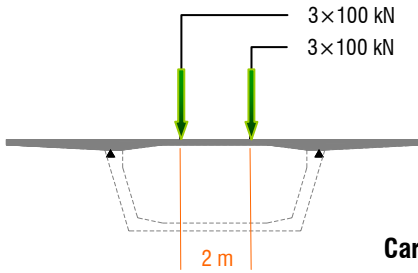


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

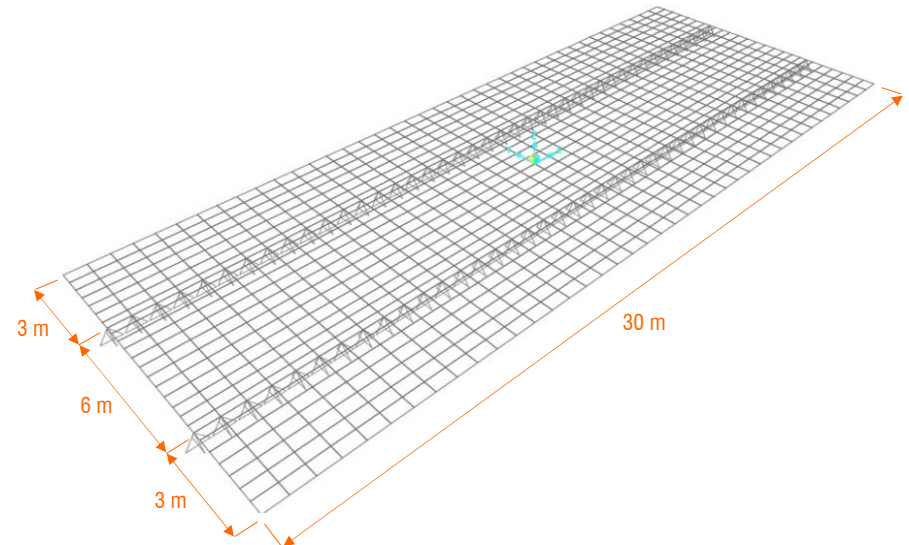
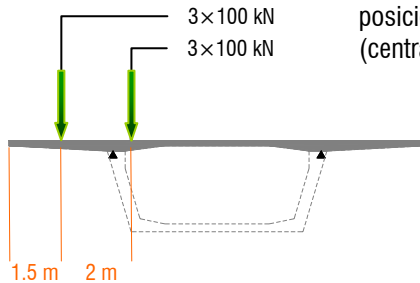


Malla 3 de 26×40 formada por:

- 27 líneas longitudinales
- 41 líneas transversal
- para un total de 1040 celdas
- procesada con SAP 2000

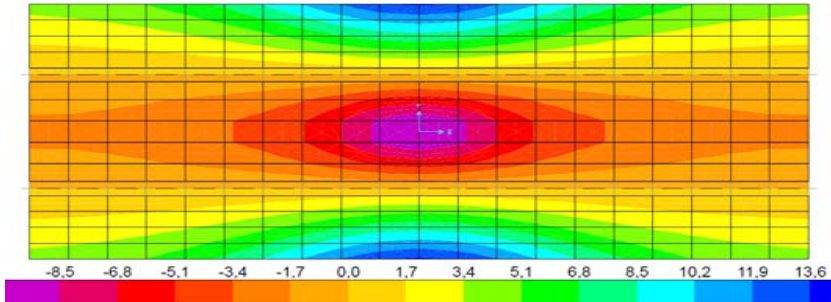


Cargas: vehículo pesado de la IAP-98 centrado longitudinalmente y con dos posiciones en sección transversal (centrado y con máxima excentricidad)

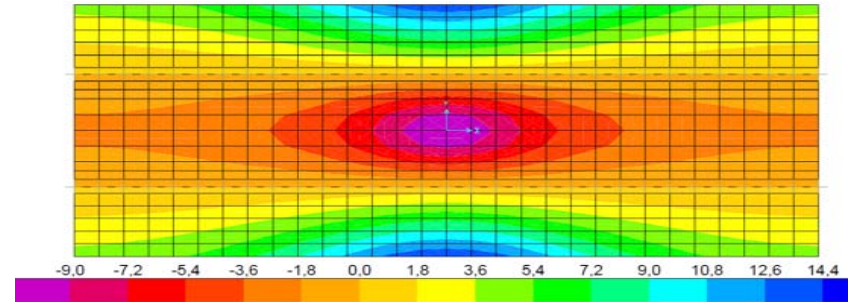


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

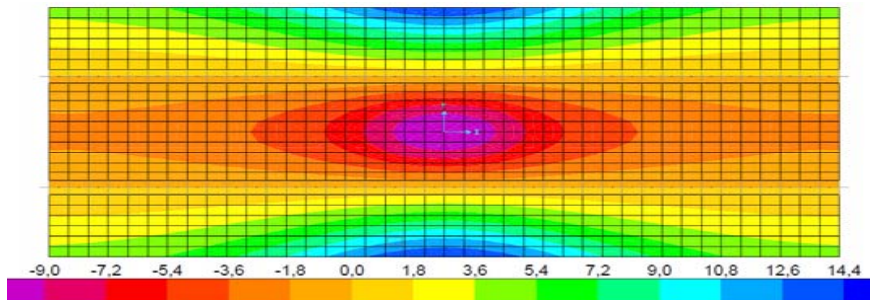
Malla 1: $w=11.4$ mm



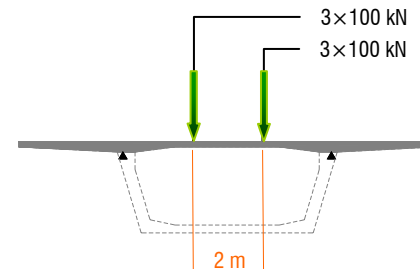
Malla 2: $w=10.6$ mm



Malla 3: $w=10.7$ kN

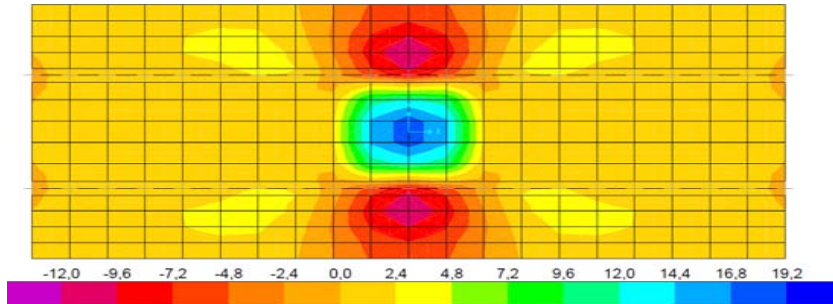


Caso de carga 1: vehículo pesado de la IAP-98 centrado longitudinal y transversalmente

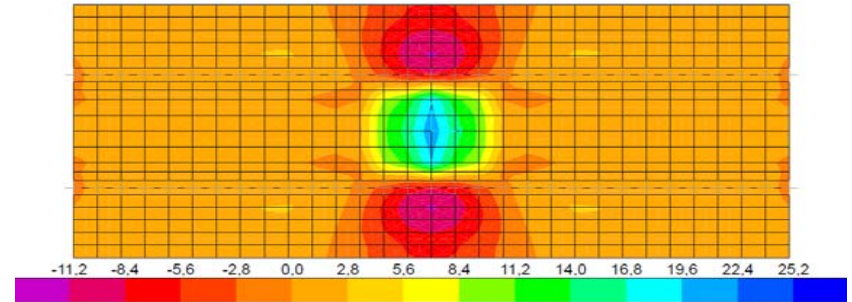


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

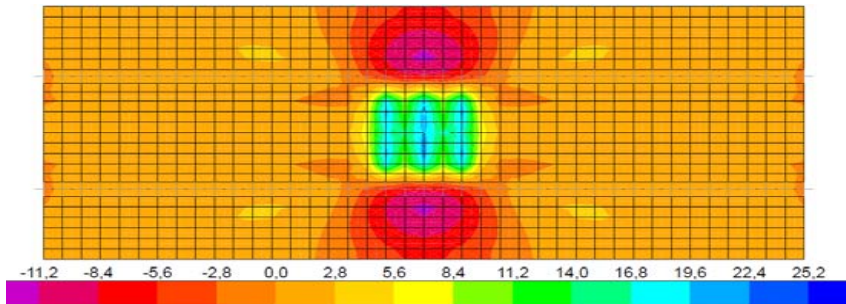
Malla 1: $M_{xxmax}=18.1$ kN



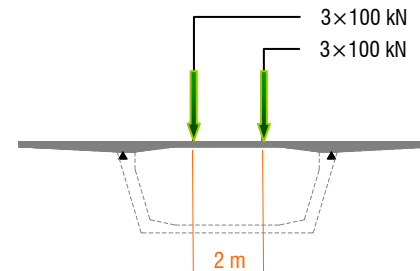
Malla 2: $M_{xxmax}=21.8$ kN



Malla 3: $M_{xxmax}=21.3$ kN

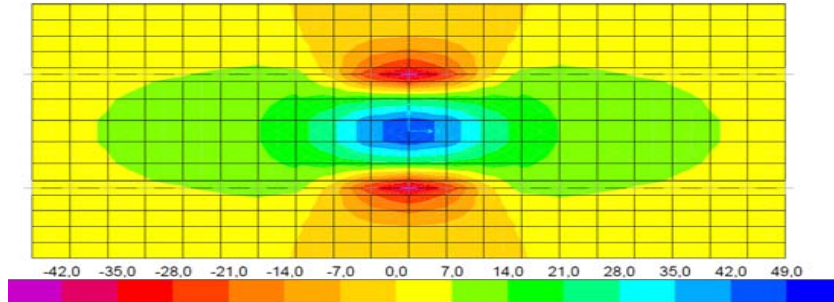


Caso de carga 1: vehículo pesado de la IAP-98 centrado longitudinal y transversalmente

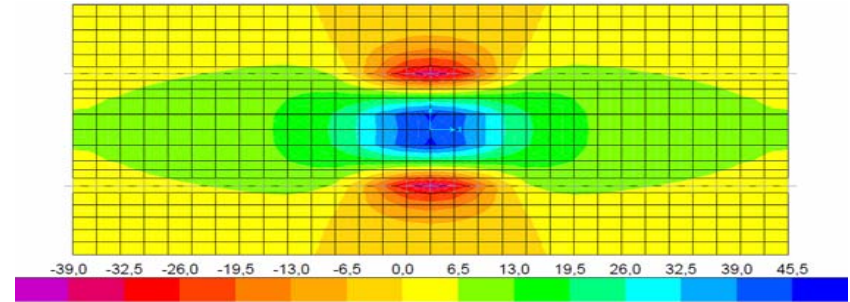


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

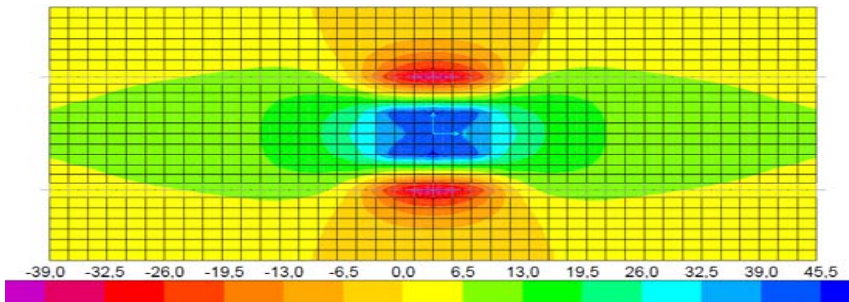
Malla 1: $M_{yy\max} = 45.9 \text{ kN}$



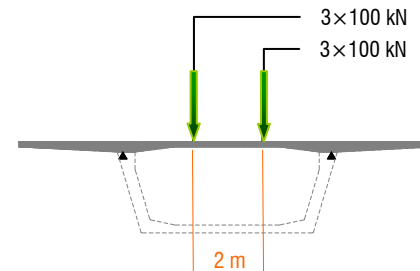
Malla 2: $M_{yy\max} = 46.6 \text{ kN}$



Malla 3: $M_{yy\max} = 46.6 \text{ kN}$

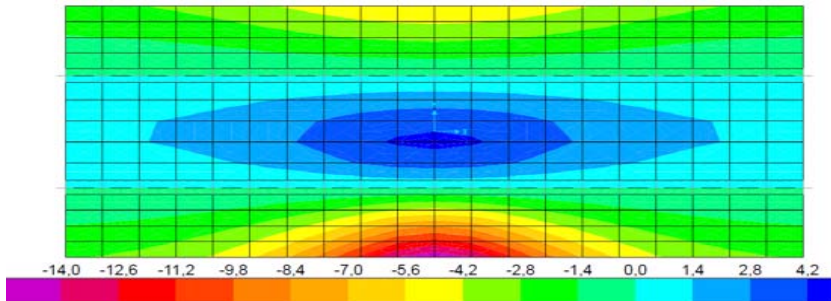


Caso de carga 1: vehículo pesado de la IAP-98 centrado longitudinal y transversalmente

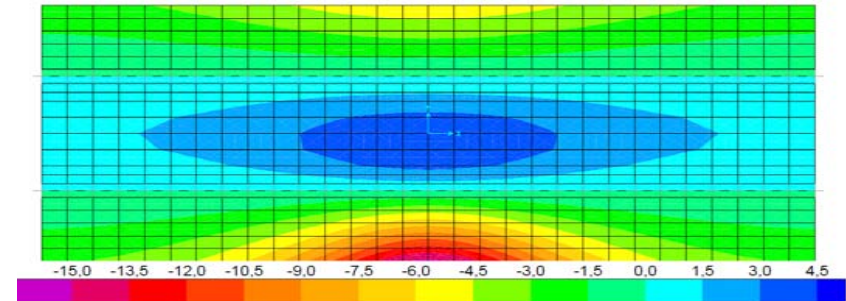


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

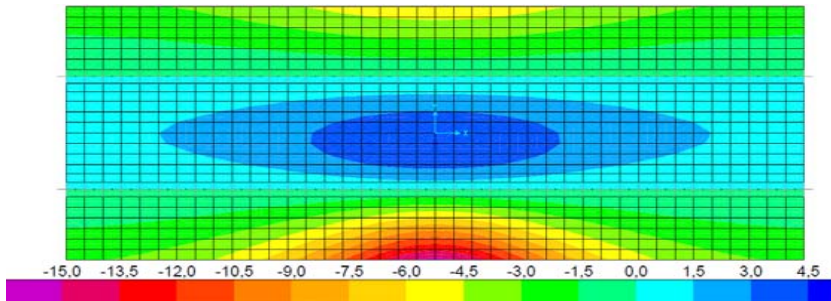
Malla 1: $w=15.1$ mm



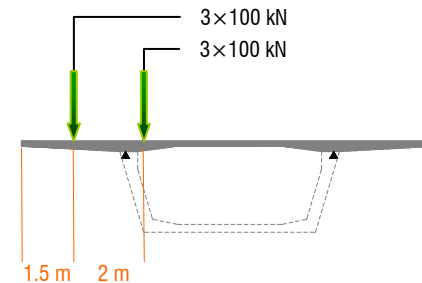
Malla 2: $w=15.5$ mm



Malla 3: $w=15.5$ kN

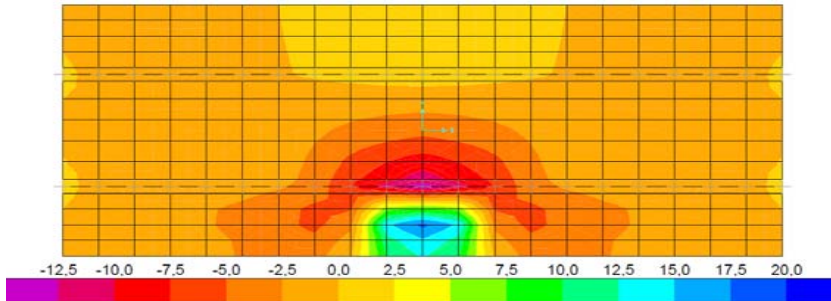


Caso de carga 2: vehículo pesado de la IAP-98 centrado longitudinalmente y con máxima excentricidad transversal

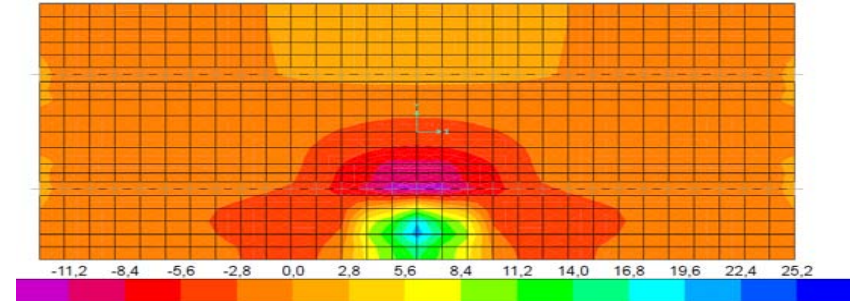


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

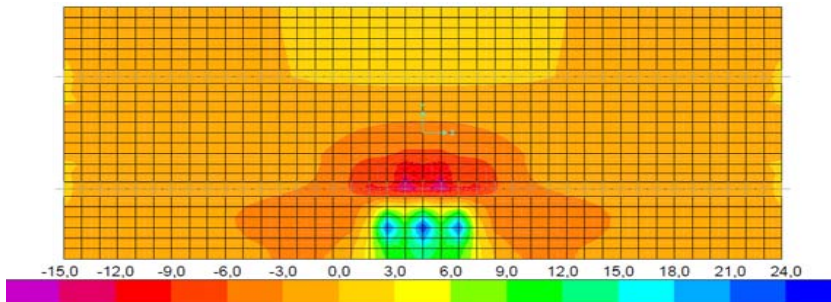
Malla 1: $M_{xxmax}=18.3$ kN



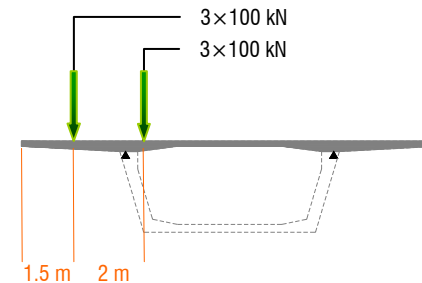
Malla 2: $M_{xxmax}=21.2$ kN



Malla 3: $M_{xxmax}=24.0$ kN

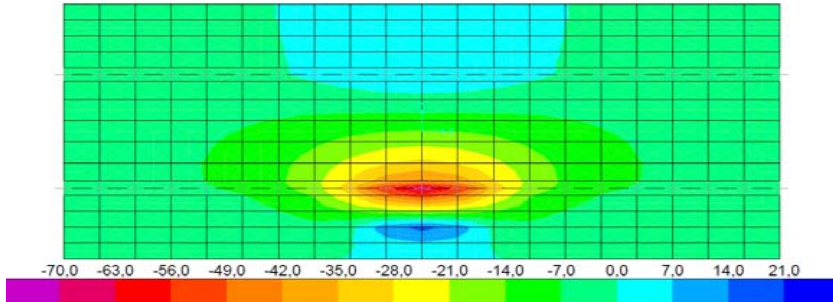


Caso de carga 2: vehículo pesado de la IAP-98 centrado longitudinalmente y con máxima excentricidad transversal

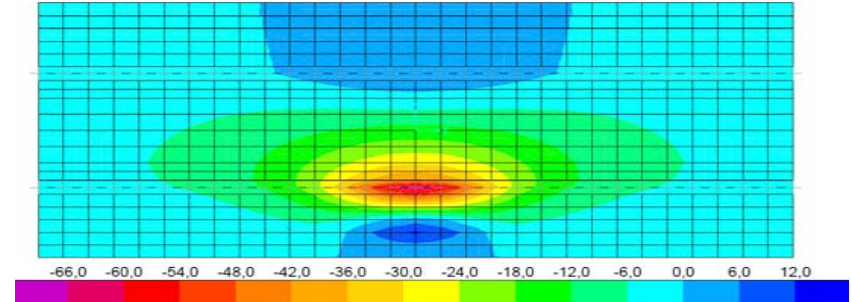


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

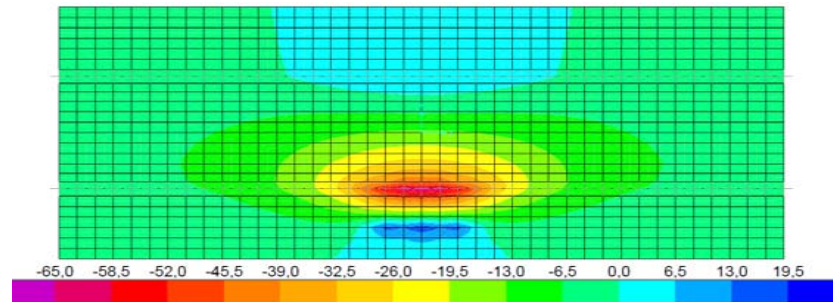
Malla 1: $M_{yy\max} = -63.8$ kN



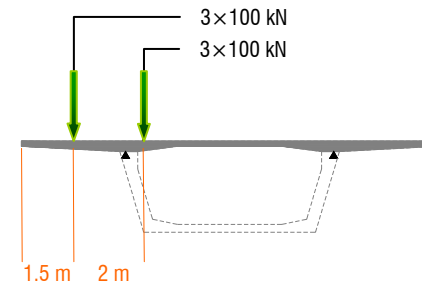
Malla 2: $M_{yy\max} = -66.0$ kN



Malla 3: $M_{yy\max} = -64.7$ kN



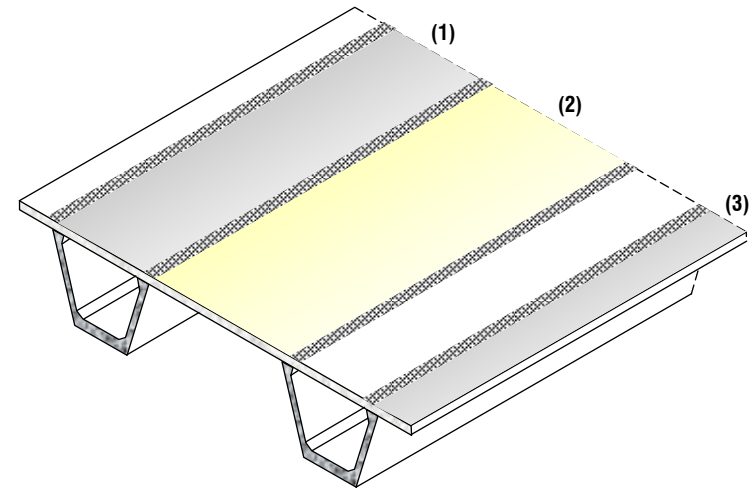
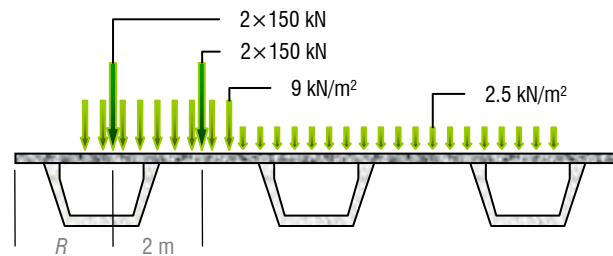
Caso de carga 2: vehículo pesado de la IAP-98 centrado longitudinalmente y con máxima excentricidad transversal



03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

▪ **Caso (II): tablero modelado como emparrillado.** Este segundo caso resulta menos claro que el anterior puesto que *el modelo global* ya *reproduce* en cierta medida *la flexión del piso*. Por lo tanto, el grado de refinamiento de la retícula del plano superior del emparrillado determinará la necesidad de un cálculo local complementario. Si así fuera, el plantear un modelo para el cálculo local que abarcara la totalidad del piso carece de sentido (*sería preferible refinar la retícula del plano superior del modelo global*) y tendremos que conformarnos con una *aproximación* mediante *condiciones de contorno ideales* (apoyo/empotramiento/libre) para las bandas de losa superior entre almas de las vigas físicas. Los tableros físicamente organizados como emparrillado, tipo **(e)** según **3.1** es decir con riostras transversales o vigas de piso, pueden exigir entonces analizar dos vanos consecutivos de piso, con el fin de reproducir con mayor exactitud el *empotramiento* debido a cargas concentradas actuantes en vanos alternos

Cond. de contorno de los bordes long.	
(1) Banda sobre artesa	apoyados /empotrados
(2) Banda entre aristas	apoyados /empotrados
(3) Voladizo lateral	empotrado

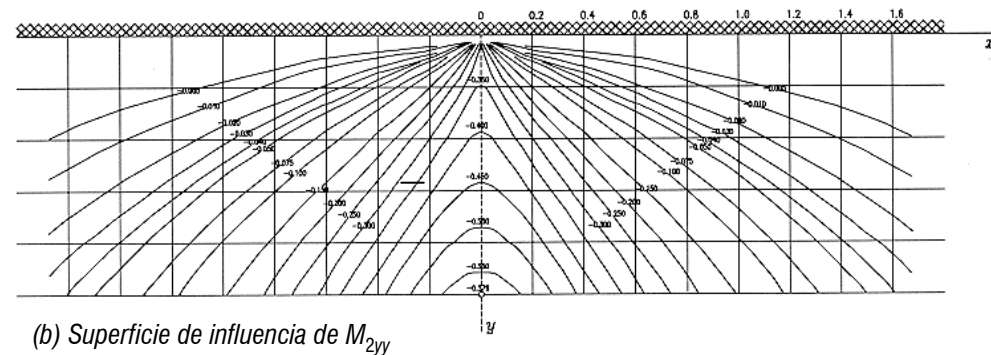
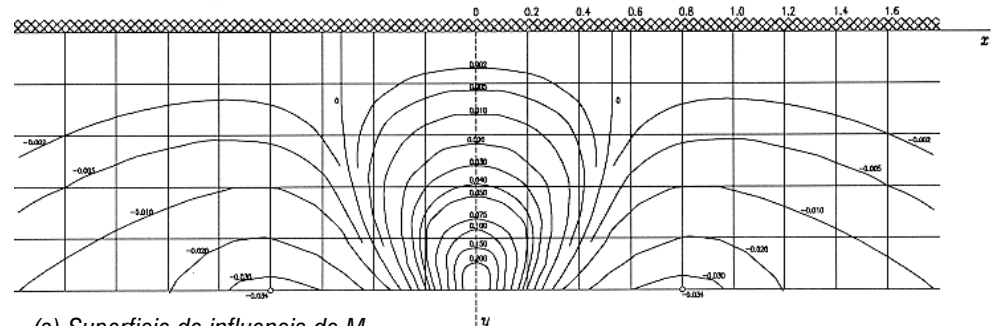
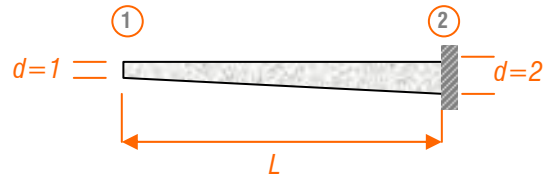


03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

- ❑ Existen varios métodos, que denominaremos genéricamente **históricos**, diseñados hace décadas y con la misma finalidad que las técnicas expuestas en la sección anterior: determinar las flexiones locales del piso bajo la acción de las cargas puntuales de las ruedas de los vehículos pesados
- ❑ Todos ellos se basan en la teoría de flexión de las placas delgadas y se presentan tradicionalmente en tres formatos:
 - **Fórmulas analíticas**. Se obtienen directamente de las soluciones clásicas para condiciones de borde y casos de carga específicos. Destaca entre ellas el **método de Westergaard**
 - **Tablas y ábacos**, siendo los más conocidos los de **Pigeaud**, de escasa aplicabilidad a los casos que nos interesan, y los de **Bakht y Jaeger**, específicos para los voladizos laterales
 - **Superficies de influencia**. Las de **Pücher** para losas de espesor constante y distintas condiciones de contorno, y las de **Homberg** para losas de espesor variable y longitud infinita, especialmente adaptadas a la casuística de los tableros de puente
- ❑ Aunque hoy en día su uso carece de sentido, pueden consultarse en la referencia **[42] Monleón, S., "Ingeniería de puentes: análisis estructural"**, Ref. 2001-067, Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia (1997), capítulo **7** y fuentes bibliográficas asociadas

03 Los esfuerzos locales en el análisis de tableros

□ **Ejemplo:** aspecto de las superficies de influencia de Homberg en una losa en voladizo de canto variable (*ancho infinito*)

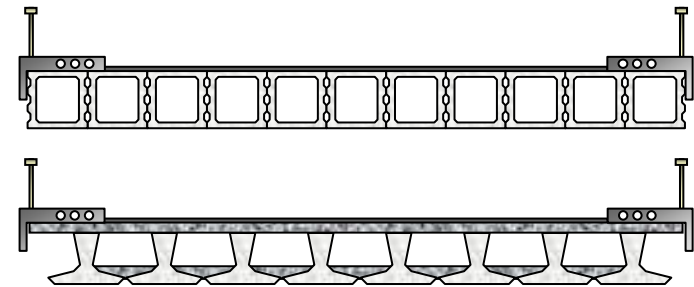
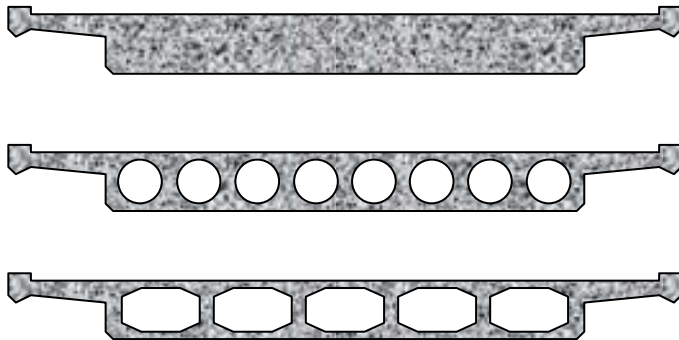


- 4.0 Motivación**
- 4.1 Losa recta simplemente apoyada**
- 4.2 Modelado mecánico de tableros losa**
- 4.3 Modelado numérico de tableros losa**
- 4.4 Comentarios finales**

04 El modelo losa en el análisis de tableros

□ En el contexto actual del cálculo de estructuras (*disponibilidad de equipos y códigos para procesar un método unificado, el MEF*) la **selección del modelo** solo debe tener en cuenta **aspectos morfológicos**, relegando a un segundo plano las cuestiones de cálculo

□ Consecuentemente, si el modelo losa supone una **distribución superficial uniforme de las propiedades mecánicas (rigideces)**, será válido para aquellos tableros que más se ajusten a esta característica: los **tableros macizos o aligerados de gran anchura y espesor constante**



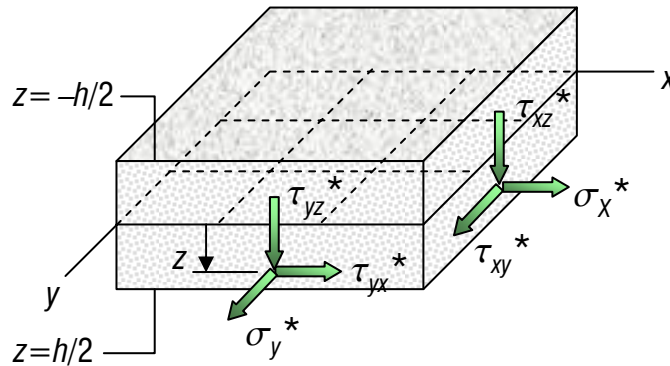
▪ Losas macizas y aligeradas, ejecutadas in situ o mediante elementos prefabricados

04 El modelo losa en el análisis de tableros

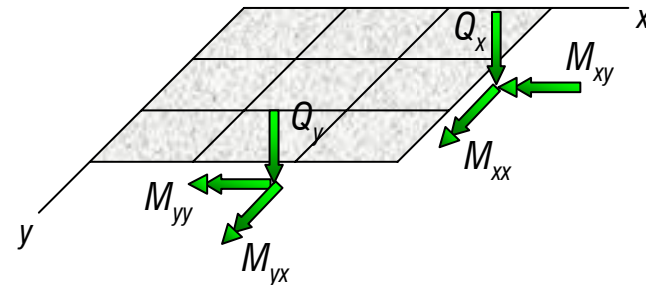
- ❑ La presencia de **aligeramientos** se incorpora al modelo a nivel **constitutivo**, dotando al material de características elásticas especiales (*anisotropía ortogonal u ortotropía*)
- ❑ En cuanto a la **evaluación de la respuesta**, la elección entre la resolución analítica o numérica (**MEF**) no da lugar a dudas dada la **mayor eficiencia de los códigos de elementos finitos** para abordar plantas y condiciones de sustentación arbitrarias. Sin embargo, los programas de **cálculo simbólico**, aunque de aplicación limitada a condiciones de contorno canónicas, permiten obtener soluciones exactas con poco esfuerzo y un alto nivel de interacción, lo cual favorece la **formación estructural** del estudiante
- ❑ Por este último motivo, comenzaremos por desarrollar la solución analítica para la flexión de un **tablero de planta recta**, para posteriormente abordar el punto clave del tema: como **plasmar el modelo**, esto es, establecer sus **rigideces** a partir de la geometría real del tablero y esencialmente de su sección transversal

04 El modelo losa en el análisis de tableros

(a) tensiones en el sólido 3D



(b) esfuerzos en el modelo 2D



Esfuerzos en una x-sección:

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}^* dz$$

$$M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x^* dz$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy}^* dz$$

Esfuerzos en una y-sección:

$$Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}^* dz$$

$$M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y^* dz$$

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{yx}^* dz$$

Ecuaciones de equilibrio interno:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q_z = 0$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = Q_x$$

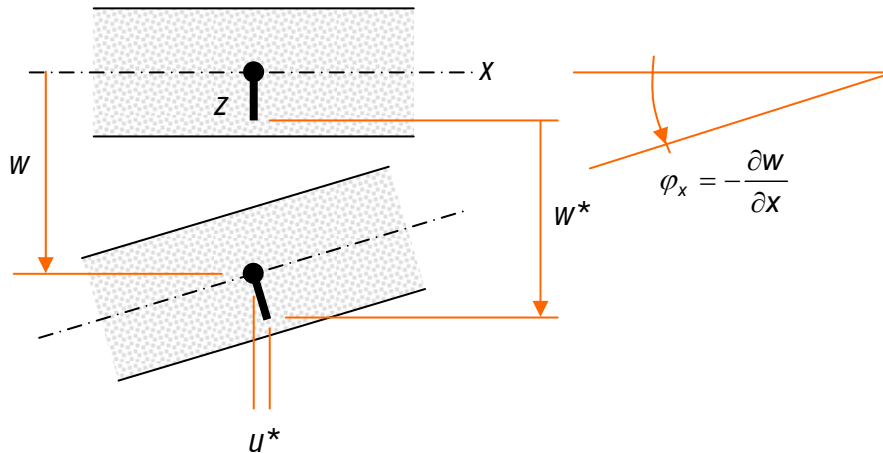
$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = Q_y$$

<4.1.1 VARIABLES ESTÁTICAS DE LA FLEXIÓN>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

□ En el plano (x,z)



Conviene tener en cuenta que:

por lo que la condición de **regularidad de la normal** (*hipótesis de Love-Kirchhoff*), que requiere $\gamma_{xz}^* = \gamma_{yz}^* = 0$, conduce a las definiciones de las rotaciones φ_x y φ_y empleadas anteriormente

■ Desplazamientos:

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}$$

■ Deformaciones:

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = -z K_{xx} \quad , \quad \varepsilon_y^* = \frac{\partial v^*}{\partial y} = z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = -z K_{yy}$$

$$\gamma_{xy}^* = \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} = z \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) = -z (K_{yx} + K_{xy})$$

■ En el plano (y,z) : $\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$

$$\gamma_{xz}^* = \frac{\partial w^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x} + \varphi_x \quad , \quad \gamma_{yz}^* = \frac{\partial w^*}{\partial y} + \frac{\partial v^*}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial y} + \varphi_y$$

<4.1.2 VARIABLES CINEMÁTICAS DE LA FLEXIÓN>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

□ **Ortotropía material.** En el caso de un material con *anisotropía ortogonal ideal* se tiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx}^* \\ \sigma_{yy}^* \end{Bmatrix} = \frac{1}{1-\nu_x\nu_y} \begin{bmatrix} E_x & \nu_y E_x \\ \nu_x E_y & E_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx}^* \\ \varepsilon_{yy}^* \end{Bmatrix} = -\frac{z}{1-\nu_x\nu_y} \begin{bmatrix} E_x & \nu_y E_x \\ \nu_x E_y & E_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \end{Bmatrix}$$

con $\nu_y E_x = \nu_x E_y$, por lo que

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \end{Bmatrix} &= -\frac{1}{1-\nu_x\nu_y} \begin{bmatrix} E_x & \nu_y E_x \\ \nu_x E_y & E_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \end{Bmatrix} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\ &= -\frac{h^3}{12(1-\nu_x\nu_y)} \begin{bmatrix} E_x & \nu_y E_x \\ \nu_x E_y & E_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Análogamente, para las tensiones tangenciales resulta:

$$\tau_{xy}^* = G_{xy} \gamma_{xy}^* = -z G_{xy} (K_{xy} + K_{yx})$$

luego

$$\begin{aligned} M_{xy} &= -G_{xy} (K_{xy} + K_{yx}) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz \\ &= -\frac{G_{xy} h^3}{12} (K_{xy} + K_{yx}) \end{aligned}$$

<4.1.3 RELACIONES CONSTITUTIVAS>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

□ **Ortotropía geométrica.** En tableros de puentes, el modelo ortótropo puede utilizarse para tratar el caso de las **losas alveolares** o bien el de las **losas nervadas**, siempre que aligeramientos y nervaduras estén suficientemente distribuidos. En tal caso, las relaciones anteriores pasan a escribirse:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{xx} & D_1 \\ D_2 & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} D_{xy} \\ D_{yx} \end{Bmatrix} (K_{xy} + K_{yx})$$

Obviamente, la ortotropía material equivale a:

$$D_{xx} = \frac{E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}, \quad D_{yy} = \frac{E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)}$$

$$D_1 = \frac{\nu_y E_x h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} = \frac{\nu_x E_y h^3}{12(1 - \nu_x \nu_y)} = D_2$$

$$D_{xy} = \frac{G_{xy} h^3}{12} = D_{yx}$$

Mientras que las losas macizas (*caso isótropo*) conducen a:

$$D_{xx} = D_{yy} = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)} = D, \quad D_1 = D_2 = \nu D$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{Gh^3}{12} = \frac{1 - \nu}{2} D$$

<4.1.3 RELACIONES CONSTITUTIVAS>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

■ **Ecuaciones de la losa ortótropa.** Resultan de llevar a la ecuación de equilibrio de fuerzas verticales, las relaciones entre cortantes y campo de momentos derivadas del equilibrio local de momentos:

$$\frac{\partial^2 M_{xx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (M_{yx} + M_{xy})}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_{yy}}{\partial y^2} + q_z = 0$$

Recurriendo entonces a las ecuaciones constitutivas se llega a:

$$D_{xx} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2H \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{yy} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = q_z$$

con

$$2H = D_1 + 2(D_{xy} + D_{yx}) + D_2$$

■ **Condiciones de contorno.** Se han de satisfacer en cada punto de la curva cerrada $\partial\Omega(s)$ que delimita la superficie media $\Omega(x,y)$ de la placa:

$$\int_{\partial\Omega} \left[(V_v - \hat{f}_z) \hat{w} - (M_{vv} - m_{vv}) \frac{\partial \hat{w}}{\partial v} \right] ds = 0 \quad , \quad V_v = Q_v + \frac{\partial M_{vs}}{\partial s}$$

En el caso de bordes rectos resulta para el **cortante efectivo** V_v :

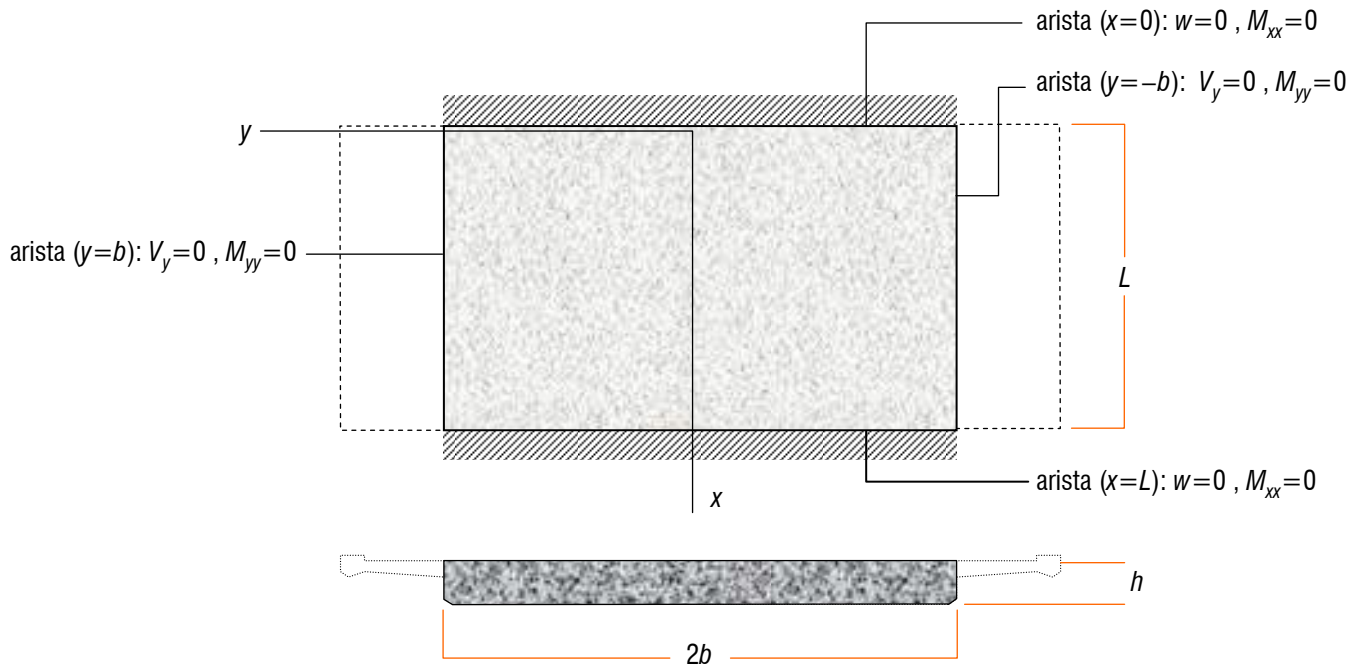
$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \quad , \quad V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x}$$

<4.1.4 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

■ **Geometría y condiciones de contorno del problema.** En esta fase, prescindiremos de posibles voladizos laterales



<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

■ **Construcción de la solución.** Para dominios $\Omega(x,y)$ rectangulares con simple apoyo en $x=(0,L)$ la solución analítica del problema de flexión puede darse en la forma:

$$w(x,y) = \sum_{N=1}^{\infty} \sin \alpha_N x \, w_N(y) \, , \quad \alpha_N = N\pi / L$$

■ Rotaciones y cambios de curvatura

$$\varphi_x = -\frac{\partial w}{\partial x} = \sum_{N=1}^{\infty} -\alpha_N w_N \cos \alpha_N x \quad , \quad \varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} = \sum_{N=1}^{\infty} -w'_N \sin \alpha_N x$$

$$K_{xx} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \sum_{N=1}^{\infty} -\alpha_N^2 w_N \sin \alpha_N x \quad , \quad K_{yy} = -\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \sum_{N=1}^{\infty} w''_N \sin \alpha_N x$$

$$K_{xy} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \sum_{N=1}^{\infty} \alpha_N w'_N \cos \alpha_N x = -\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = K_{yx}$$

■ Campo de momentos

$$M_{xx} = -(D_{xx} K_{xx} + D_1 K_{yy}) = \sum_{N=1}^{\infty} (\alpha_N^2 D_{xx} w_N - D_1 w''_N) \sin \alpha_N x$$

$$M_{yy} = -(D_2 K_{xx} + D_{yy} K_{yy}) = \sum_{N=1}^{\infty} (\alpha_N^2 D_2 w_N - D_{yy} w''_N) \sin \alpha_N x$$

$$M_{xy} = -D_{xy} (K_{xy} + K_{yx}) = -2D_{xy} \sum_{N=1}^{\infty} \alpha_N w'_N \cos \alpha_N x$$

$$M_{yx} = -D_{yx} (K_{xy} + K_{yx}) = -2D_{yx} \sum_{N=1}^{\infty} \alpha_N w'_N \cos \alpha_N x$$

<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

■ Cortantes y reacciones de Kirchhoff

$$Q_x = \frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y} = \sum_{N=1}^{\infty} \alpha_N [\alpha_N^2 D_{xx} w_N - (D_1 + 2D_{yx}) w_N''] \cos \alpha_N x$$

$$Q_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} = \sum_{N=1}^{\infty} [\alpha_N^2 (2D_{xy} + D_2) w_N' - D_{yy} w_N'''] \sin \alpha_N x$$

$$V_x = Q_x + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} = \sum_{N=1}^{\infty} \alpha_N [\alpha_N^2 D_{xx} w_N - (2H - D_2) w_N''] \cos \alpha_N x$$

$$V_y = Q_y + \frac{\partial M_{yx}}{\partial x} = \sum_{N=1}^{\infty} [\alpha_N^2 (2H - D_1) w_N' - D_{yy} w_N'''] \sin \alpha_N x$$

■ **Resolución.** Determinadas las funciones $w_N(y)$ para todo N , los restantes desplazamientos y esfuerzos del modelo se calculan mediante las series definidas en los puntos anteriores. Llevando la serie que proporciona $w(x,y)$ a la ecuación de la losa ortótropa resulta:

$$\sum_{N=1}^{\infty} \left[\alpha_N^4 D_{xx} w_N - 2\alpha_N^2 H \frac{d^2 w_N}{dy^2} + D_{yy} \frac{d^4 w_N}{dy^4} \right] \sin \alpha_N x = q_z$$

Multiplicando por la función ortogonal $(2/L)\sin \alpha_M x$ e integrando sobre la longitud de la losa, $x \in [0, L]$, se obtienen ecuaciones no triviales solo cuando $M=N$:

$$D_{yy} \frac{d^4 w_N}{dy^4} - 2\alpha_N^2 H \frac{d^2 w_N}{dy^2} + \alpha_N^4 D_{xx} w_N = q_{zN}$$

<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

Con las amplitudes del desarrollo en serie de la densidad superficial de carga $q_z(x,y)$ dadas por las funciones:

$$q_{zN}(y) = \frac{2}{L} \int_{x=0}^L \sin \alpha_N x \, q_z(x,y) dx$$

▪Ecuación característica

$$D_{yy} m^4 - 2\alpha_N^2 H m^2 + \alpha_N^4 D_{xx} = 0$$

$$m^2 = \alpha_N^2 \left[\frac{H}{D_{yy}} \pm \sqrt{\left(\frac{H}{D_{yy}} \right)^2 - \frac{D_{xx}}{D_{yy}}} \right]$$

▪Discusión: (1) $H^2 > D_{xx} D_{yy}$: todas las raíces son reales

$$r_1 = \left[\frac{H}{D_{yy}} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{D_{xx} D_{yy}}{H^2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r_2 = \left[\frac{H}{D_{yy}} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{D_{xx} D_{yy}}{H^2}} \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_N r_1 & \lambda_2 = \alpha_N r_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_1 & \lambda_4 = -\lambda_2 \end{cases}$$

Es el caso de las *losas de gran rigidez torsional*

<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

(2) $H^2 = D_{xx}D_{yy}$: dos raíces reales dobles $\lambda = \pm \alpha_N$. Es el caso de las *losas isótropas*

(3) $H^2 < D_{xx}D_{yy}$: todas las raíces son complejas

$$r_3 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_{xx}}{D_{yy}} \left(1 + \frac{H}{\sqrt{D_{xx}D_{yy}}} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad r_4 = \left[\frac{1}{2} \sqrt{\frac{D_{xx}}{D_{yy}} \left(1 - \frac{H}{\sqrt{D_{xx}D_{yy}}} \right)} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \alpha_N(r_3 + ir_4) & \lambda_2 = \alpha_N(r_3 - ir_4) \\ \lambda_3 = -\lambda_1 & \lambda_4 = -\lambda_2 \end{cases}$$

corresponde al caso más frecuente de las *losas de débil rigidez torsional*

▪ **Solución particular.** Sea $\mathbf{u}_N(y) = \{w_N(y) \ \varphi_{yN}(y)\}^T$ los desplazamientos de los puntos materiales de una y -sección y $\mathbf{f}_{yN}(y) = \{V_{yN}(y) \ M_{yN}(y)\}^T$ los esfuerzos consistentes. Tendremos entonces:

$$\mathbf{E}_N(y) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N(y) \\ \mathbf{f}_{yN}(y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uuN}(y) \\ \mathbf{G}_{fuN}(y) \end{bmatrix} \mathbf{u}_{1N} - \int_{t=-b}^y \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ufN}(y-t-b) \\ \mathbf{G}_{ffN}(y-t-b) \end{bmatrix} \mathbf{Q}_N(t) dt$$

$$\mathbf{u}_{1N} = \mathbf{G}_{fuN}^{-1}(b) \cdot \int_{t=-b}^b \mathbf{G}_{ffN}(-t) \mathbf{Q}_N(t) dt, \quad \mathbf{Q}_N(y) = \begin{Bmatrix} q_{zN}(y) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

Los operadores $\mathbf{G}_{uuN}(y)$, $\mathbf{G}_{ufN}(y)$... se definen a continuación:

$$\mathbf{G}_N(y) = \Phi_N(y) \Phi_{0N}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uuN}(y) & \mathbf{G}_{ufN}(y) \\ \mathbf{G}_{fuN}(y) & \mathbf{G}_{ffN}(y) \end{bmatrix}$$

Mientras que $\Phi_N(y)$ es un operador fundamental y Φ_{0N} su valor en $(y=-b)$. El primero puede obtenerse mediante el algoritmo siguiente:

$$\mathbf{E}_N(y) = \begin{Bmatrix} w_N(y) \\ \varphi_{yN}(y) \\ V_{yN}(y) \\ M_{yyN}(y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_N^2(2H - D_1) & 0 & -D_{yy} \\ \alpha_N^2 D_2 & 0 & -D_{yy} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_N(y) \\ w'_N(y) \\ w''_N(y) \\ w'''_N(y) \end{Bmatrix}$$

El vector de derivadas del desplazamiento transversal se deduce directamente de la solución homogénea puesto que para esta

$$w_N(y) = [e^{\lambda_1 y} \quad e^{\lambda_2 y} \quad e^{-\lambda_1 y} \quad e^{-\lambda_2 y}] \{k_i\}_{i=1a4}$$

si $H^2 \neq D_{xx} D_{yy}$ o bien

$$w_N(y) = [e^{\alpha_N y} \quad e^{-\alpha_N y} \quad ye^{\alpha_N y} \quad ye^{-\alpha_N y}] \{k_i\}_{i=1a4}$$

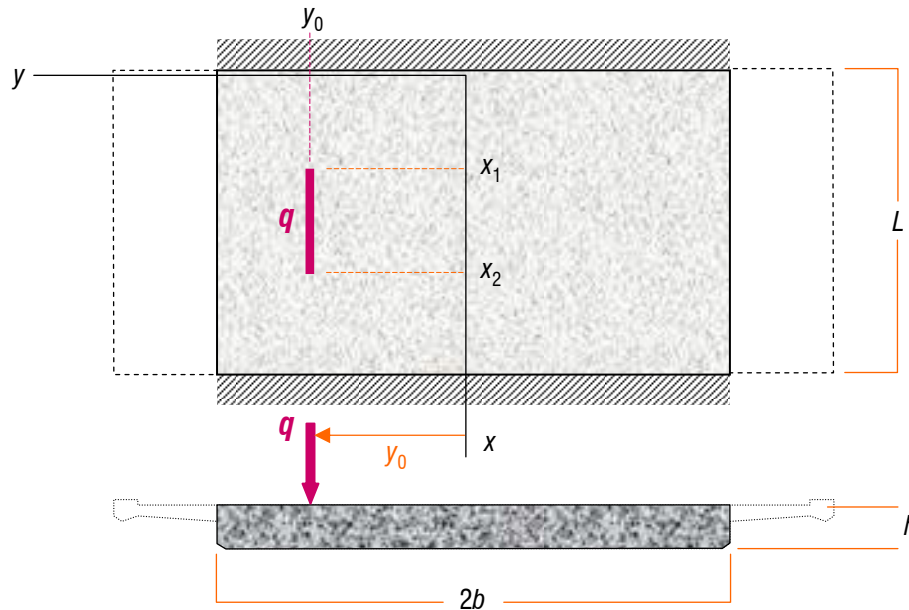
para *losas isótropas*

<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

▪ **Aplicación a un caso de carga.** Supongamos que actúa un densidad lineal de carga uniforme q a lo largo de $(y=y_0)$ para $x \in [x_1, x_2]$



(1) Los coeficientes de Fourier correspondientes a la carga considerada son:

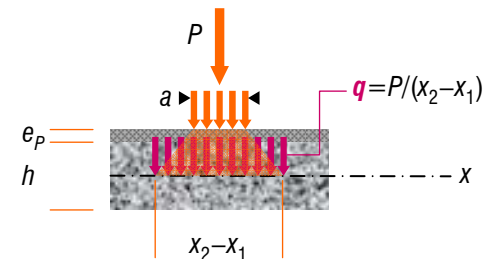
$$q_{zN} = \frac{2}{L} \int_{x=0}^L \sin \alpha_N x q_z(x) dx$$

$$= \frac{2q}{N\pi} (\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2)$$

El cuchillo de densidad q es adecuado para representar cargas concentradas ideales aplicadas en la cara superior del tablero puesto que estas sufren una difusión a través del pavimento y del espesor de la losa (además la **IAP-11** supone que se reparten sobre huellas rectangulares, de 0.4×0.4 m para los vehículos pesados):

$$|x_2 - x_1| = a + (h + 2e_p) \tan \theta$$

$$a = 0.4 \text{ m y } \theta \approx 45^\circ$$



La solución tiene una **convergencia** muy sensible al valor de $|x_2 - x_1|$, aunque variable para cada una de sus componentes, siendo esta más rápida cuanto más largo es este segmento

<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

Para esta ley de carga, las componentes del **vector estado** $\mathbf{E}_N(y)$ del caso isótropo pueden expresarse empleando funciones adimensionales:

$$\begin{aligned}
 w(x, y) &= \frac{PL^2}{D} \sum_{N=1}^{\infty} \sin \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \bar{w}_N(y) \\
 \varphi_y(x, y) &= \frac{PL}{D} \sum_{N=1}^{\infty} \sin \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \bar{\varphi}_{yN}(y) \\
 V_y(x, y) &= \frac{2P}{L} \sum_{N=1}^{\infty} \sin \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \bar{V}_{yN}(y) \\
 M_{yy}(x, y) &= 2P \sum_{N=1}^{\infty} \sin \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \bar{M}_{yyN}(y)
 \end{aligned}$$

Estas a su vez permiten evaluar directamente las restantes componentes de la respuesta. Por ejemplo para φ_x :

$$\varphi_{xN}(y) = -\alpha_N w_N(y)$$

luego

$$\varphi_x(x, y) = -\frac{PL}{D} \sum_{N=1}^{\infty} N \pi \cos \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \bar{w}_N(y)$$

<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

Análogamente:

$$Q_x(x, y) = \frac{2P}{L} \sum_{N=1}^{\infty} N\pi \cos \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \left[\frac{1-\nu}{2} (N\pi)^2 \bar{w}_N(y) + \bar{M}_{yyN}(y) \right]$$

$$Q_y(x, y) = \frac{2P}{L} \sum_{N=1}^{\infty} \sin \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \left[\frac{1-\nu}{2} (N\pi)^2 \bar{\phi}_{yN}(y) + \bar{V}_{yN}(y) \right]$$

$$M_{xx}(x, y) = 2P \sum_{N=1}^{\infty} \sin \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \left[\frac{1-\nu^2}{2} (N\pi)^2 \bar{w}_N(y) + \nu \bar{M}_{yyN}(y) \right]$$

$$M_{xy}(x, y) = 2P \sum_{N=1}^{\infty} N\pi \cos \alpha_N x \frac{\cos \alpha_N x_1 - \cos \alpha_N x_2}{\alpha_N (x_2 - x_1)} \frac{1-\nu}{2} \bar{\phi}_{yN}(y)$$

Variables y funciones auxiliares: $\beta_N = \frac{N\pi b}{L}$, $\varsigma = \frac{y}{b}$, $\varsigma_0 = \frac{y_0}{b}$

$$\varsigma_N = \beta_N(1+\varsigma) \quad , \quad \varsigma_{0N} = \beta_N(1+\varsigma_0) \quad , \quad \eta_N = \beta_N(1-\varsigma)$$

$$\bar{\omega}_{0N}(y) = \frac{P_N U_N(\varsigma_0) + 2\beta_N \operatorname{sh} 2\beta_N V_N(\varsigma_0)}{R_N S_N}$$

$$\bar{\phi}_{0N}(y) = \frac{Q_N V_N(\varsigma_0) - 2\beta_N \operatorname{sh} 2\beta_N U_N(\varsigma_0)}{R_N S_N}$$

$$P_N = \frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} 2\beta_N + 2\beta_N \operatorname{ch} 2\beta_N$$

$$Q_N = \frac{3+\nu}{1-\nu} \operatorname{sh} 2\beta_N - 2\beta_N \operatorname{ch} 2\beta_N$$

$$R_N = (3+\nu) \operatorname{sh} 2\beta_N + (1-\nu) 2\beta_N$$

$$S_N = (3+\nu) \operatorname{sh} 2\beta_N - (1-\nu) 2\beta_N$$

$$U_N(\varsigma) = 2\operatorname{ch} \eta_N - (1-\nu) \eta_N \operatorname{sh} \eta_N$$

$$V_N(\varsigma) = (1+\nu) \operatorname{sh} \eta_N + (1-\nu) \eta_N \operatorname{ch} \eta_N$$

<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

$$y \in [-b, y_0[$$

$$\bar{w}_N(y) = \frac{2ch_{\zeta_N} - (1-\nu)\zeta_N sh_{\zeta_N}}{(N\pi)^3} \bar{\omega}_{0N} - \frac{(1+\nu)sh_{\zeta_N} + (1-\nu)\zeta_N ch_{\zeta_N}}{(N\pi)^3} \bar{\phi}_{0N}$$

$$\bar{\phi}_{yN}(y) = \frac{2ch_{\zeta_N} + (1-\nu)\zeta_N sh_{\zeta_N}}{(N\pi)^2} \bar{\phi}_{0N} - \frac{(1+\nu)sh_{\zeta_N} - (1-\nu)\zeta_N ch_{\zeta_N}}{(N\pi)^2} \bar{\omega}_{0N}$$

$$\bar{V}_{yN}(y) = \frac{1-\nu}{2} [(3+\nu)sh_{\zeta_N} - (1-\nu)\zeta_N ch_{\zeta_N}] \bar{\omega}_{0N} - \frac{(1-\nu)^2}{2} \zeta_N sh_{\zeta_N} \bar{\phi}_{0N}$$

$$\bar{M}_{yyN}(y) = \frac{1-\nu}{2N\pi} [(3+\nu)sh_{\zeta_N} + (1-\nu)\zeta_N ch_{\zeta_N}] \bar{\phi}_{0N} + \frac{(1-\nu)^2}{2N\pi} \zeta_N sh_{\zeta_N} \bar{\omega}_{0N}$$

$$y \in]y_0, b]$$

$$\bar{w}_N(y) = \frac{2ch_{\zeta_N} - (1-\nu)\zeta_N sh_{\zeta_N}}{(N\pi)^3} \bar{\omega}_{0N} - \frac{(1+\nu)sh_{\zeta_N} + (1-\nu)\zeta_N ch_{\zeta_N}}{(N\pi)^3} \bar{\phi}_{0N} - \frac{1-(\zeta_N - \zeta_{0N})}{(N\pi)^3} sh(\zeta_N - \zeta_{0N})$$

$$\bar{\phi}_{yN}(y) = \frac{2ch_{\zeta_N} + (1-\nu)\zeta_N sh_{\zeta_N}}{(N\pi)^2} \bar{\phi}_{0N} - \frac{(1+\nu)sh_{\zeta_N} - (1-\nu)\zeta_N ch_{\zeta_N}}{(N\pi)^2} \bar{\omega}_{0N} + \frac{\zeta_N - \zeta_{0N}}{(N\pi)^2} sh(\zeta_N - \zeta_{0N})$$

$$\bar{V}_{yN}(y) = \frac{1-\nu}{2} [(3+\nu)sh_{\zeta_N} - (1-\nu)\zeta_N ch_{\zeta_N}] \bar{\omega}_{0N} - \frac{(1-\nu)^2}{2} \zeta_N sh_{\zeta_N} \bar{\phi}_{0N} - ch(\zeta_N - \zeta_{0N}) + \frac{1-\nu}{2} (\zeta_N - \zeta_{0N}) sh(\zeta_N - \zeta_{0N})$$

$$\bar{M}_{yyN}(y) = \frac{1-\nu}{2N\pi} [(3+\nu)sh_{\zeta_N} + (1-\nu)\zeta_N ch_{\zeta_N}] \bar{\phi}_{0N} + \frac{(1-\nu)^2}{2N\pi} \zeta_N sh_{\zeta_N} \bar{\omega}_{0N} - \frac{1+\nu}{2N\pi} sh(\zeta_N - \zeta_{0N}) - \frac{1-\nu}{2N\pi} (\zeta_N - \zeta_{0N}) ch(\zeta_N - \zeta_{0N})$$

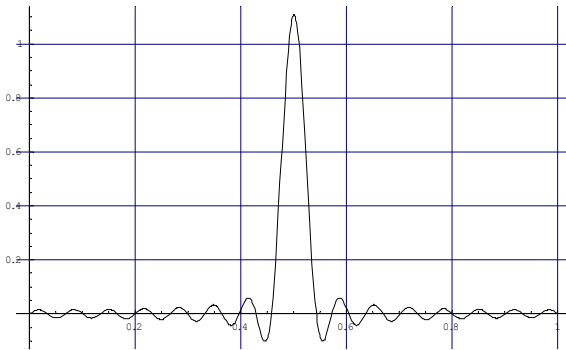
<4.1.5 SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

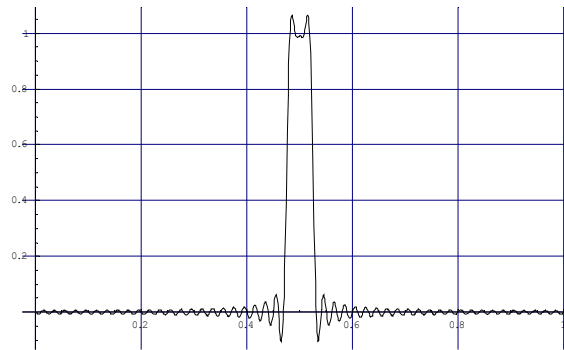
04 El modelo losa en el análisis de tableros

■ **Ejemplo de aplicación.** Losa maciza de dimensiones $L \times 2b = 20 \times 20$ m y 1 m de espesor, cargada con 100 kN repartidos linealmente entre las secciones $x_1 = 9.5$ m y $x_2 = 10.5$ m y excentricidad y_0

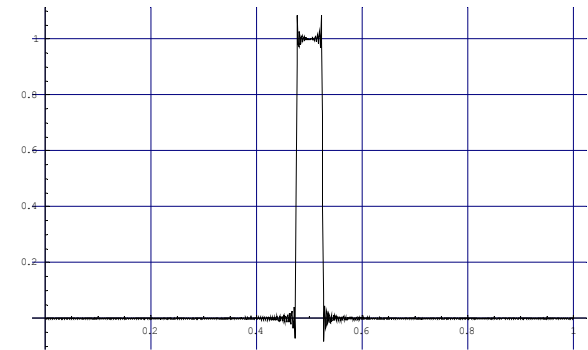
■ Simulación de la carga



$N=30$



$N=100$



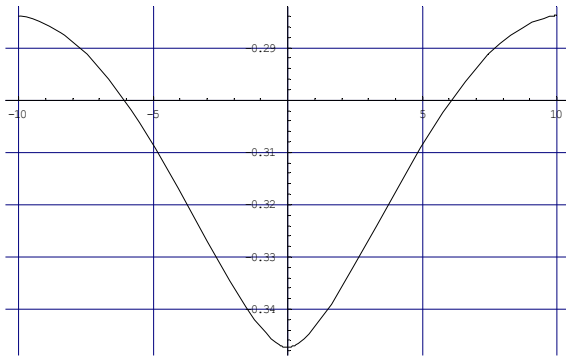
$N=500$

<4.1.6 EJEMPLO>

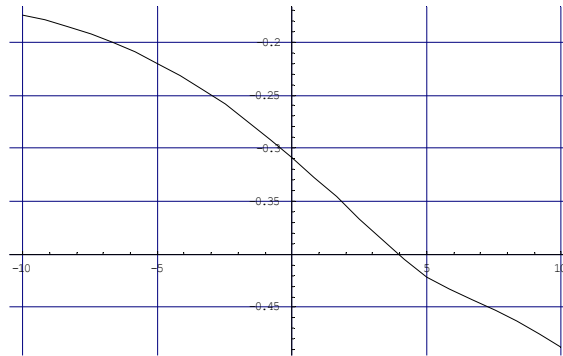
<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

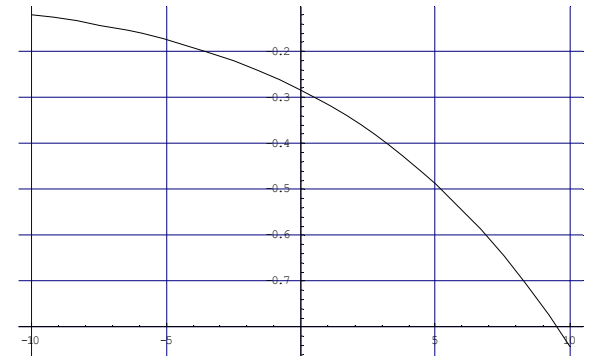
■ Deformada de la sección central



$$y_0=0, N=20$$



$$y_0=b/4, N=30$$



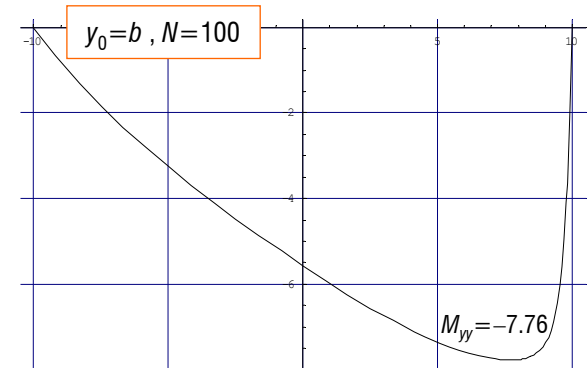
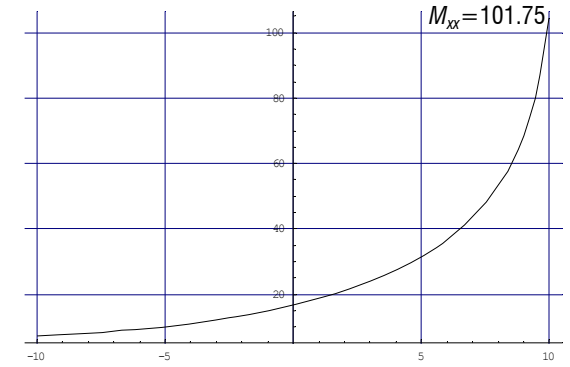
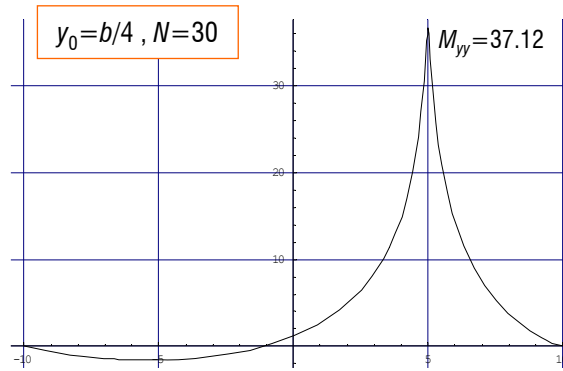
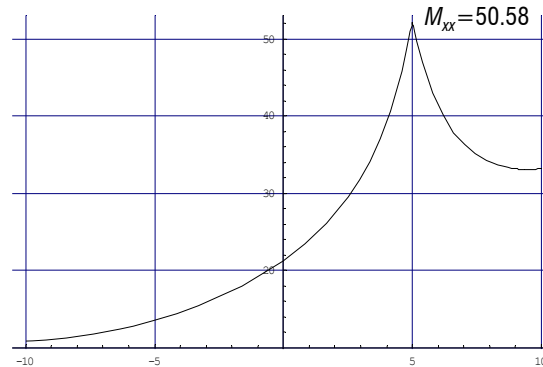
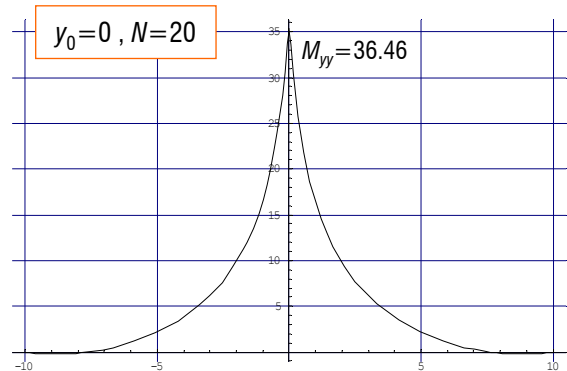
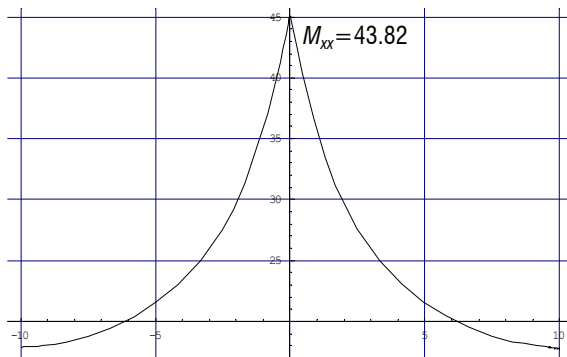
$$y_0=b, N=100$$

<4.1.6 EJEMPLO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

■ Flectores en la sección central



<4.1.6 EJEMPLO>

<4.1 LOSA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

04 El modelo losa en el análisis de tableros

□ **Modelado mecánico.** Consiste en definir los coeficientes D_{xx} a D_{yx} a partir de la morfología de las secciones transversales más usuales en esta tipología (suponemos espesor constante)

Sección transversal

rigideces

1 Losa maciza (caso isótropo)

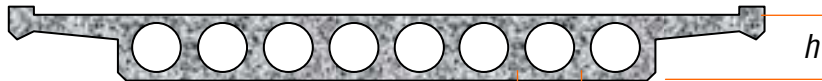


$$D_{xx} = D_{yy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D$$

$$D_1 = D_2 = \nu D$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D$$

2 Losa con aligeramientos Ø



$$\rho = h/b$$

$$D_{xx} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[1 - \frac{3\pi\rho}{16} \left(\frac{d}{h} \right)^4 \right]$$

$$D_{yy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \left[1 - 0.95 \left(\frac{d}{h} \right)^4 \right]$$

$$D_1 = D_2 = \nu D_{yy}$$

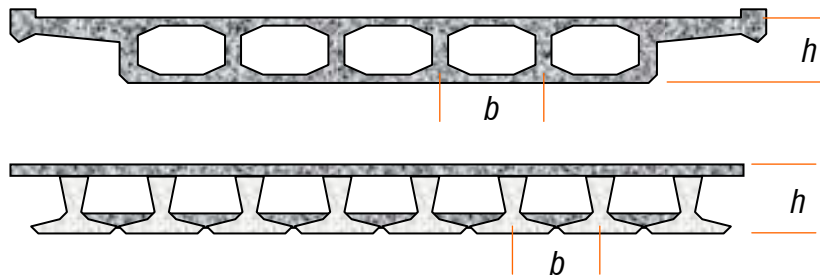
$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{Gh^3}{12} \left[1 - 0.84 \left(\frac{d}{h} \right)^4 \right]$$

04 El modelo losa en el análisis de tableros

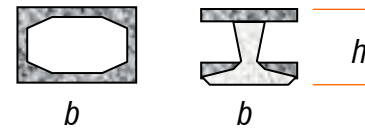
Sección transversal

rigideces

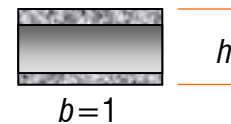
3 Losas con aligeramientos más generales



Secciones para I_y



Sección para I_x



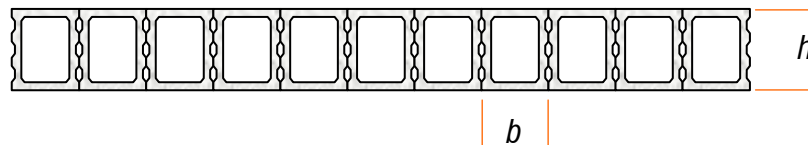
$$D_{xx} = \frac{EI_y}{b(1-\nu^2)}$$

$$D_{yy} = \frac{EI_x}{1-\nu^2}$$

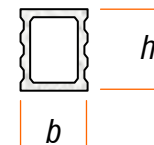
$$D_1 = D_2 = \nu D_{yy}$$

$$D_{xy} = D_{yx} = Gl_x$$

4 Losa con llaves de cortante



Sección para I_y, J



$$D_{xx} = \frac{EI_y}{b(1-\nu^2)}$$

$$D_{xy} = \frac{GJ}{b}$$

❑ **Voladizos laterales.** No se consideran al determinar las rigideces del modelo, debiendo ser únicamente objeto de cálculo local

04 El modelo losa en el análisis de tableros

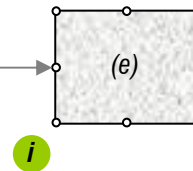
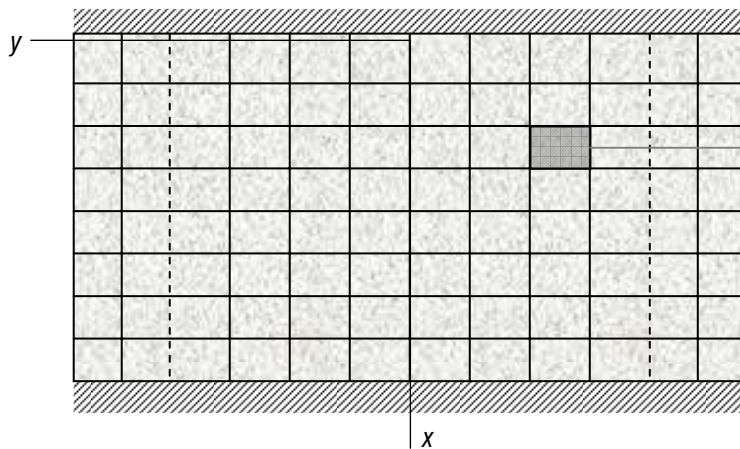
□ **Elementos finitos para el análisis “espacial” de losas.** En las secciones anteriores, nos hemos limitado a presentar el problema de flexión de una losa ortótropa, pero en el análisis del tablero también deberemos dar solución al efecto de las **cargas horizontales**, que activan la **respuesta membrana**. Por el rango de luces al que se aplica esta tipología, el control de las flexiones constituye el objetivo principal del dimensionamiento. Además, el estado membrana está desacoplado de la flexión en elementos estructurales sin curvatura, lo que habilita en todo caso un análisis individual de cada respuesta si nos decantamos por soluciones analíticas.

Sin embargo, el análisis en rigidez mediante **EF** le resta sentido a este planteamiento, proporcionando la enorme ventaja de poder utilizar un **único modelo** para **cualquier tipo de acción** exterior, además de habilitar el cálculo de tableros con plantas **no rectas**, como los puentes oblicuos o curvos de apoyos paralelos en estribos, para los cuales ya no pueden construirse soluciones exactas, pese a constituir casos geoméricamente simples. Que decir tiene que formas en planta de mayor complejidad o apoyos en pilas exigen invariablemente recurrir al **MEF**.

Además, la deformación por cortante puede incorporarse sistemáticamente al análisis, aspecto que como sabemos (ver el modelo emparrillado), cobra particular relevancia en losas aligeradas.

04 El modelo losa en el análisis de tableros

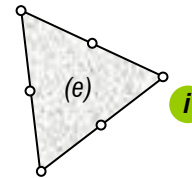
■ **Desplazamientos computados.** Serán las funciones $\mathbf{u}(x,y) = \{u(x,y), v(x,y), w(x,y), \varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)\}^T$ es decir, los propios de elementos tipo lámina o *shell*



elemento cuadrangular

$$\mathbf{u}_i = \{u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}\}^T$$

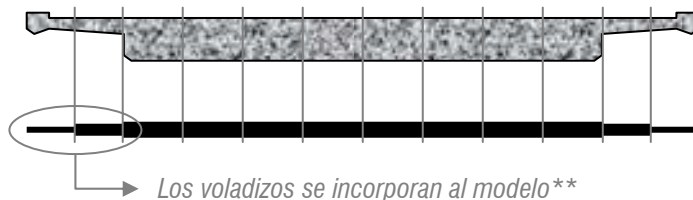
$$\mathbf{u}^e = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1 \text{ a } 8}, 40 \text{ GDLs}$$



elemento triangular*

$$\mathbf{u}_i = \{u_i, v_i, w_i, \varphi_{xi}, \varphi_{yi}\}^T$$

$$\mathbf{u}^e = \{\mathbf{u}_i\}_{i=1 \text{ a } 6}, 30 \text{ GDLs}$$

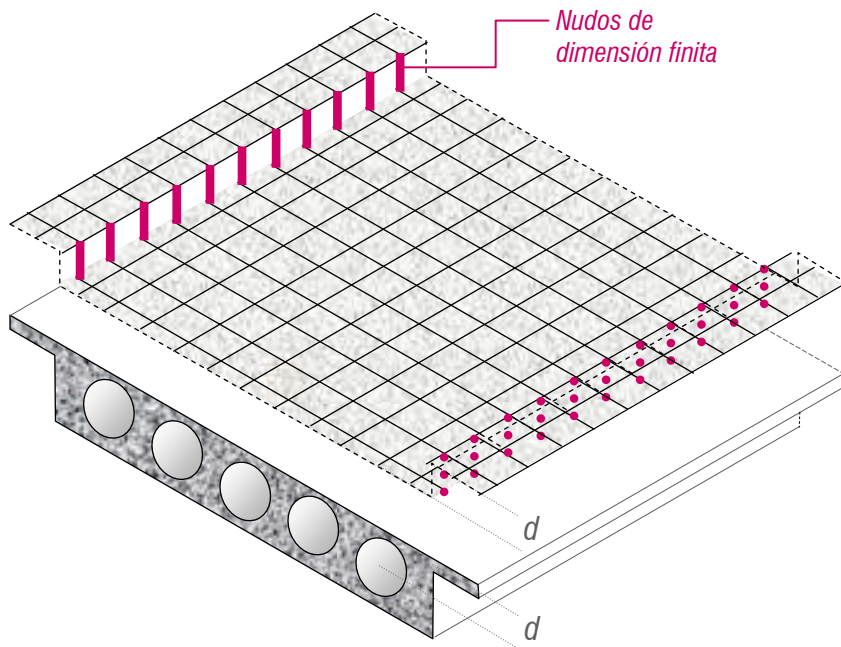


(*) este elemento permite variar la densidad del mallado rectangular en zonas que lo requieren (*en torno a apoyos por ejemplo*)

(**) esta sería la disposición geométrica de elementos y espesores asignados para un modelo losa **plano**.

04 El modelo losa en el análisis de tableros

■ **Mejora del modelo propuesto.** El modelo plano planteado anteriormente puede refinarse todavía más, aprovechando que los GDL seleccionando habilitan directamente el análisis espacial



- Los voladizos laterales se modelan en su posición espacial real, esto es con una excentricidad d respecto al plano neutro del cuerpo central del tablero, igual a $(h-h_v)/2$ si los aligeramientos son alvéolos circulares centrados y los voladizos tienen espesor constante
- Ello requiere emplear **Nudos de Dimensión Finita**, que conecten el plano neutro del cuerpo central del tablero con el de los voladizos
- Si los voladizos laterales son de espesor variable, basta mallarlos dentro de su plano medio, que resultará ligeramente inclinado en sección
- Con esta disposición, el modelo captará tanto la **flexión local** como el **arrastre de cortante** en las alas laterales

04 El modelo losa en el análisis de tableros

▪ **Limitaciones del modelo.** En la introducción de este tema se estableció como *única limitación* a la aplicación del modelo que las losas tuvieran una distribución de **rigidez** en sección transversal lo más **uniforme** posible. Evidentemente, esta cuestión **solo afecta a las losas aligeradas** y resulta lógico plantear algún criterio al respecto. En este sentido, se suele exigir que el **área aligerada sea menor del 60%** del área total, restricción que suele satisfacerse sobradamente en el caso de aligeramientos \emptyset

▪ **Cálculo local.** En general, el cálculo local **queda integrado** en la flexión global de la losa salvo en el caso de aligeramientos rectangulares, siempre que la separación entre almas sea excesiva ($>1.20\text{ m}$ puesto que las cargas concentradas de 150 kN se reparten sobre cuadrados de $0.40 \times 0.40\text{ m}$). Los voladizos laterales se suponen incorporados al modelo de **EF**

▪ **Tratamiento de las acciones horizontales.** En modelos 2D sin curvatura (*placas*) los estados **membrana** y **flexión** se **desacoplan**. Por lo tanto, la solución analítica del estado membrana, producto de las acciones contenidas en el plano horizontal, exigirá resolver un nuevo problema con $\mathbf{u}(x,y) = \{u,v\}^T$, $\mathbf{f}_x = \{N_{xx}, N_{xy}\}^T$ y $\mathbf{f}_y = \{N_{yx}, N_{yy}\}^T$. Sin embargo, como en general el problema se resuelve por el **MEF**, basta seleccionar el elemento adecuado (tipo **shell**) para tratar simultáneamente cualquier tipo de acción. Además, ello también permite tener en cuenta la **posición real** de los voladizos laterales mediante **nudos de dimensión finita**, con lo que también se captará el arrastre de cortante en las alas

- 5.0 Motivación**
- 5.1 Lámina plegada recta simplemente apoyada**
- 5.2 Modelado mecánico de tableros de pared delgada**
- 5.3 Modelado numérico de tableros de pared delgada**
- 5.4 Comentarios finales**

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

❑ La **lámina plegada** es el modelo más sofisticado que cabe plantear en el contexto del análisis de tableros de puente y genéricamente, este puede presentarse como un **sistema espacial** de elementos 2D

❑ Al igual que para el modelo losa, la situación actual del cálculo de estructuras (*disponibilidad de equipos y códigos para procesar un método unificado, el MEF*) conduce a que la **selección del modelo** solo debe tener en cuenta **aspectos morfológicos**, relegando a un segundo plano las cuestiones de cálculo

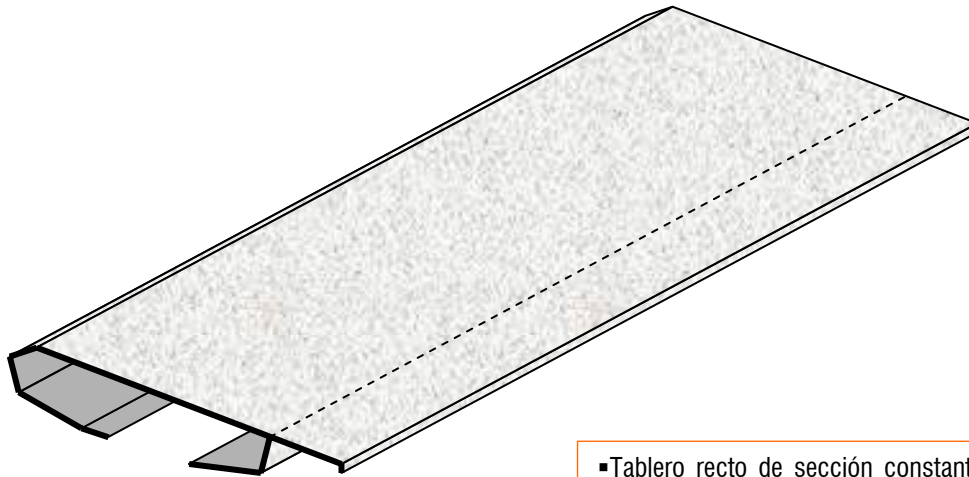
❑ Por ello, el contenido de este tema se ha estructurado de forma idéntica al dedicado al análisis de tableros losa:

- Lamina plegada recta simplemente apoyada, **solución exacta**
- **Modelado mecánico** de tableros de pared delgada
- **Modelado numérico** de tableros de pared delgada

aunque en este caso, el interés por las soluciones analíticas, incluso con fines exclusivamente didácticos, se ve fuertemente mermado por la mayor complejidad de la formulación simbólica derivada de la topología del modelo (*sistema espacial*)

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

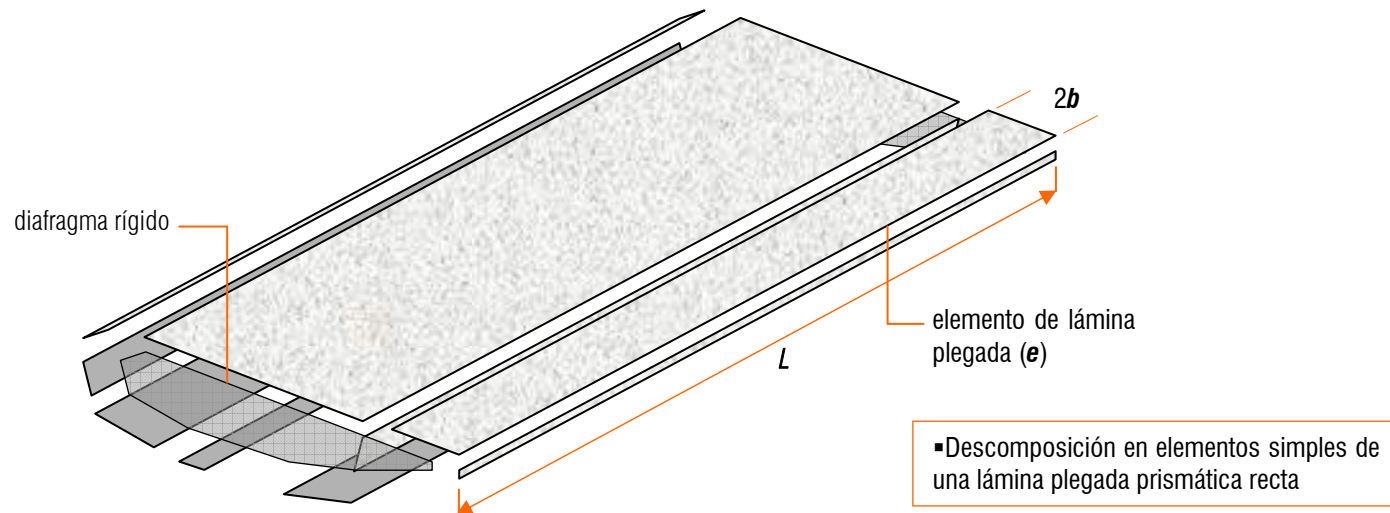
□ La optimización de la distribución del material resistente en tableros de puente conduce naturalmente a la adopción de formas estructurales más eficientes, que combinen *ligereza* y *rigidez*. En este sentido, las **construcciones de pared**, delgada de gran aplicación en la ingeniería naval y aeronáutica, proporcionan indudablemente la mejor solución



▪ Tablero recto de sección constante de pared delgada (lámina plegada prismática recta)

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

□ El análisis de este tipo de tableros requiere un modelo que conjugue las **características de comportamiento** de las láminas (coexistencia de los estados de **membrana y flexión**) con las **propiedades geométricas** de la construcción, que puede visualizarse como un **sistema de placas o láminas** unidas entre sí a lo largo de aristas longitudinales



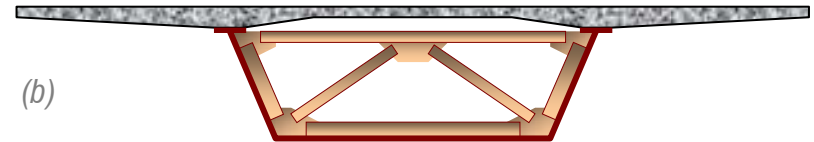
□ Por ello constituye el modelo más **sofisticado** y de aplicación más **costosa**, pero el más **eficiente** en la predicción de la respuesta de las estructuras de pared delgada

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

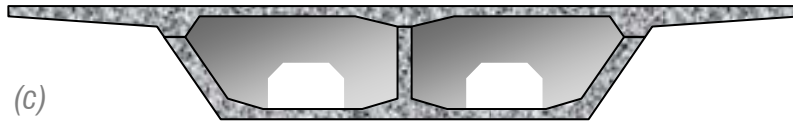
□ Tratándose de puentes, las **secciones transversales** afines a esta caracterización estructural pueden ser cerradas o abiertas, homogéneas (de hormigón o metálicas) o mixtas



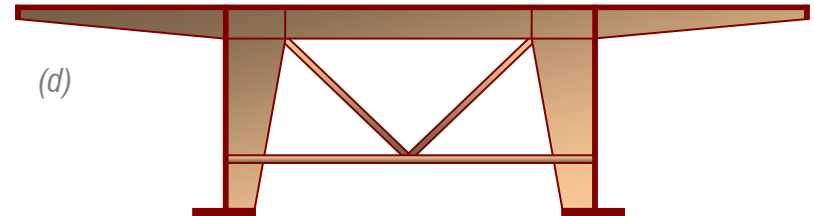
(a)



(b)



(c)



(d)

■ Secciones transversales **standard** de tableros modelables como lámina plegada: *cajón único en HP (a) y mixto (b), cajón bicelular en HP (c) y sección abierta de doble viga o en π metálica (d)*

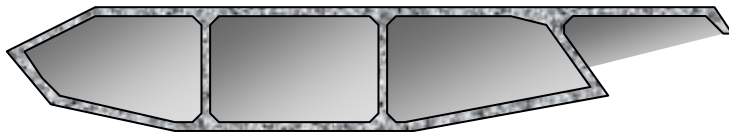
05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

□ A la vista de estas secciones, resulta inevitable **cuestionar** la utilidad de un modelo mucho más sofisticado que la **viga**, dada la aparente coincidencia de formas que ambos permiten abordar

■ Sección abierta de HP



■ Sección multicelular de HP



■ Sección multicelular en acero



■ Secciones transversales **singulares** de tableros modelables como lámina plegada

□ Evidentemente, debemos buscar la respuesta en los límites de aplicabilidad de la teoría de vigas:

- Relación ancho-luz **B/L** excesiva, aumentando el **arrastre de cortante**
- Sección transversal **deformable**, amplificándose la **distorsión** y la **flexión local** de la losa superior

En contrapartida, todos estos fenómenos resultarán completamente **captados** por el modelo lámina plegada

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

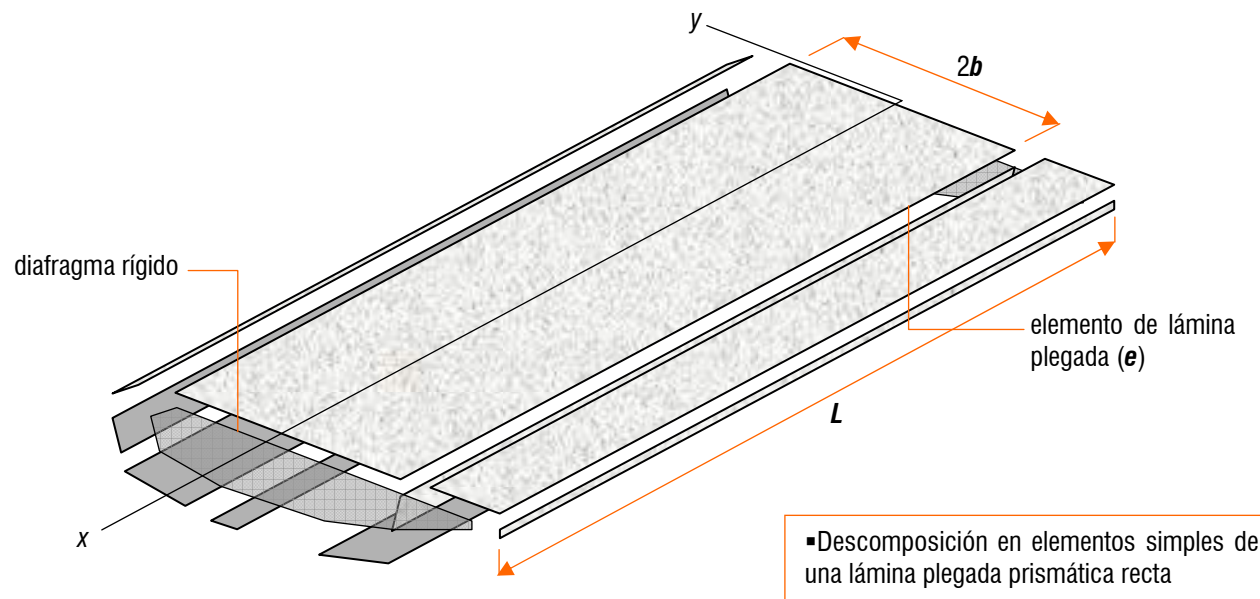
❑ En cuanto a la *evaluación de la respuesta*, la elección entre una resolución analítica o numérica (*MEF*) no da lugar a dudas dada la mayor eficiencia de los *códigos de elementos finitos* para abordar plantas y condiciones de sustentación arbitrarias, variación de canto o modelado de diafragmas y sobre todo por sus opciones de pre y post-proceso, cada vez más adaptadas al modelado y chequeo de puentes. Los programas de *cálculo simbólico* permiten obtener soluciones exactas, pero con un esfuerzo de programación notablemente superior al caso de las losas, y con unas restricciones morfológicas todavía mayores, lo cual limita en gran medida su interés, exclusivamente didáctico

❑ Por todo ello, la presentación de la *resolución analítica* de un tablero de planta recta, de pared delgada, simplemente apoyado, mediante el modelo lámina plegada se ha *sintetizado al máximo*

❑ En cambio, el apartado siguiente, destinado a como *plasmar el modelo*, resulta muy *natural* dada la extraordinaria proximidad física entre estructura real y modelo (solo los paneles metálicos pueden plantear alguna duda a la hora de establecer sus rigideces)

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

▪ **Topología del modelo.** Supondremos que el modelo está formado por paneles (e) de dimensiones $2b \times L$, apoyados en los diafragmas extremos, y posee uniones rígidas entre placas a largo de los pliegues. Estas condiciones permitirán una formulación armónica, como en el caso de la placa simple

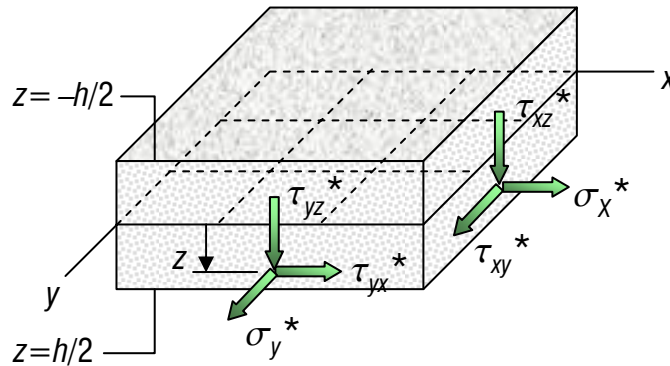


<5.1.1 PRESENTACIÓN DEL MÉTODO>

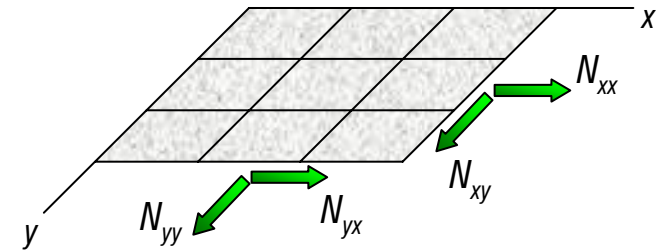
<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

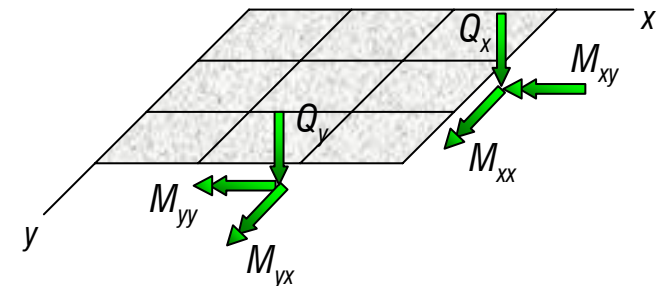
(a) tensiones en el sólido 3D



(b.1) esfuerzos de membrana en el modelo 2D



(b.2) esfuerzos de flexión en el modelo 2D



Esfuerzos en una x-sección: $N_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x^* dz$, $N_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy}^* dz$
 $Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz}^* dz$, $M_{xx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x^* dz$, $M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy}^* dz$

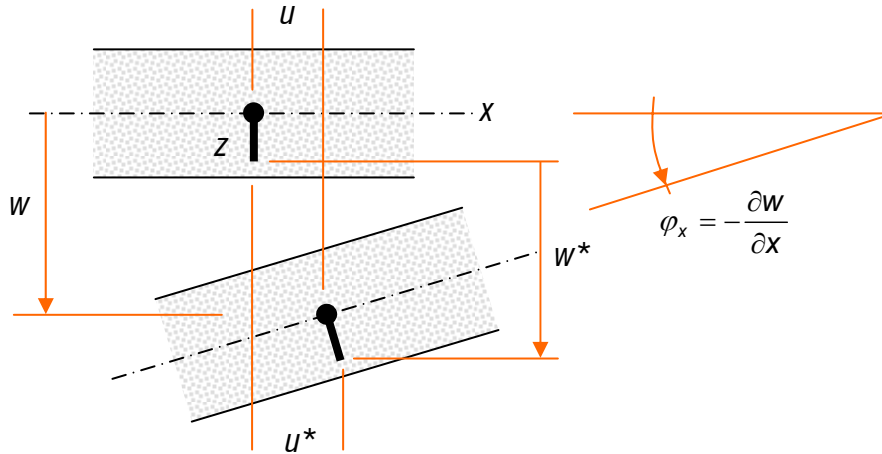
Esfuerzos en una y-sección: $N_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y^* dz$, $N_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx}^* dz$
 $Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz}^* dz$, $M_{yy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y^* dz$, $M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{yx}^* dz$

<5.1.2 VARIABLES ESTÁTICAS EN CADA PANEL>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

□ En el plano (x,z)



■ Desplazamientos:

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ v^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & z & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \\ \varphi_y \end{Bmatrix}$$

■ Deformaciones:

$$\varepsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = e_{xx} - z K_{xx}$$

$$\varepsilon_y^* = \frac{\partial v^*}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + z \frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = e_{yy} - z K_{yy}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{xy}^* &= \frac{\partial v^*}{\partial x} + \frac{\partial u^*}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + z \left(\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} + \frac{\partial \varphi_x}{\partial y} \right) \\ &= e_{yx} + e_{xy} - z (K_{yx} + K_{xy}) \end{aligned}$$

■ En el plano (y,z) : v y $\varphi_y = -\frac{\partial w}{\partial y}$

Nuevamente hemos impuesto la condición de **regularidad de la normal** (hipótesis de Love-Kirchhoff), que requiere $\gamma_{xz}^* = \gamma_{yz}^* = 0$ y conduce a las definiciones de las rotaciones φ_x y φ_y empleadas

<5.1.3 VARIABLES CINEMÁTICAS EN CADA PANEL>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

□ **Ortotropía geométrica.** En cada panel de un tablero de pared delgada, el *modelo ortótropo* puede utilizarse para tratar el caso de las **caras nervadas (rigidizadas)**, siempre que los rigidizadores estén suficientemente distribuidos. En tal caso, las relaciones constitutivas pasan a escribirse:

$$\begin{Bmatrix} M_{xx} \\ M_{yy} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{xx} & D_1 \\ D_2 & D_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} K_{xx} \\ K_{yy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} M_{xy} \\ M_{yx} \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} D_{xy} \\ D_{yx} \end{bmatrix} (K_{xy} + K_{yx})$$

$$\begin{Bmatrix} N_{xx} \\ N_{yy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xx} & C_1 \\ C_2 & C_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} N_{xy} \\ N_{yx} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{xy} \\ C_{yx} \end{bmatrix} (e_{xy} + e_{yx})$$

Con las extensiones y cambios de curvatura del plano medio:

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$e_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad e_{yx} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$K_{xx} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad K_{yy} = -\frac{\partial \varphi_y}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

$$K_{xy} = -\frac{\partial \varphi_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial \varphi_y}{\partial x} = K_{yx}$$

<5.1.4 RELACIONES CONSTITUTIVAS>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

■ **Esquema general de cálculo.** Consta de los siguientes pasos:

(1) ecuación de rigidez del panel aislado	requiere definir las variables primarias , transformar el problema 2D en un problema ordinario , integrarlo y expresar el problema de contorno en desplazamientos (ecuación de rigidez del panel aislado)	
(2) transformación de coordenadas	consiste en expresar la ecuación de rigidez de cada panel, determinada en coordenadas locales (x,y,z) , en coordenadas generales (X,Y,Z)	
(3) ecuación de rigidez del tablero	se obtiene de imponer las condiciones nodales de equilibrio de fuerzas y compatibilidad de movimientos entre todos los paneles unidos a lo largo de una misma arista	
(4) evaluación de la respuesta de cada panel	resuelto el equilibrio global del tablero, el estado final en cada panel se evalúa transformando a coordenadas locales de cada elemento, los desplazamientos y fuerzas de arista finales (ecuación de rigidez del panel). Estos constituyen entonces los valores en el contorno del vector estado	

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

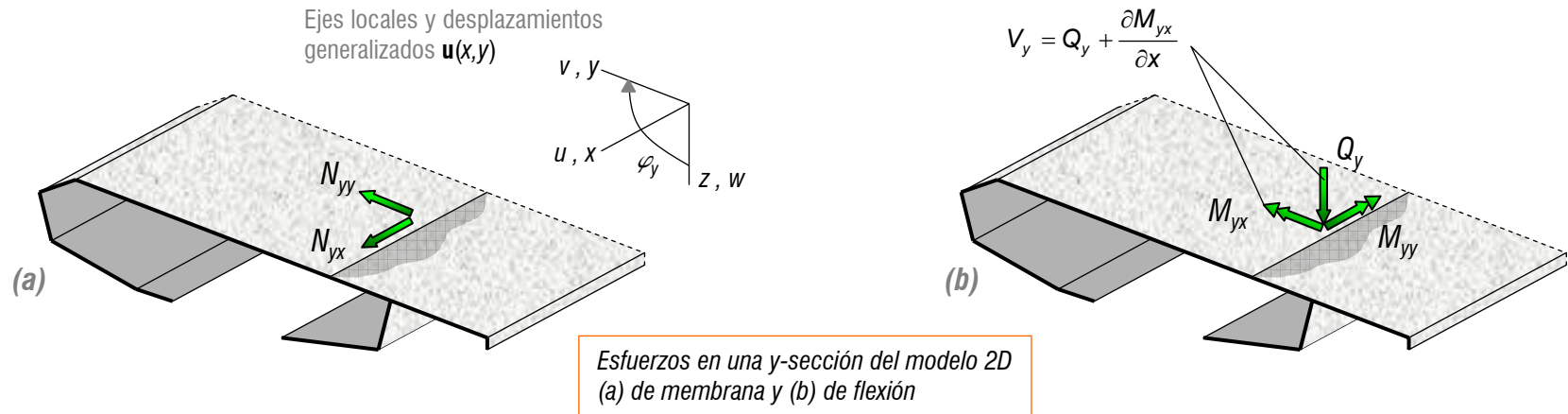
▪ **Ecuación de rigidez del panel aislado.** Si los desplazamientos y esfuerzos *primarios* del problema son los asociados a una y -sección:

$$\mathbf{u}(x,y) = \{u(x,y) \ v(x,y) \ w(x,y) \ \varphi_y(x,y)\}^T$$

$$\mathbf{f}_y(x,y) = \{N_{yx}(x,y) \ N_{yy}(x,y) \ V_y(x,y) \ M_{yy}(x,y)\}^T$$

estos permitirán expresar directamente las condiciones de contorno (equilibrio de fuerzas y compatibilidad de movimientos) a lo largo de las *aristas* ($y=\pm b$). Agrupados en el vector estado $\mathbf{E}(x,y)$ tendremos:

$$\mathbf{E}(x,y) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x,y) \\ \mathbf{f}_y(x,y) \end{Bmatrix}$$

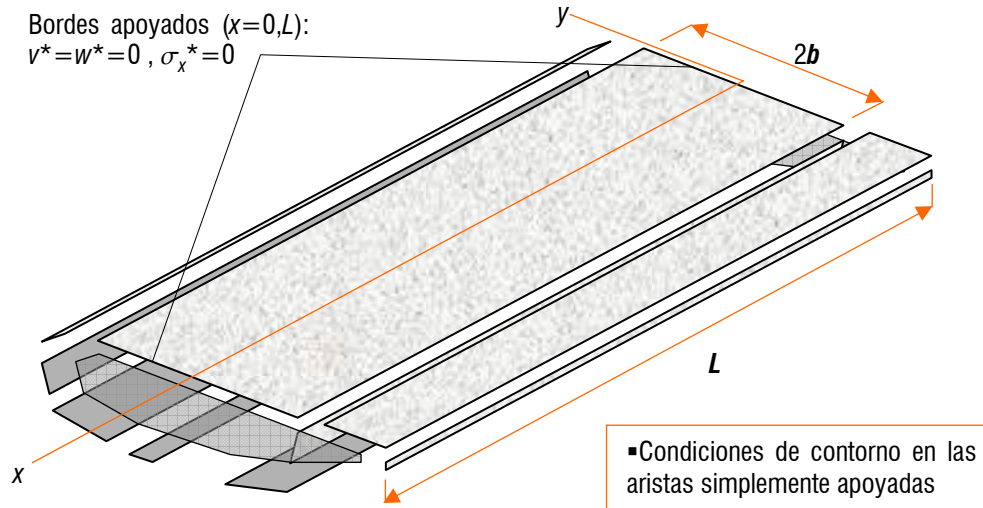


<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

▪ **Ecuación de rigidez del panel aislado.** Para condiciones de contorno *canónicas* (paneles simplemente apoyados en los diafragmas extremos), el vector estado puede expresarse como una serie del tipo Lévy:



$$u(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty} \Psi_N(x) u_N(y), \quad f_y(x, y) = \sum_{N=1}^{\infty} \Psi_N(x) f_{yN}(y)$$

$$\Psi_N(x) = \begin{bmatrix} \cos \alpha_N x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin \alpha_N x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sin \alpha_N x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin \alpha_N x \end{bmatrix}$$

▪ Por ejemplo, para las tensiones longitudinales tendremos:

$$\sigma_x^* = \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \nu_y \frac{\partial v^*}{\partial y} \right)$$

$$= \frac{E_x}{1 - \nu_x \nu_y} \sum_{N=1}^{\infty} \sin \alpha_N x [-\alpha_N u_N(y) + v'_N(y)]$$

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

■ **Ecuación de rigidez del panel aislado.** Bajo este supuesto, el vector estado $\mathbf{E}(x,y) = \{\mathbf{u}(x,y), \mathbf{f}_y(x,y)\}$ puede expresarse de la siguiente forma:

$$\mathbf{E}(x,y) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x,y) \\ \mathbf{f}_y(x,y) \end{Bmatrix} = \sum_{N=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_N(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_N(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N(y) \\ \mathbf{f}_{yN}(y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N(y) \\ \mathbf{f}_{yN}(y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uuN}(y) & \mathbf{G}_{ufN}(y) \\ \mathbf{G}_{fuN}(y) & \mathbf{G}_{ffN}(y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N(-b) \\ \mathbf{f}_{1N}(-b) \end{Bmatrix} - \int_{t=-b}^y \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ufN}(y-t-b) \\ \mathbf{G}_{ffN}(y-t-b) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}_N(t) dt$$

En la fórmula anterior, el operador $\mathbf{G}_N(y)$ es el **operador fundamental** del problema de equilibrio del panel (*membrana y placa*, 8×8), mientras que el vector $\mathbf{Q}_N(y)$ contiene las transformadas de Fourier de las densidades superficiales de carga (4×1). Particularizando la solución general de cada panel a lo largo de la arista ($y=b$) tendremos:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N|_{y=b} \\ \mathbf{f}_{yN}|_{y=b} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uuN}|_{y=b} & \mathbf{G}_{ufN}|_{y=b} \\ \mathbf{G}_{fuN}|_{y=b} & \mathbf{G}_{ffN}|_{y=b} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N|_{y=-b} \\ \mathbf{f}_{yN}|_{y=-b} \end{Bmatrix} - \int_{t=-b}^b \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ufN}(-t) \\ \mathbf{G}_{ffN}(-t) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{Q}_N(t) dt$$

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

▪ **Ecuación de rigidez del panel aislado.** Sea ahora $\mathbf{u}_{1N} = \mathbf{u}_N|_{y=-b}$, $\mathbf{f}_{1N} = -\mathbf{f}_{yN}|_{y=-b}$, $\mathbf{u}_{2N} = \mathbf{u}_N|_{y=b}$, $\mathbf{f}_{2N} = \mathbf{f}_{yN}|_{y=b}$, despejando en la ecuación anterior (*transferencia*) la **fuerzas nodales** $\mathbf{f}_{iN} = \{T_{iN} \ N_{iN} \ V_{iN} \ M_{iN}\}^T$ en función de los movimientos $\mathbf{u}_{iN} = \{u_{iN} \ v_{iN} \ w_{iN} \ \varphi_{iN}\}^T$ se llega a:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{1N} \\ \mathbf{f}_{2N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11N} & \mathbf{K}_{12N} \\ \mathbf{K}_{21N} & \mathbf{K}_{22N} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1N} \\ \mathbf{u}_{2N} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{1N}^0 \\ \mathbf{f}_{2N}^0 \end{Bmatrix}$$

con la *matriz de rigidez*

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{11N} &= \mathbf{G}_{ufN}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{uuN} & \mathbf{K}_{12N} &= -\mathbf{G}_{ufN}^{-1} \\ \mathbf{K}_{21N} &= \mathbf{G}_{fuN} - \mathbf{G}_{ffN} \cdot \mathbf{G}_{ufN}^{-1} \cdot \mathbf{G}_{uuN} & \mathbf{K}_{22N} &= \mathbf{G}_{ffN} \cdot \mathbf{G}_{ufN}^{-1} \end{aligned}$$

y las **fuerzas iniciales**

$$\mathbf{Q}_N^e = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{1N}^0 \\ \mathbf{f}_{2N}^0 \end{Bmatrix}, \quad \begin{cases} \mathbf{f}_{1N}^0 = -\mathbf{K}_{12N} \int_{t=-b}^b \mathbf{G}_{ufN}(-t) \cdot \mathbf{Q}_N(t) dt \\ \mathbf{f}_{2N}^0 = \mathbf{K}_{21N} \int_{t=-b}^b \mathbf{G}_{ufN}(t) \cdot \mathbf{Q}_N(t) dt \end{cases}$$

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

▪ **Ecuación de rigidez del panel aislado.** Teniendo en cuenta el desacoplamiento membrana-flexión, la composición de la matriz de rigidez del panel es:

$$\mathbf{K}_{11N} = \begin{bmatrix} k_{11}^m & k_{12}^m & 0 & 0 \\ & k_{22}^m & 0 & 0 \\ & & k_{11}^b & k_{12}^b \\ & & & k_{22}^b \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{12N} = \begin{bmatrix} k_{13}^m & k_{14}^m & 0 & 0 \\ -k_{14}^m & k_{24}^m & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{13}^b & k_{14}^b \\ 0 & 0 & -k_{14}^b & k_{24}^b \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{21N} = \mathbf{K}_{12N}^T \quad \mathbf{K}_{22N} = \begin{bmatrix} k_{11}^m & -k_{12}^m & 0 & 0 \\ & k_{22}^m & 0 & 0 \\ & & k_{11}^b & -k_{12}^b \\ & & & k_{22}^b \end{bmatrix}$$

En el **caso isótropo**, el cálculo explícito de los coeficientes de la matriz de rigidez (*acciones membrana y flexión*) conduce a fórmulas del ($\beta_N = \alpha_N b$):

$$k_{11N}^m = K \alpha_N \frac{\mu sh 4 \beta_N - 4 \beta_N}{(\mu sh 2 \beta_N)^2 - (2 \beta_N)^2} \quad \dots \quad \mu = \frac{3 - \nu}{1 + \nu} \quad K = \frac{Eh}{(1 + \nu)^2}$$

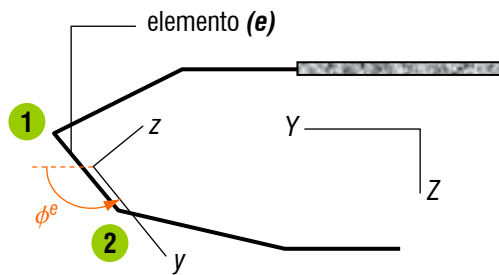
$$k_{11N}^b = D \alpha_N^3 \frac{sh 4 \beta_N + 4 \beta_N}{(sh 2 \beta_N)^2 - (2 \beta_N)^2} \quad \dots \quad D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

■ Transformación de coordenadas.



$$\lambda^e = \begin{bmatrix} \lambda_1^e & 0 \\ 0 & \lambda_2^e \end{bmatrix}, \quad \lambda_i^e = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi^e & \sin \phi^e & 0 \\ 0 & -\sin \phi^e & \cos \phi^e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{i=1,2}$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_N^e = \tilde{\mathbf{K}}_N^e \cdot \tilde{\mathbf{u}}_N^e - \tilde{\mathbf{Q}}_N^e$$

$$\tilde{\mathbf{f}}_N^e = \lambda^{eT} \cdot \mathbf{f}_N^e, \quad \tilde{\mathbf{Q}}_N^e = \lambda^{eT} \cdot \mathbf{Q}_N^e$$

$$\mathbf{u}_N^e = \lambda^e \cdot \tilde{\mathbf{u}}_N^e$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_N^e = \lambda^{eT} \cdot \mathbf{K}_N^e \cdot \lambda^e$$

■ **Ecuación de rigidez del tablero.** Formación de la matriz de rigidez del tablero y cálculo de las amplitudes de los desplazamientos nodales $\tilde{\mathbf{u}}_N^* = \{ \tilde{\mathbf{u}}_{(i)N} \}_{i=1 \text{ a } n}$

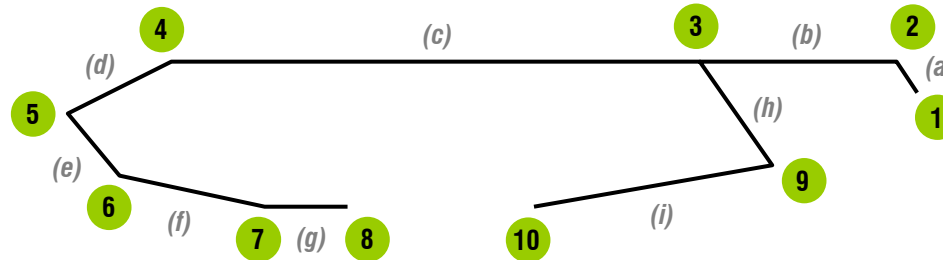
$$\tilde{\mathbf{K}}_N^* \cdot \tilde{\mathbf{u}}_N^* - \tilde{\mathbf{Q}}_N^* = \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{u}}_N^* = [\tilde{\mathbf{K}}_N^*]^{-1} \cdot \tilde{\mathbf{Q}}_N^*$$

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

▪ Ecuación de rigidez del tablero. Ejemplo



$$\begin{bmatrix}
 \tilde{K}_{11}^a & \tilde{K}_{12}^a & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \tilde{K}_{21}^a & \tilde{K}_{22}^a + \tilde{K}_{11}^b & \tilde{K}_{12}^b & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \tilde{K}_{21}^b & \tilde{K}_{22}^b + \tilde{K}_{11}^c + \tilde{K}_{11}^h & \dots & \tilde{K}_{12}^h & 0 \\
 \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
 0 & 0 & \tilde{K}_{21}^h & \dots & \tilde{K}_{22}^h + \tilde{K}_{11}^i & \tilde{K}_{12}^i \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \tilde{K}_{21}^i & \tilde{K}_{22}^i
 \end{bmatrix}_N
 \begin{Bmatrix}
 \tilde{u}_{(1)} \\
 \tilde{u}_{(2)} \\
 \tilde{u}_{(3)} \\
 \dots \\
 \tilde{u}_{(9)} \\
 \tilde{u}_{(10)}
 \end{Bmatrix}_N
 =
 \begin{Bmatrix}
 \tilde{Q}_1^a \\
 \tilde{Q}_2^a + \tilde{Q}_1^b \\
 \tilde{Q}_2^b + \tilde{Q}_1^c + \tilde{Q}_1^h \\
 \dots \\
 \tilde{Q}_2^h + \tilde{Q}_1^i \\
 \tilde{Q}_2^i
 \end{Bmatrix}_N$$

$$\tilde{u}_{(1)} = \tilde{u}_1^a \quad \tilde{u}_{(2)} = \tilde{u}_2^a = \tilde{u}_1^b \quad \tilde{u}_{(3)} = \tilde{u}_2^b = \tilde{u}_1^c = \tilde{u}_1^h \dots$$

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

▪ **Evaluación de la respuesta de cada panel.** Determinados los desplazamientos nodales $\tilde{\mathbf{u}}_N^*$, se procede como sigue:

(1) Cálculo de las amplitudes de los desplazamientos nodales en coordenadas locales, para cada elemento (e) delimitado por las aristas i y j :

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_N^e &= \boldsymbol{\lambda}^e \cdot \tilde{\mathbf{u}}_N^e \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda_2 \end{bmatrix}^e \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}_{(i)} \\ \tilde{\mathbf{u}}_{(j)} \end{Bmatrix}_N\end{aligned}$$

(2) Determinación de las fuerzas de arista en $y=-b$. Estas serán:

$$\mathbf{f}_{1N}^e = [\mathbf{K}_{11N} \quad \mathbf{K}_{12N}]^e \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1N} \\ \mathbf{u}_{2N} \end{Bmatrix}^e - \mathbf{Q}_{1N}^e$$

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

(3) Cómputo de las componentes del vector estado del elemento (e):

con

$$\mathbf{E}(x, y) = \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x, y) \\ \mathbf{f}_y(x, y) \end{Bmatrix} = \sum_{N=1}^{\infty} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Psi}_N(x) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Psi}_N(x) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N(y) \\ \mathbf{f}_{yN}(y) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}_N(y) \\ \mathbf{f}_{yN}(y) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{uuN}(y) & \mathbf{G}_{ufN}(y) \\ \mathbf{G}_{fuN}(y) & \mathbf{G}_{ffN}(y) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}_{1N} \\ -\mathbf{f}_{1N} \end{Bmatrix} - \int_{t=-b}^y \begin{bmatrix} \mathbf{G}_{ufN}(y-t-b) \\ \mathbf{G}_{ffN}(y-t-b) \end{bmatrix} \mathbf{Q}_N(t) dt$$

(4) Obtención de las restantes funciones características de la respuesta del panel:

$$\varphi_x, \quad N_{xx}, \quad N_{xy}, \quad Q_x, \quad Q_y, \quad M_{xx}, \quad M_{xy}, \quad M_{yx}$$

Calculadas a partir de $\mathbf{E}_N(y)$ y de las ecuaciones cinemáticas, constitutivas y de equilibrio

<5.1.5 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE EQUILIBRIO>

<5.1 LÁMINA PLEGADA RECTA SIMPLEMENTE APOYADA>

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

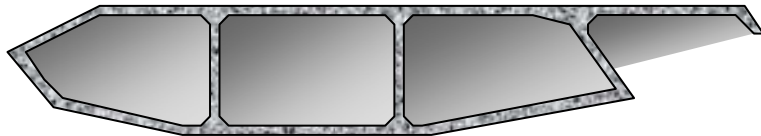
Sección transversal

rigideces

1 Tableros de HP (caso isótropo)



■ Sección abierta de HP



■ Sección multicelular de HP

$$D_{xx} = D_{yy} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = D$$

$$D_1 = D_2 = \nu D$$

$$D_{xy} = D_{yx} = \frac{1-\nu}{2} D$$

$$C_{xx} = C_{yy} = \frac{Eh}{1-\nu^2} = C$$

$$C_1 = C_2 = \nu C$$

$$C_{xy} = C_{yx} = \frac{1-\nu}{2} C$$

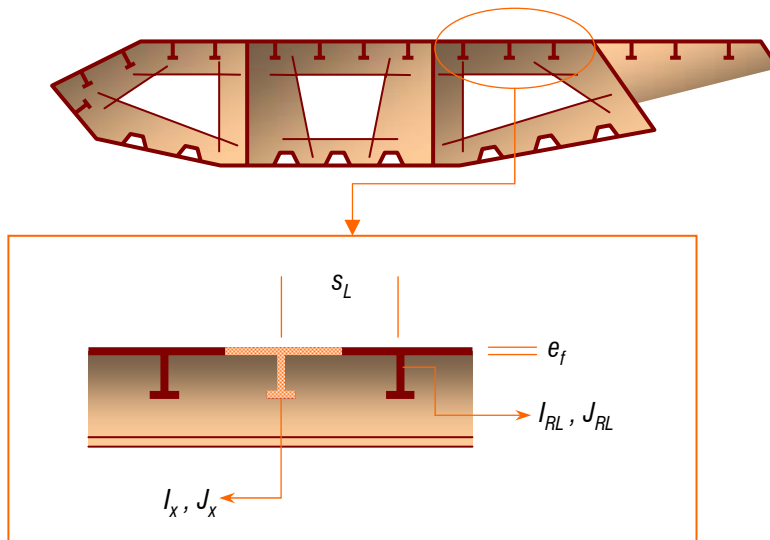
■ Este caso también puede aplicarse a los paneles de hormigón de las **secciones mixtas**, que en general coinciden con el piso de estos tableros

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

Sección transversal

rigideces

2 Paneles metálicos



$$D_{xx} = \frac{E_s I_x}{s_L}, \quad D_{yy} = \frac{E_s I_y}{s_T}$$

$$D_1 = D_2 = \frac{\nu_s E_s e_f^3}{12(1 - \nu_s^2)}$$

$$D_{xy} = \frac{R}{2} \frac{G_s J_x}{s_L}, \quad D_{yx} = \frac{G_s J_{RT}}{2s_T} + \frac{G_s e_f^3}{12}$$

$$C_{xx} = C_f(1 + \alpha_{RL}), \quad C_{yy} = C_f(1 + \alpha_{RT})$$

$$C_1 = \nu_s C_f(1 + \alpha_{RT}), \quad C_2 = \nu_s C_f(1 + \alpha_{RL})$$

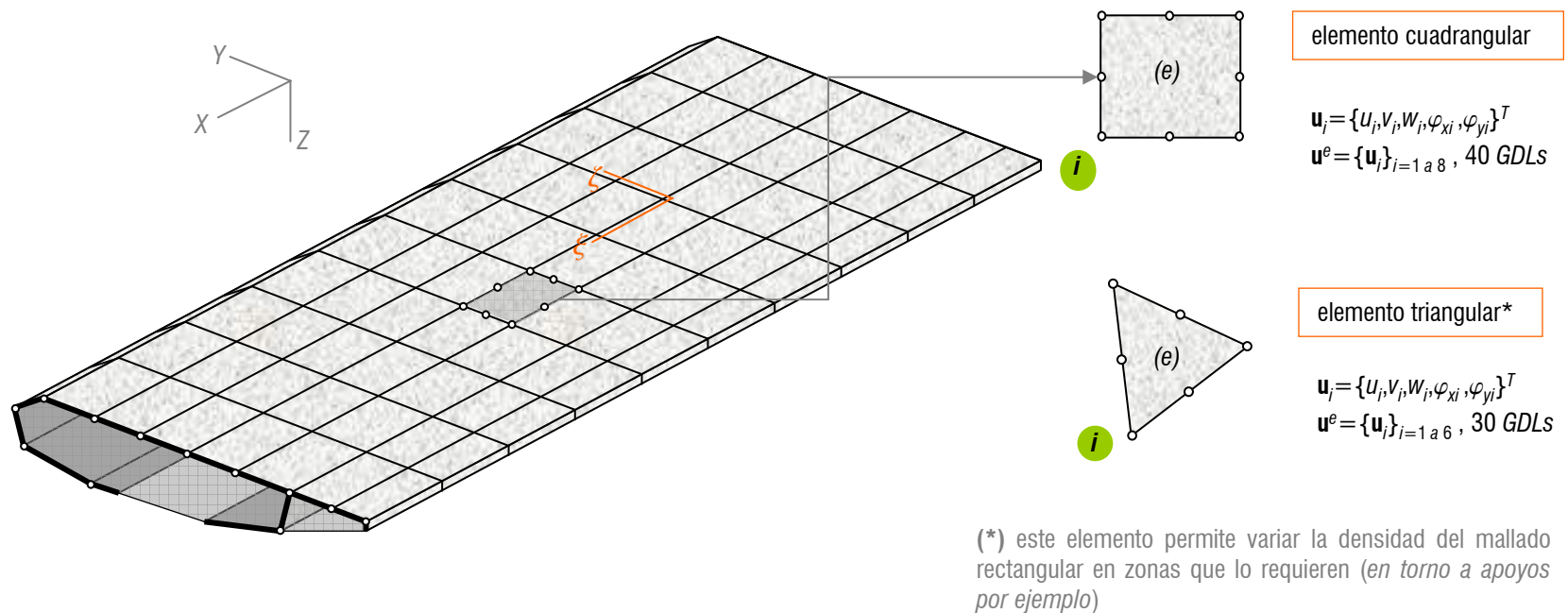
$$C_{xy} = C_{yx} = \frac{1 - \nu_s}{2} C_f, \quad C_f = \frac{E_s e_f}{1 - \nu_s^2}$$

$$\alpha_{RL} = \frac{A_{RL}}{e_f s_L}, \quad \alpha_{RT} = \frac{A_{RT}}{e_f s_T}$$

■ Figura válida para una y-sección, poniendo s_T, I_{RT}, J_{RT} para los rigidizadores transversales e I_y, J_y para el *nervio* transversal. Para el coeficiente R , ver 6.(2.24)

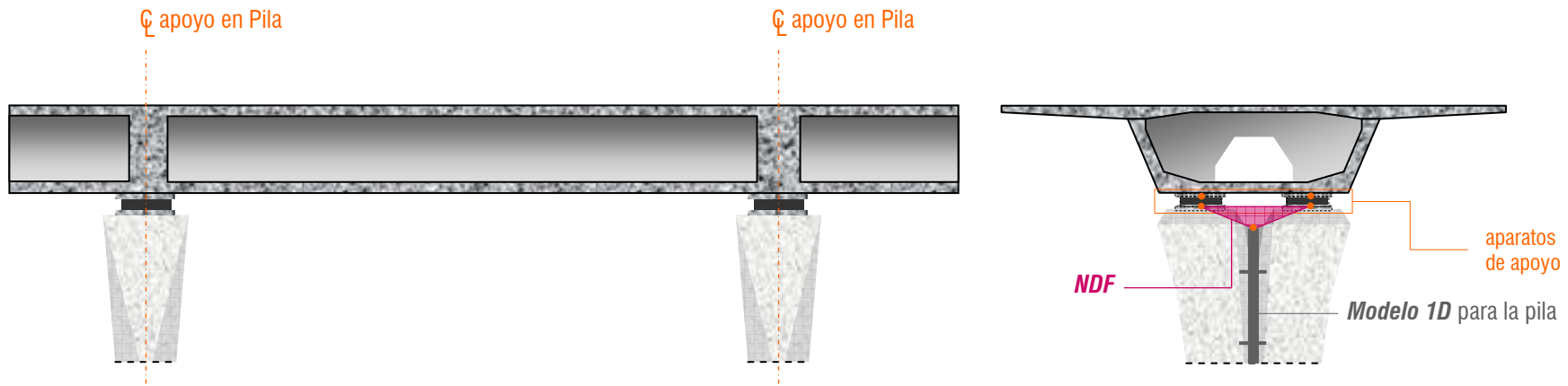
05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

■ **Desplazamientos computados.** Serán las funciones $\mathbf{u}(x,y) = \{u(x,y), v(x,y), w(x,y), \varphi_x(x,y), \varphi_y(x,y)\}^T$ es decir, los propios de elementos tipo lámina o *shell*



05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

■ **Modelado de la estructura puente.** Las pilas, aparatos de apoyo, diafragmas transversales... deben incorporarse al modelo teniendo en cuenta sus características mecánicas. Por ejemplo, los diafragmas transversales suelen tratarse como membranas, con $\mathbf{u}^e = \{u, v, \theta_z\}^T$, mientras que los aparatos de apoyo exigen computar exactamente sus características mecánicas, especialmente en el caso de apoyos de neopreno zunchado (vuelve a tener un papel determinante el tipo de **software** disponible) y en algunos casos, introducir **nudos de dimensión finita**



■ Toda **sección apoyada** requiere, en una construcción de pared delgada, la disposición de un **diafragma** transversal. Por lo tanto, pilas, estribos y diafragmas vendrán siempre emparejados. Además, en tableros metálicos y mixtos, para contener la distorsión de la sección transversal, la insuficiente rigidez del **marco** se debe compensar mediante diafragmas transversales interiores (*entre apoyos*)

05 El modelo lámina plegada en el análisis de tableros

- **Limitaciones del modelo.** Al tratarse de un modelo sofisticado, luego **costoso**, conviene ser cauto en su elección, teniendo en cuenta que va a competir directamente con el modelo viga (*las normas de materiales aún no están a su nivel*)
- **Distorsión de la sección transversal.** Este fenómeno es claramente discriminatorio entre los modelos **viga** y **lámina plegada**, la cual lo incorpora de forma intrínseca
- **Cálculo local.** En general, el cálculo local **queda integrado** en la flexión global de cada panel salvo en el caso de los **pisos ortótropos**, propios de los tableros metálicos, para los cuales el modelo propone una idealización que **suaviza** la flexión transversal entre rigidizadores longitudinales
- **Tratamiento de las acciones horizontales.** Aunque en elementos 2D sin curvatura (*placas*) los estados **membrana** y **flexión** se **desacoplan**, la solución analítica de la lámina plegada es **intrínsecamente espacial**, y por lo tanto las acciones horizontales resultarán naturalmente incorporadas al análisis. Además, si el problema se resuelve por el **MEF**, la simple selección del elemento (tipo **shell**) permitirá tratar simultáneamente cualquier tipo de acción

- 6.0 Motivación**
- 6.1 Descripción morfológica y modelado de elementos estructurales en puentes arco**
- 6.2 Descripción morfológica y modelado de elementos estructurales en puentes atirantados**
- 6.3 Análisis completo del puente**

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

- ❑ La problemática del análisis de estas tipologías reside en dos aspectos:
 - Se presentan como un **conjunto de elementos resistentes** (*sistema primario, tablero, elementos de suspensión...*), cada uno de los cuales puede requerir un **modelado diferente**
 - Al permitir **diseños esbeltos** (tanto en puentes de gran luz como en pasarelas), pueden desarrollar un **comportamiento geoméricamente no lineal**

- ❑ por otra parte, conviene subrayar que los **modelos** que se van a plantear son válidos tanto para el análisis **estático** como **dinámico**

- ❑ Finalmente, comentar que el contenido del tema se ha estructurado en tres bloques:
 - Descripción morfológica y resistente de los sistemas **puente arco**
 - Descripción morfológica y resistente de los sistemas **puente atirantado**
 - Análisis completo del puente

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ Desde una perspectiva estructural, nos interesaremos por los siguientes *aspectos morfológicos* de los puentes arco:

(1) Como se *relacionan formalmente* arco y tablero: posición relativa y forma en que se trasladan las cargas de tráfico al sistema primario (*el o los arcos en este caso*)

(2) como condiciona el diseño del *arco* la concepción del *tablero*: forma de la sección transversal en función del número y posición del o de los arcos

(3) Como se *conectan mecánicamente* a las subestructuras (*rótulas o empotramientos*) o entre sí (*caso del bowstring*)

▪ Para ello recorreremos una serie de *ejemplos representativos*, tanto en acero como en hormigón armado, adecuadamente ordenados y someramente descritos

▪ En lo estructural, la *problemática* se centra en como *modelar la curvatura* de los *arcos*, si se opta por el análisis numérico mediante *EF*, y como comprobar su *estabilidad*

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puente Alexandre III (París, 1900, Jean Résal)

- 15 arcos **triarticulados** de alma llena en acero, luz de 107 m
- Tablero superior apoyado sobre columnas
- Fuerte rebajamiento y gran anchura del tablero



Rainbow Bridge, sobre el Niágara (entre EEUU y Canadá, 1941, Wadley y Hardesty)

- 2 arcos celulares □ biempotrados en acero, luz de 290 m
- Tablero superior sobre esbeltos soportes



Puente Matsushima (réplica Japonesa del malogrado puente de Tjörn)

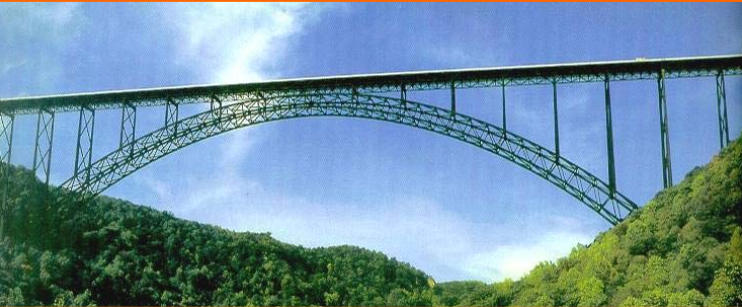
- 2 arcos celulares Ø biempotrados en acero, luz de 126 m
- Arriostramiento en K entre ambos, con diafragmas en secciones de apoyo de columnas
- Tablero superior sobre esbeltos soportes

6.1.1.1 Puentes arco metálicos de tablero superior

<6.1.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puente de New River Gorge (Fayetteville, West Virginia, 1978)

- Arco triangulado biempotrado en acero, luz de 518 m
- Tablero superior apoyado sobre esbeltos pórticos con arriostramientos en cruz de San Andrés



Puente Bayonne, sobre el Kill van Kull (US-440, entre Staten Island y New Jersey, 1932, O.H. Ammann)

- Arco triangulado biarticulado en acero, luz de 504 m
- Tablero intermedio, parcialmente suspendido de péndolas y apoyado sobre pórticos arriostrados



Puente de Kaiserlei, sobre el Main

- 2 arcos atirantados bicelulares \emptyset en acero (bowstring)
- Tablero inferior unido a los arcos en sus arranques
- Conjunto simplemente apoyado



6.1.1.2 Puentes arco metálicos con distintas posiciones del tablero

<6.1.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puente de Fehmarnsund, sobre el Báltico (1963, T. Jahnke, P. Stein y G. Lohmer)

- 2 arcos atirantados celulares \square en acero (bowstring), unidos en clave, luz de 249 m
- Tablero inferior unido a los arcos en sus arranques y suspendido de los arcos tumbados mediante retícula de cables (sistema Nielsen)
- Conjunto simplemente apoyado en pilastras de hormigón armado



Puente de la Barqueta, sobre el antiguo cauce del Guadalquivir en Sevilla (1989, Apia XXI)

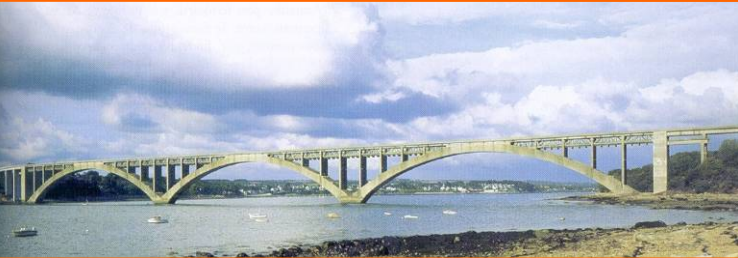
- Arco atirantado unicelular con pies inclinados en acero (bowstring), luz de 168 m
- Tablero inferior unido a los pies inclinados en las riostras extremas
- Conjunto simplemente apoyado en cuatro pilas de hormigón armado

6.1.1.3 Puentes arco metálicos de tablero inferior

<6.1.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ARCO>

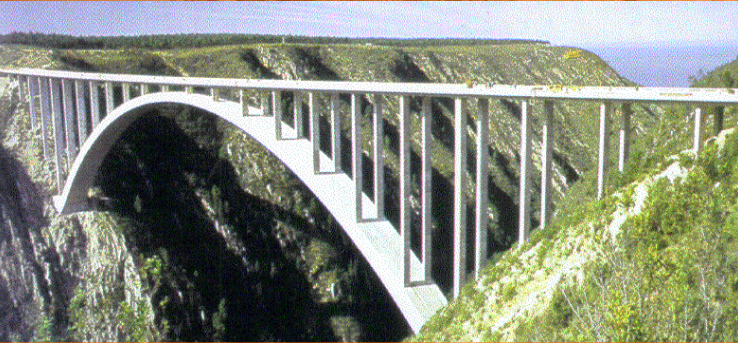
<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puente Albert Louppe, s/Elorn, en Plougastel (1930, E. Freyssinet)

- Tres vanos en arco tricelular □ biempotrado en hormigón armado, luces de 186 m
- Tablero superior con almas reticuladas, soportado mediante tabiques transversales



Puente de Bloukrans (Sudáfrica, 1984, Liebenberg & Stander)

- Arco multicelular □ biempotrado en hormigón armado, luz de 272 m
- Tablero superior apoyado sobre pares de pilares, muy esbeltos a proximidad de los arranques del arco



Puente de la Coudette, sobre el río Gave de Pau (1943, N. Esquillan)

- 2 arcos atirantados macizos ■ en hormigón armado (bowstring), luz de 111.28 m
- Tablero inferior unido a los arcos en sus arranques y suspendido del arco mediante péndolas inclinadas
- Conjunto simplemente apoyado

6.1.1.4 Puentes arco de hormigón

<6.1.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Diseño interactivo arco-tablero.** A continuación, nos interesaremos a como *condiciona el diseño del arco* la *concepción del tablero*: dicho de otro modo, como ha de conformarse la sección transversal del tablero en función del número y posición de los arcos. La discusión se ha organizado considerando las opciones más usuales:

	un solo arco (en mediana)	dos arcos (exteriores o entre acera y calzada)
Tablero superior	con vigas bajo calzada o multicelular	con 2 vigas bajo calzada y riostras entre apoyos
Tablero intermedio	cajón central y jabalcones o cuchillos transversales, con riostras en apoyos*	dos vigas longitudinales atirantando los arcos, vigas de piso y cuchillos laterales**
Bow-string	cajón central y jabalcones o cuchillos transversales, con riostras en apoyos	1) cajón central y jabalcones o cuchillos transversales, con riostras en apoyos y desviadores cajón-riostra 2) dos vigas longitudinales atirantando los arcos, vigas de piso y cuchillos laterales**

(*) Este diseño varía si se trata de un arco triangulado

(**) Si los arcos se disponen entre acera y calzada

No se ha hecho mención explícita de la posibilidad de *tumbar* los arcos, pero ello no afecta en esencia a los condicionantes estructurales para el diseño del tablero

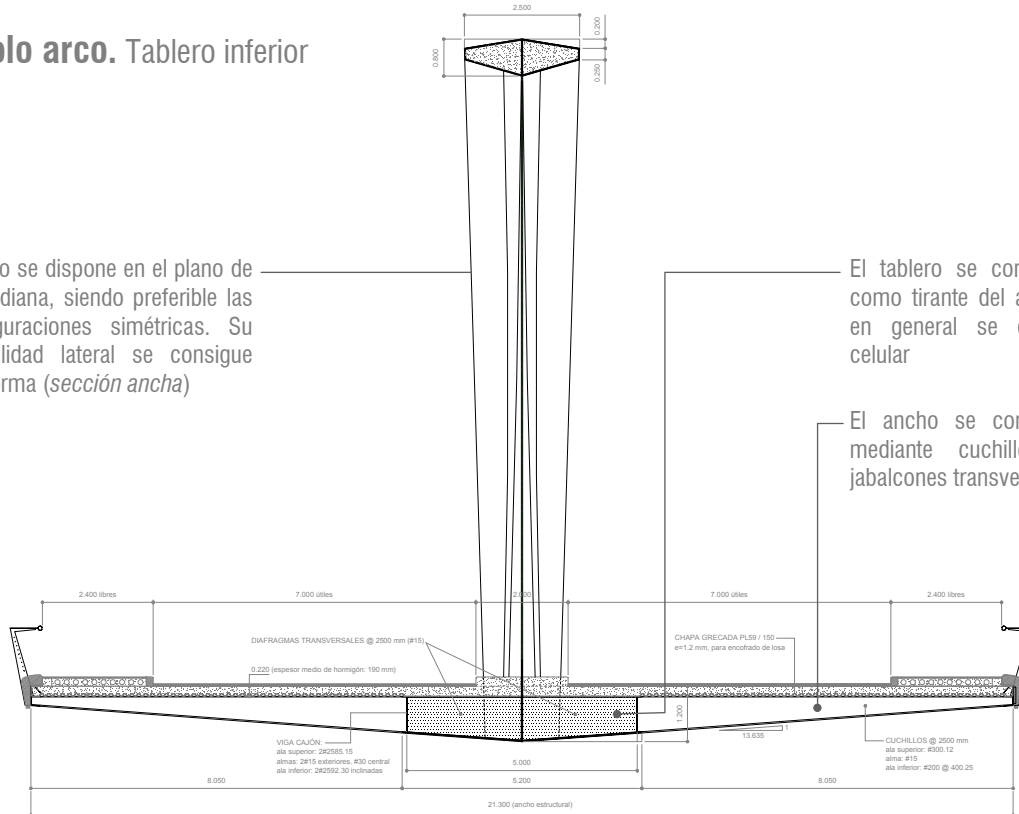
<6.1.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ Un solo arco. Tablero inferior

El arco se dispone en el plano de la mediana, siendo preferible las configuraciones simétricas. Su estabilidad lateral se consigue por forma (*sección ancha*)



El tablero se configura como tirante del arco y en general se diseña celular

El ancho se completa mediante cuchillos o jabalones transversales



<6.1.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ARCO>

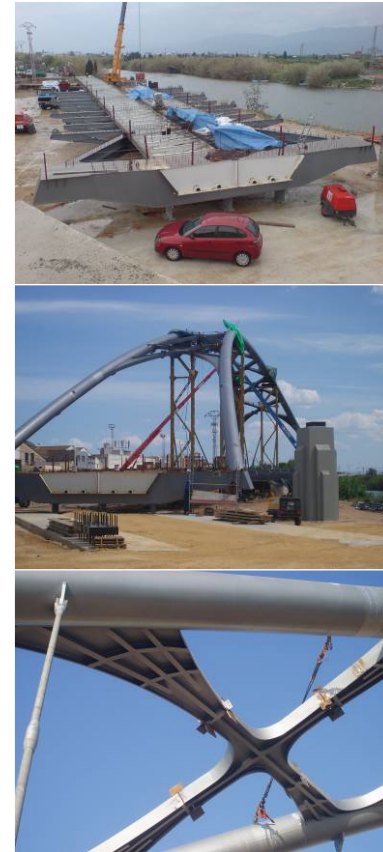
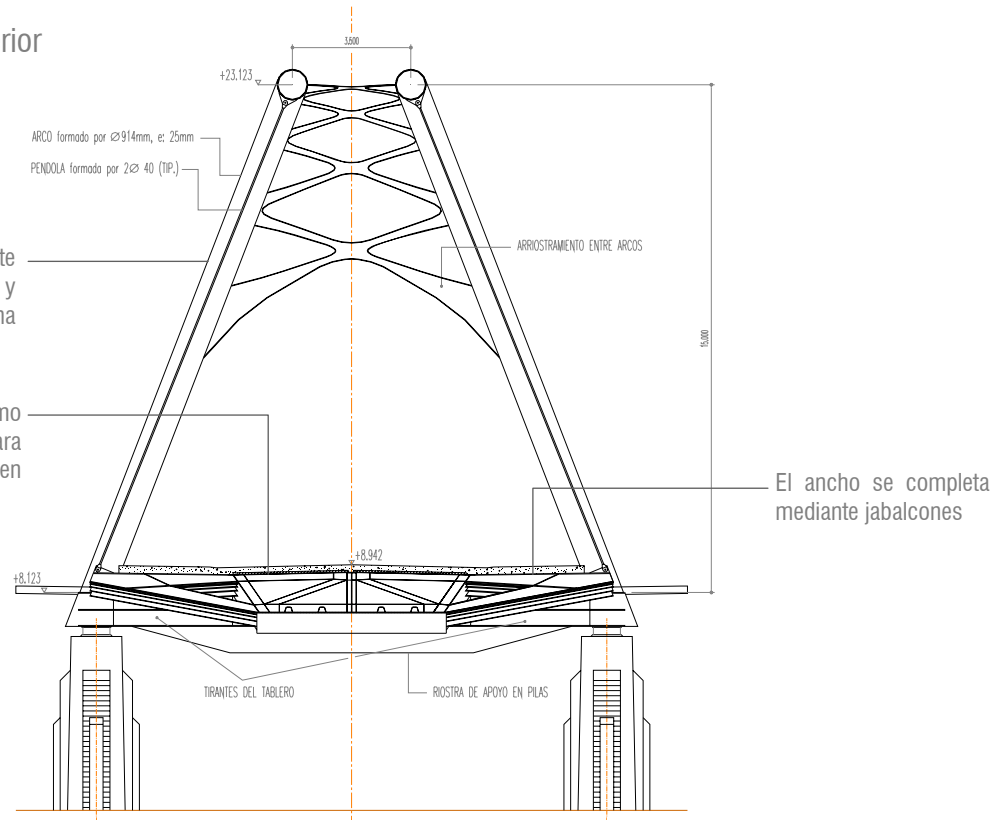
<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ Dos arcos. Tablero inferior con cajón central

Los arcos, exteriores en este caso, se disponen tumbados y arriostrados entre sí, para una mayor estabilidad

El tablero se configura como tirante del arco compuesto y para ello, necesita desviadores en forma de tirantes horizontales

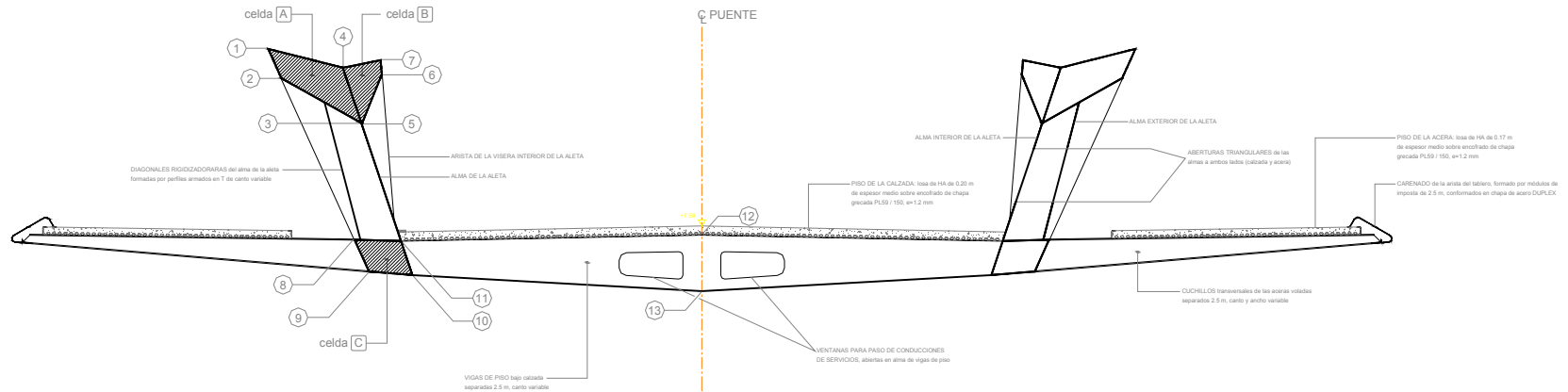


<6.1.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Dos arcos.** Tablero inferior con dos vigas longitudinales atirantando los arcos, vigas de piso y cuchillos laterales



<6.1.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Comportamiento de puentes arco.** Viene caracterizado por dos propiedades geométricas inherentes al sistema primario (*arco*), *curvatura* y *esbeltez*. La primera produce *acoplamiento entre compresiones y flexiones*, mientras que la segunda induce *comportamiento no lineal*, amplificado por el estado de compresión del arco. De forma similar, para las configuraciones de arco atirantado o *bow-string*, en el tablero, siempre esbelto, se acoplarán tracciones y flexiones. Todos estos aspectos se desarrollan a continuación, de acuerdo con el esquema siguiente:

(1) respuesta de las piezas curvas	se analiza el <i>acoplamiento</i> característico de las acciones <i>arco</i> y <i>viga curva</i> y sus consecuencias sobre el modelado numérico de su equilibrio (<i>MEF</i>)	
(2) respuesta no lineal de la viga-columna	como <i>primera aproximación</i> al comportamiento no-lineal del arco, se analiza el problema básico de la <i>viga-columna</i>	←
(3) respuesta no lineal de la viga-tirante	se aplica el estudio anterior para valorar la <i>influencia de la no-linealidad</i> sobre la respuesta de los <i>tableros traccionados</i> , situación que se produce sistemáticamente en los <i>bow-string</i>	←
(4) análisis no-lineal del arco y del tablero	se concluye presentando la <i>matriz de rigidez no-lineal</i> de un elemento recto, de aplicación directa al análisis de <i>arcos poligonales</i> y <i>tableros esbeltos</i> , y se proporciona criterios para la aplicación general del <i>MEF</i>	←

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Objetivo del análisis no lineal del puente.** Este es doble: consiste en **comprobar la estabilidad** de los elementos que capitalizan la no linealidad geométrica del *modelo global*, el arco y los soportes comprimidos en configuraciones de tablero superior, así como **validar la comprobación lineal de los EL**

▪ **Otros elementos constitutivos del modelo.** Para completar la definición del modelo global, debemos revisar el tratamiento de los restantes elementos constructivos que componen los puentes arco. En concreto:

- **Tablero:** Para el modelado del tablero, es suficiente considerar sus **propiedades lineales**, puesto que normalmente está apoyado a intervalos $s/L \leq 1/10$, resultando siempre luces moderadas y relaciones canto luz estándar. Este argumento pierde consistencia con las configuraciones tipo **bow-string**, debido a la apreciable extensibilidad de las péndolas, pero al estar el **tablero traccionado**, su rigidez resulta de nuevo favorecida
- **Soportes y péndolas:** los soportes (*pilas, pórticos o tabiques*) corresponden a las zonas de tablero sobre arco y suelen presentar esbelteces importantes a proximidad de los arranques (*salvo en arcos muy rebajados, como el puente Alejandro III*). Esta circunstancia debe ser tenida en cuenta al plantear el análisis no lineal. En cuanto a las péndolas, propias de los puentes arco de tablero intermedio e inferior, pueden ser cables o barras, y salvo en los casos en que se dispongan inclinadas y posean gran longitud, se tratan como elementos 1D lineales
- **Desconexiones y aparatos de apoyo:** han de quedar materializadas en el modelo, en particular las coacciones elásticas de los aparatos de apoyo de neopreno. Los códigos estándar de **EF** suelen disponer de los elementos adecuados (tipo **link**)

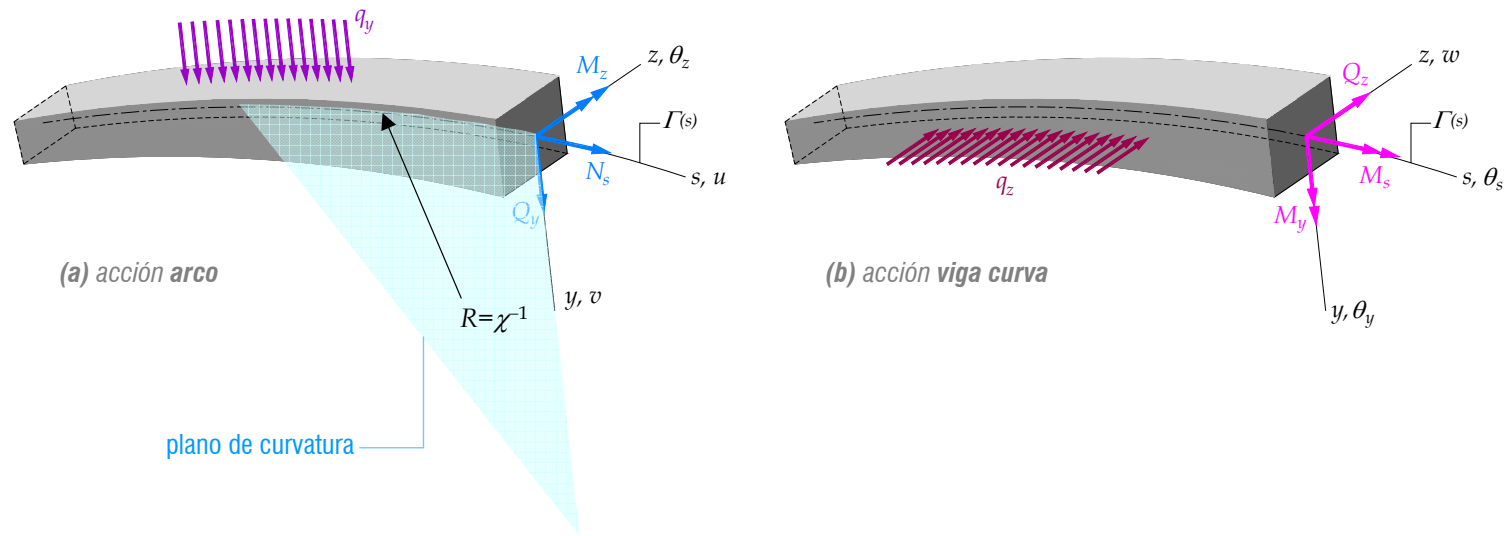
▪ **Otros cálculos no lineales:** pueden ser necesarios a nivel local y requieren modelos específicos (en general modelos de **EF** 2D)

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Los elementos curvos.** La curvatura se traduce *estructuralmente* en el acoplamiento entre respuestas elementales de extensión, flexión y torsión del arco o del tablero, modelados estos como viga. En el ámbito del cálculo estructural, es usual analizar por separado las acciones contenidas en el **plano de curvatura** (**acción arco**) y las acciones transversales al mismo (**acción viga curva**), pero ello es lícito si y solo si los ejes neutros de flexión y torsión son coplanarios, lo cual exige que la **sección transversal** sea **simétrica respecto al plano de curvatura**. De lo contrario, las dos acciones quedarán acopladas. La condición de simetría anterior suele darse habitualmente en los arcos, pero raramente en los tableros de puente



6.1.2.1 Respuesta de las piezas curvas

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

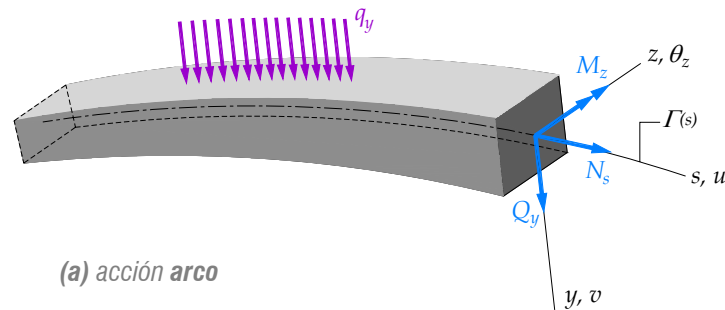
<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

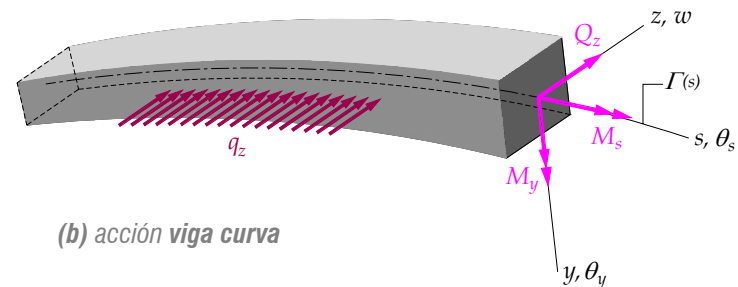
■ **Los elementos curvos.** Si admitimos que los ejes neutros de flexión y torsión son coplanarios, las respuestas se desacoplan. Si además ambas líneas *coinciden*, las ecuaciones que gobiernan ambos equilibrios son las siguientes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{du}{ds} = \chi v + \frac{N_s}{EA} & \frac{dN_s}{ds} = \chi Q_y - q_s \\ \frac{dv}{ds} = -\chi u + \theta_z + \frac{Q_y}{GA} & \frac{dQ_y}{ds} = -\chi N_s - q_y \\ \frac{d\theta_z}{ds} = \frac{M_z}{EI_z} & \frac{dM_z}{ds} = -Q_y - m_z \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{dw}{ds} = -\theta_y + \frac{Q_z}{GA} & \frac{dQ_z}{ds} = -q_z \\ \frac{d\theta_s}{ds} = \chi \theta_y + \frac{M_s}{GJ} & \frac{dM_s}{ds} = \chi M_y - m_s \\ \frac{d\theta_y}{ds} = -\chi \theta_s + \frac{M_y}{EI_y} & \frac{dM_y}{ds} = Q_z - \chi M_s - m_y \end{array} \right.$$



(a) acción arco



(b) acción viga curva

En ellas, se aprecia claramente el **acoplamiento** cinemático y estático $\{u \leftrightarrow v / N_s \leftrightarrow Q_y\}$ o bien $\{\theta_s \leftrightarrow \theta_y / M_s \leftrightarrow M_y\}$. Este acoplamiento es de carácter **local**, es decir continuo a lo largo de la curva directriz $\Gamma(s)$

6.1.2.1 Respuesta de las piezas curvas

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Análisis por el MEF.** La formulación de un elemento finito para el **arco** requiere expresar las ecuaciones cinemáticas en coordenadas curvilíneas y calcular la matriz de deformaciones $\mathbf{B}(\xi)$ de acuerdo con el algoritmo siguiente, donde $\mathbf{N}(\xi)$ son las **funciones de forma** y \mathbf{u}^e los **desplazamientos nodales** del elemento:

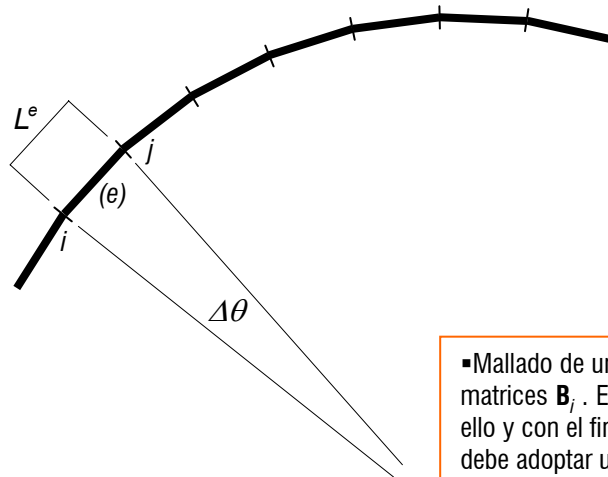
$$\mathbf{u}(s) = \mathbf{N}(\xi) \mathbf{u}^e \quad , \quad \xi = \frac{s}{L^e}$$

$$\mathbf{e}^*(\xi) = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{u}^e \quad , \quad \mathbf{B}(\xi) = \mathbf{B}_0 \mathbf{N}(\xi) + \frac{1}{L^e} \mathbf{B}_1 \frac{d\mathbf{N}(\xi)}{d\xi}$$

con

$$\mathbf{B}_0 = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & -\chi & 0 \\ \chi & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{B}_1 = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -y \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

y $\mu = 1 - \chi y$, $\chi = R^{-1}$. La cuestión se reduce, como el caso de la viga curva, a si nuestro **software** dispone de este tipo de elemento y en caso negativo, como proceder para obtener resultados válidos con elementos estándar (*barra recta*)



■ Mallado de un arco modelado mediante barras rectas: $\chi=0$ y $\mu=1$ en las matrices \mathbf{B}_i . El acoplamiento se localiza exclusivamente en los nodos, por ello y con el fin de ajustar correctamente el comportamiento del modelo, se debe adoptar una subdivisión adecuada ($\Delta\theta \approx 2^\circ$)

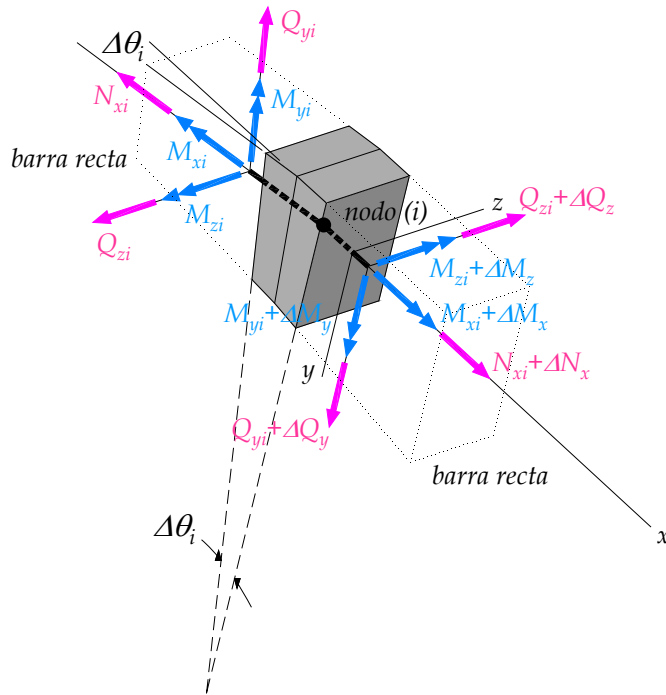
6.1.2.1 Respuesta de las piezas curvas

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Análisis con EF estándar.** Bajo el supuesto de que no disponemos del elemento finito adecuado, desarrollemos con más detalle el último concepto (*acoplamiento nodal*), incorporando a la formulación los esfuerzos asociados a los desplazamientos $\{w \ \theta_s \ \theta_z\}$. Para ello evaluemos el equilibrio del nodo (*i*) supuesto libre de carga:



$$-N_{xi} + \cos\Delta\theta_i(N_{xi} + \Delta N_x) - \sin\Delta\theta_i(Q_{yi} + \Delta Q_y) = 0$$

$$-Q_{yi} + \cos\Delta\theta_i(Q_{yi} + \Delta Q_y) + \sin\Delta\theta_i(N_{xi} + \Delta N_x) = 0$$

$$-Q_{zi} + Q_{zi} + \Delta Q_z = 0$$

$$-M_{xi} + \cos\Delta\theta_i(M_{xi} + \Delta M_x) - \sin\Delta\theta_i(M_{yi} + \Delta M_y) = 0$$

$$-M_{yi} + \cos\Delta\theta_i(M_{yi} + \Delta M_y) + \sin\Delta\theta_i(M_{xi} + \Delta M_x) - \Delta s_i(Q_{zi} + \Delta Q_z) = 0$$

$$-M_{zi} + M_{zi} + \Delta M_z + \Delta s_i(Q_{yi} + \Delta Q_y) = 0$$

Δs_i es la longitud de cada elemento. Primera simplificación ($\sin\Delta\theta_i \approx \Delta\theta_i$ y $\cos\Delta\theta_i \approx 1$):

$$\Delta N_x - Q_{yi}\Delta\theta_i = 0$$

$$\Delta Q_y + N_{xi}\Delta\theta_i = 0$$

$$\Delta Q_z = 0$$

$$\Delta M_x - M_{yi}\Delta\theta_i = 0$$

$$\Delta M_y + M_{xi}\Delta\theta_i - Q_{zi}\Delta s_i = 0$$

$$\Delta M_z + Q_{yi}\Delta s_i = 0$$

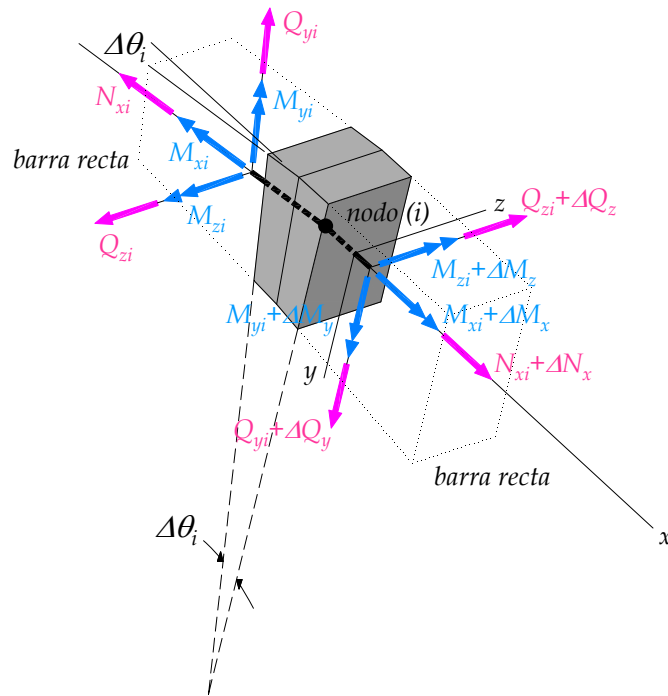
6.1.2.1 Respuesta de las piezas curvas

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Análisis con EF estándar.** Introduciendo ahora $\Delta\theta_i = \Delta s_i / R_i$, dividiendo todas las ecuaciones por Δs_i y agrupando por separado las dos acciones, se obtiene entonces:



$$\frac{\Delta N_x}{\Delta s_i} - \frac{Q_{yi}}{R_i} = 0$$

$$\frac{\Delta Q_z}{\Delta s_i} = 0$$

$$\frac{\Delta Q_y}{\Delta s_i} + \frac{N_{xi}}{R_i} = 0$$

$$\frac{\Delta M_x}{\Delta s_i} - \frac{M_{yi}}{R_i} = 0$$

$$\frac{\Delta M_z}{\Delta s_i} + Q_{yi} = 0$$

$$\frac{\Delta M_y}{\Delta s_i} + \frac{M_{xi}}{R_i} - Q_{zi} = 0$$

Estas ecuaciones detallan el **acoplamiento local** flexión-extensión en el **arco** y flexión-torsión en la **viga curva**. Ambos requieren el adecuado control de $\Delta\theta$. Además, puede comprobarse como el acoplamiento local se reproduce como corresponde, tomando límites en estas expresiones cuando $\Delta\theta \rightarrow 0$, o lo que es lo mismo, $\Delta s_i \rightarrow 0$:

$$\frac{dN_s}{ds} - \chi Q_y = 0$$

$$\frac{dQ_z}{ds} = 0$$

$$\frac{dQ_y}{ds} + \chi N_s = 0$$

$$\frac{dM_s}{ds} - \chi M_y = 0$$

$$\frac{dM_z}{ds} + Q_y = 0$$

$$\frac{dM_y}{ds} + \chi M_s - Q_z = 0$$

6.1.2.1 Respuesta de las piezas curvas

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **La viga-columna.** Este ejemplo clásico de introducción al *cálculo no lineal* de vigas rectas muestra como el comportamiento a flexión de la viga se ve afectado por el nivel de las compresiones actuantes. Para constatarlo, evaluaremos el operador **D**, que define la forma cuadrática densidad lineal de energía de deformación relativa a los desplazamientos generalizados de flexión $\mathbf{u}(x) = \{v(x) \ \theta_z(x)\}^T$, partiendo de la expresión de la *densidad lineal de energía potencial* del problema completo, incluyendo en ella la *extensión de la directriz* $\varepsilon_x = u' + \frac{1}{2}(v')^2$ donde $u(x)$ es el desplazamiento longitudinal de sus puntos materiales. Esta es:

$$L = \frac{1}{2} \left\{ EA \left[u' + \frac{1}{2} (v')^2 \right]^2 + GA (v' - \theta_z)^2 + EI_z (\theta_z')^2 \right\} - (q_y v + m_z \theta_z)$$

siendo EA , GA y EI_z las habituales rigideces axil, a cortante y a flexión de la pieza. La composición del operador **D** se obtiene bloque a bloque a partir de las relaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}} &= \mathbf{D}_{00} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{01} \mathbf{u}' - \mathbf{Q} \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}'} &= \mathbf{D}_{10} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}' \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{Q}(x) = \{q_y(x) \ m_z(x)\}^T$ define las densidades lineales de fuerzas y momentos aplicadas al modelo. En cálculos sucesivos denominaremos $N_0 = EA \varepsilon_x$ a la *fuerza axial* aplicada en ambos extremos de la viga

6.1.2.2 Respuesta no lineal de la viga-columna

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Ecuaciones de la viga-columna.** Operando se obtiene:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{D}_{01} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA & -GA & 0 \\ 0 & -GA & GA + N_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix}$$

El sistema de *EDO* que rige el problema puede entonces escribirse en forma canónica:

$$\frac{d}{dx} \mathbf{E}(x) = \mathbf{W} \mathbf{E}(x) - \mathbf{F}(x)$$

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}'(x) \\ \mathbf{f}'(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u}(x) \\ \mathbf{f}(x) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}(x) \end{Bmatrix}$$

con la definición energética de los esfuerzos que nos proporciona de forma directa relaciones constitutivas para el esfuerzo cortante y el momento flector:

$$\mathbf{f} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}'} = \mathbf{D}_{10} \mathbf{u} + \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}'$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & -GA \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta_z \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} GA + N_0 & 0 \\ 0 & EI_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v' \\ \theta'_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} GA(v' - \theta_z) + N_0 v' \\ EI_z \theta'_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_y \\ M_z \end{Bmatrix}$$

6.1.2.2 Respuesta no lineal de la viga-columna

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Ecuaciones de la viga-columna.** En componentes, estas resultan ser:

$$\begin{Bmatrix} v' \\ \theta'_z \\ Q'_y \\ M'_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & \frac{\kappa}{GA} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\kappa)GA & -\kappa & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v \\ \theta_z \\ Q_y \\ M_z \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_y \\ m_z \end{Bmatrix}$$

Con $\kappa = \frac{GA}{GA + N_0} = \frac{1}{1 + N_0 / GA}$. La ecuación característica y los autovalores de **W** son ahora:

$$|\mathbf{W} - K\mathbf{I}| = K^2 \left[K^2 - (1-\kappa) \frac{GA}{EI_z} \right]$$

$$K = 0 \quad , \quad K = \pm \sqrt{(1-\kappa) \frac{GA}{EI_z}}$$

A partir de estos últimos, podemos definir la esbeltez de flexión de la viga como:

$$\lambda = L \sqrt{(1-\kappa) \frac{GA}{EI_z}} = L \sqrt{\kappa \frac{|N_0|}{EI_z}}$$

6.1.2.2 Respuesta no lineal de la viga-columna

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪**Solución de la viga-columna:** a modo de ejemplo, vamos a aplicar los resultados anteriores a un tablero *simplemente apoyado comprimido* ($N_0 < 0$) y sometido a una carga transversal P en la sección $x=t$. La correspondiente determinación de las constantes de integración E_0 permite entonces definir completamente la solución. Esta queda recogida en la tabla adjunta para $\xi < \tau$. Sobre el resto del intervalo ($\xi > \tau$), basta intercambiar ξ y τ con $(1-\xi)$ y $(1-\tau)$ respectivamente, y cambiar el signo de las fórmulas resultantes para la rotación y el cortante

$E(\xi)$	$\xi < \tau$
$v(\xi)$	$-\frac{PL}{ N_0 } \left[(1-\tau)^\xi - \kappa \frac{\text{sen} \lambda (1-\tau)}{\lambda \text{sen} \lambda} \text{sen} \lambda \xi \right]$
$\theta_z(\xi)$	$-\frac{P}{ N_0 } \left[1-\tau - \frac{\text{sen} \lambda (1-\tau)}{\text{sen} \lambda} \cos \lambda \xi \right]$
$Q_y(\xi)$	$(1-\tau)P$
$M_z(\xi)$	$-\kappa PL \frac{\text{sen} \lambda (1-\tau)}{\lambda \text{sen} \lambda} \text{sen} \lambda \xi$
$\tilde{Q}_y = -M'_z$	$\kappa P \frac{\text{sen} \lambda (1-\tau)}{\text{sen} \lambda} \cos \lambda \xi$

6.1.2.2 Respuesta no lineal de la viga-columna

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Solución de la viga-columna.** En la Tabla anterior se constata de inmediato que la solución es singular para $\lambda=k\pi$ con $k=0, 1, 2\ldots$ obteniendo para el primer valor no nulo:

$$\lambda_{cr} = \pi = L \sqrt{\kappa_{cr} \frac{N_{cr}}{EI_z}} \quad , \quad N_{cr} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{EI_z}{\kappa_{cr}}$$

Pero en este caso $|N_0| = N_{cr}$ luego

$$\kappa_{cr} = \frac{1}{1 - N_{cr} / GA}$$

Resolviendo en κ_{cr} y recurriendo a la definición del factor de cortante α , se llega a la siguiente definición de la **carga crítica de Euler** (con deformación por cortante):

$$N_{cr} = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{EI_z}{1 + \alpha \pi^2 / 12} = N_E$$

Poniendo $\kappa_{cr} = 1 + \pi^2 \alpha / 12$ se puede dar una expresión alternativa para la esbeltez de flexión de la viga columna:

$$\lambda = \pi \sqrt{\frac{\kappa |N_0|}{\kappa_{cr} N_E}}$$

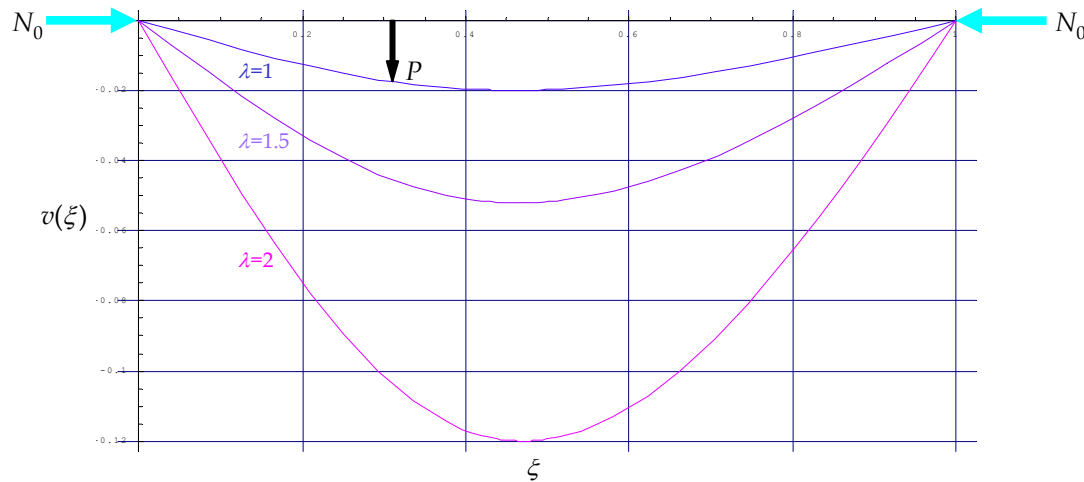
6.1.2.2 Respuesta no lineal de la viga-columna

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Respuesta de la viga-columna.** A continuación mostramos el aspecto de algunas de las funciones características de la respuesta de la viga comprimida, cargada transversalmente, comenzando por su deformada. La viga experimenta un **incremento de flexibilidad** consistente con el **aumento del nivel de compresión**, que a su vez equivale a incrementar la esbeltez



Desplazamientos transversales en la pieza comprimida
para distintos valores de la esbeltez λ con $\kappa=1$ y $\tau=1/3$, factor $PL/|N_0|$

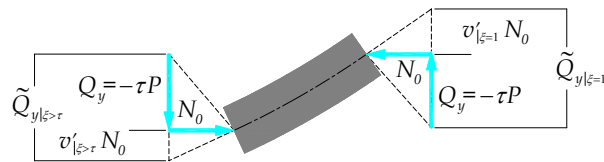
6.1.2.2 Respuesta no lineal de la viga-columna

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

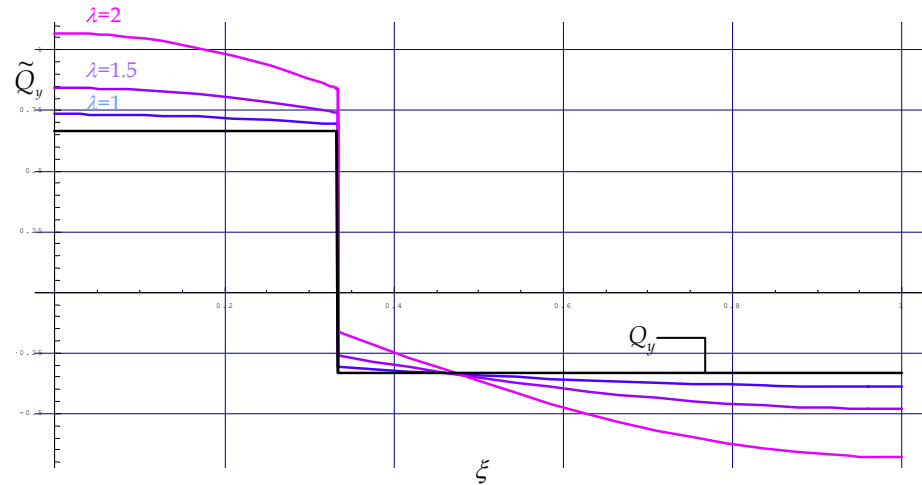
<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Respuesta de la viga-columna.** En cuanto a la estática, el **esfuerzo cortante** es el que presenta mayor interés si se tiene en cuenta que ahora la variación de momentos flectores es solo una fracción del mismo, la denominada **constitutiva**, estando complementada esta por la parte denominada **geométrica**, producida por el axil



Equilibrio de fuerzas en la pieza comprimida
entre las secciones $\xi > \tau$ y $\xi = 1$



Esfuerzos cortantes constitutivos en la pieza comprimida
para distintos valores de la esbeltez λ_N con $\kappa=1$ y $\tau=1/3$, factor P

6.1.2.2 Respuesta no lineal de la viga-columna

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **El tirante cargado transversalmente.** Cuando la fuerza axial aplicada a los extremos de la pieza es de tracción, la solución se determina de forma idéntica, pero el comportamiento de la viga cambia radicalmente. Ahora los dos autovalores no nulos son reales, y la base del espacio de soluciones está formada por las funciones hiperbólicas en lugar de las trigonométricas. Para ilustrar esta propiedad, damos a continuación los resultados para el tablero *simplemente apoyado traccionado* ($N_0 > 0$) y sometido a la misma carga transversal P en la sección $x=t$

$E(\xi)$	$\xi < \tau$
$v(\xi)$	$\frac{PL}{N_0} \left[(1-\tau)\xi - \kappa \frac{sh\lambda(1-\tau)}{\lambda sh\lambda} sh\lambda\xi \right]$
$\theta_z(\xi)$	$\frac{P}{N_0} \left[1-\tau - \frac{sh\lambda(1-\tau)}{sh\lambda} ch\lambda\xi \right]$
$Q_y(\xi)$	$(1-\tau)P$
$M_z(\xi)$	$-\kappa PL \frac{sh\lambda(1-\tau)}{\lambda sh\lambda} sh\lambda\xi$
$\tilde{Q}_y = -M'_z$	$\kappa P \frac{sh\lambda(1-\tau)}{sh\lambda} ch\lambda\xi$

▪ Sobre el resto del intervalo ($\xi > \tau$), basta intercambiar ξ y τ con $(1-\xi)$ y $(1-\tau)$ respectivamente y cambiar el signo de las fórmulas resultantes para la rotación y el cortante

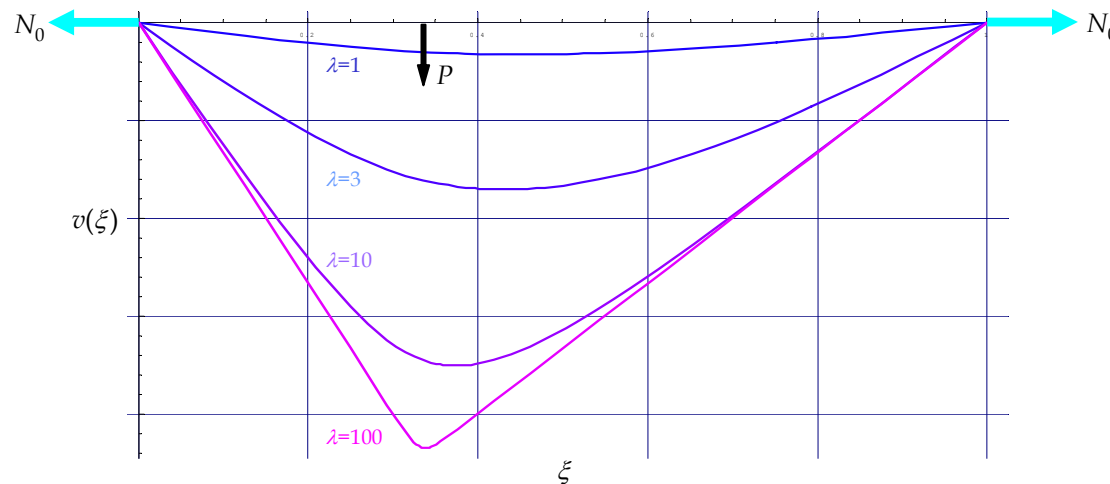
6.1.2.3 Respuesta no lineal de la viga-tirante

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **El tirante cargado transversalmente.** Esta es la situación que corresponde al tablero de un puente arco tipo *bow-string*. Como primera e importante conclusión, conviene observar que el axil tiene un efecto **estabilizador** que se traduce en un **aumento de la rigidez** aparente del elemento frente a la acción flectora de la carga transversal P , y a medida que la esbeltez de la viga crece, su comportamiento se aproxima más al de un **cable**



Desplazamientos transversales en la pieza traccionada
para distintos valores de la esbeltez λ con $\kappa=1$ y $\tau=1/3$, factor PL/N_0

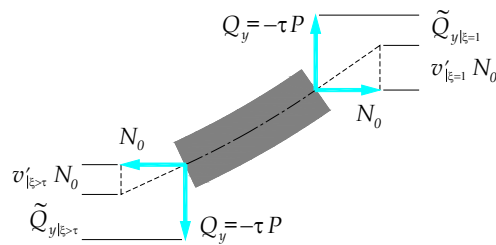
6.1.2.3 Respuesta no lineal de la viga-tirante

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

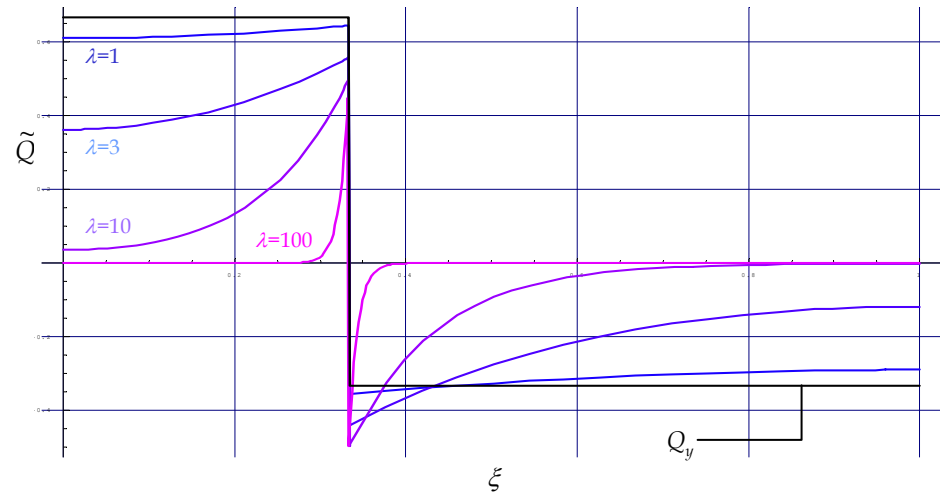
<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **El tirante cargado transversalmente.** En cuanto a la *estática*, se alcanzan análogas conclusiones. Puede observarse como a medida que la esbeltez crece, el **cortante geométrico** va dominando la respuesta: $v'N_0 \rightarrow Q_y$ tal y como corresponde a un cable, mientras que la fracción constitutiva se va diluyendo



Equilibrio de fuerzas en la pieza traccionada entre las secciones $\xi > \tau$ y $\xi = 1$



Esfuerzos cortantes constitutivos en la pieza traccionada para distintos valores de la esbeltez λ con $\kappa=1$ y $\tau=1/3$, factor P

6.1.2.3 Respuesta no lineal de la viga-tirante

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Matriz de rigidez.** La matriz de rigidez *no lineal* de la pieza recta de sección constante se deduce analíticamente a partir de la matriz de transferencia **G** del operador **W**, para el caso plano y relativa a los desplazamientos u , v y θ_z :

$$\tilde{\mathbf{K}}_{11} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3}\phi_1 & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2}\phi_2 \\ 0 & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2}\phi_2 & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L}\phi_3 \end{bmatrix} \quad \tilde{\mathbf{K}}_{12} = \begin{bmatrix} -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3}\phi_1 & \frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2}\phi_2 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2}\phi_2 & \frac{2-\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L}\phi_4 \end{bmatrix}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_{21} = \tilde{\mathbf{K}}_{12}^T \quad \tilde{\mathbf{K}}_{22} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{(1+\alpha)L^3}\phi_1 & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2}\phi_2 \\ 0 & -\frac{6EI_z}{(1+\alpha)L^2}\phi_2 & \frac{4+\alpha}{1+\alpha} \frac{EI_z}{L}\phi_3 \end{bmatrix}$$

Las funciones ϕ_1 a ϕ_4 son *funciones de estabilidad*. Su representación se adjunta para el modelo de Navier ($\kappa=\rho=1$). Conviene tener en cuenta que esta matriz puede aplicarse al análisis de *piezas curvas fuertemente comprimidas*, como son los arcos, cuando se opta por modelarlas mediante *elementos rectos* (arco poligonal). En cambio, para el modelado del tablero de un puente tipo *bow-string*, el prescindir de la no linealidad está del lado de la seguridad

6.1.2.4 Análisis no lineal de puentes arco

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

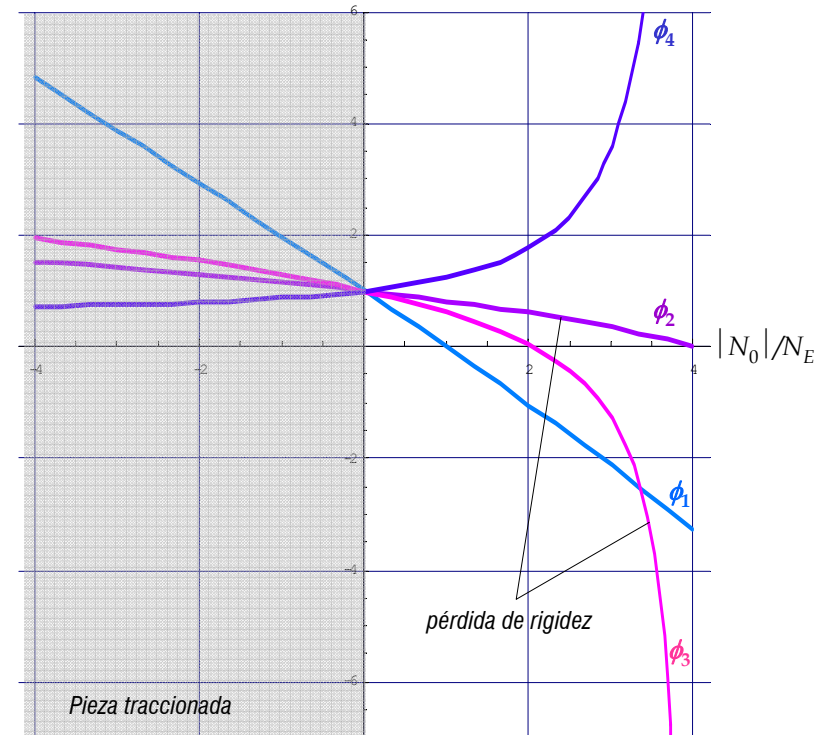
06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ Funciones de estabilidad.

$N_0 > 0$ (pieza traccionada)	$N_0 < 0$ (pieza comprimida)
$\phi_1 \quad \frac{1+\alpha}{12} \frac{\rho^2 \lambda^3 \operatorname{sh} \lambda}{2(1-\operatorname{ch} \lambda) + \rho \lambda \operatorname{sh} \lambda}$	$\frac{1+\alpha}{12} \frac{\rho^2 \lambda^3 \operatorname{sen} \lambda}{2(1-\cos \lambda) - \rho \lambda \operatorname{sen} \lambda}$
$\phi_2 \quad \frac{1+\alpha}{6} \frac{\rho \lambda^2 (\operatorname{ch} \lambda - 1)}{2(1-\operatorname{ch} \lambda) + \rho \lambda \operatorname{sh} \lambda}$	$\frac{1+\alpha}{6} \frac{\rho \lambda^2 (1 - \cos \lambda)}{2(1-\cos \lambda) - \rho \lambda \operatorname{sen} \lambda}$
$\phi_3 \quad \frac{1+\alpha}{4+\alpha} \frac{\lambda(\rho \lambda \operatorname{ch} \lambda - \operatorname{sh} \lambda)}{2(1-\operatorname{ch} \lambda) + \rho \lambda \operatorname{sh} \lambda}$	$\frac{1+\alpha}{4+\alpha} \frac{\lambda(\operatorname{sen} \lambda - \rho \lambda \cos \lambda)}{2(1-\cos \lambda) - \rho \lambda \operatorname{sen} \lambda}$
$\phi_4 \quad \frac{1+\alpha}{2-\alpha} \frac{\lambda(\operatorname{sh} \lambda - \rho \lambda)}{2(1-\operatorname{ch} \lambda) + \rho \lambda \operatorname{sh} \lambda}$	$\frac{1+\alpha}{2-\alpha} \frac{\lambda(\rho \lambda - \operatorname{sen} \lambda)}{2(1-\cos \lambda) - \rho \lambda \operatorname{sen} \lambda}$
$\rho = 1 + \frac{ N_0 }{GA}$	$\rho = 1 - \frac{ N_0 }{GA}$

$$\lambda = L \sqrt{\kappa \frac{|N_0|}{EI_z}} = L \sqrt{\frac{|N_0|}{\rho EI_z}} = \pi \sqrt{\frac{\kappa |N_0|}{\kappa_{cr} N_E}}, \quad N_E = \left(\frac{\pi}{L} \right)^2 \frac{EI_z}{1 + \alpha \pi^2 / 12}$$

■ Si se desprecia la deformación por cortante resulta $\rho = \kappa = \kappa_{cr} = 1$ y $\lambda = \pi \sqrt{|N_0| / N_E}$



6.1.2.4 Análisis no lineal de puentes arco

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Ámbito del cálculo no-lineal.** De acuerdo con los EN 1993-2 (*puentes metálicos*), EN 1994-2 (*puentes mixtos*) Art. 5.2.1 y la EAE-11 Art. 23.2, se debe proceder a la comprobación no-lineal de la estructura si se cumple:

$$\alpha_{cr} = \frac{F_{cr}}{F_{Ed}} < 10$$

Donde F_{cr} es la **carga crítica de inestabilidad inicial** y F_{Ed} es la **carga de diseño**. Por lo tanto, deberemos comenzar por combinar acciones para llegar a la **hipótesis de carga total** para el elemento en estudio (*en este caso el arco comprimido*)

■ **Método general de comprobación.** En el **contexto actual** del cálculo de puentes (*requisitos del proyecto según IAP-11 Art. 2.1 y disponibilidad del SOFTWARE adecuado*) entendemos que el análisis no-lineal debe realizarse por el primero de los procedimientos indicados en las normas EN 1993-1 y EAE-11 Art. 24.1, que consiste en un **análisis no-lineal completo** en el que se dan **imperfecciones iniciales** tanto a los elementos (*imperfecciones locales*) como a la estructura (*imperfecciones globales*). Si además se tiene en cuenta que los modelos globales planteados en este curso proponen **discretizaciones finas** de los elementos estructurales (*arco, tablero...*) basta entonces introducir estas imperfecciones a nivel global o **nodal**


6.1.2.4 Análisis no lineal de puentes arco metálicos y mixtos

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪Pasos del método general de comprobación. Estos se esquematizan a continuación

(1) obtención del coeficiente de amplificación α_{cr} que produce la inestabilidad inicial o elástica	Este coeficiente estará asociado a una determinada combinación de acciones o hipótesis de carga total previamente seleccionada	
(2) definición de la imperfección o deformada inicial del elemento	Dará lugar a tantas deformadas iniciales como modos de pandeo del arco debamos chequear (siempre asociados a $\alpha_{cr} < 10$)	
(3) comprobación directa de ELU	Resulta suficiente comprobar la sección con los esfuerzos obtenidos del análisis no-lineal con imperfecciones iniciales	

▪**Consideraciones generales.** El análisis no-lineal de un puente arco, desarrollado de acuerdo con el algoritmo propuesto, permite **comprobar la estabilidad** del sistema primario (*arco comprimido*). Para ello, podemos utilizar los módulos de cálculo no-lineal de los códigos comerciales (*análisis P-Δ con SAP 2000...*), aunque disponemos de la matriz no lineal descrita en la sección anterior, con la cual se puede captar adicionalmente el efecto estabilizador de la tracción del tablero en configuraciones tipo **bow-string**

6.1.2.4 Análisis no lineal de puentes arco metálicos y mixtos

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

(1) **Obtención del coeficiente de amplificación α_{cr} que produce la inestabilidad inicial o elástica.** Debemos calcular sucesivamente N_{Ed} , esfuerzo **axil de cálculo** correspondiente a la hipótesis de carga total, y el esfuerzo **axil crítico** N_{cr} , este último a partir de los módulos de evaluación de las cargas de pandeo de los códigos comerciales. El coeficiente de amplificación vale entonces:

$$\alpha_{cr} = \frac{N_{cr}}{N_{Ed}}$$

(2) **Definición de la imperfección inicial, método general.** De acuerdo con el EN 1993-1 Art. 5.2.1 y la EAE-11 Art. 22.3.5, se puede definir una imperfección geométrica **afín** a los modos de pandeo w_{cr} como sigue:

$$w_{init} = \varepsilon_0 w_{cr} \quad , \quad \varepsilon_0 = \alpha \frac{\bar{\lambda} - 0.2}{\bar{\lambda}^2} \frac{1 - \chi \bar{\lambda}^2 / \gamma_{M1}}{1 - \chi \bar{\lambda}^2} \frac{M_{Rk}}{E I w_{cr}''}$$

α y χ coeficientes de **imperfección** y de **reducción** respectivamente, definidos en 35.1.2 Curvas de pandeo (EAE-11). La curva de pandeo se escoge a partir de la forma de la sección transversal del elemento y el tipo de acero

$\bar{\lambda} = \sqrt{\alpha_{uk} / \alpha_{cr}}$ **esbeltez reducida** de la estructura, $\alpha_{uk} = N_{Rk} / N_{Ed}$ es el coeficiente de amplificación mínimo, para $\bar{\lambda} > 0.2$

M_{Rk} y N_{Rk} **momento y axil resistentes** característicos de la sección crítica. Se evalúan en función de la **clase** de la sección transversal (EAE-11 Art. 34.3 y 34.4)

γ_{M1} coeficiente parcial para la resistencia de elementos estructurales frente a inestabilidad ($\gamma_{M1} = 1.10$ según **Tabla 15.3** de la EAE-11)

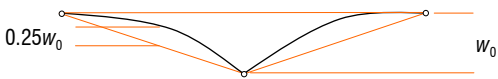


6.1.2.4 Análisis no lineal de puentes arco metálicos y mixtos

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

(2) Definición de la imperfección inicial, caso particular: arcos. De acuerdo con el EN 1993-2 Tablas D8 y D9 y la EAE-11 Art. 22.3.4, para el análisis de la estabilidad global de arcos bajo formas de pandeo en su plano o fuera de su plano, pueden utilizarse las imperfecciones geométricas definidas a continuación:

Forma de la imperfección		Valores de w_0 según el tipo de la curva de pandeo			
Pandeo en el plano		a	b	c	d
1. Arco triarticulado pandeo simétrico		$s/600$	$s/500$	$s/400$	$s/300$
2. Pandeo antisimétrico		$L/600$	$L/500$	$L/400$	$L/300$
Pandeo fuera del plano		$L_1/300$	$L_1/250$	$L_1/200$	$L_1/150$

s : longitud **total** del arco
 L : longitud de la cuerda, o luz del arco
 $L_1=L$ para $L\leq 20$ m , $L_1=\sqrt{20L}$ para $L> 20$ m

Forma de la imperfección: **parábola o función seno**

6.1.2.4 Análisis no lineal de puentes arco metálicos y mixtos

<6.1.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ARCO>

<6.1 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ARCO>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ Desde una perspectiva resistente, conviene anotar algunos *aspectos tipológicos* de los puentes atirantados:

(1) Poseen una *forma característica* en la que destaca la disposición y número de *tirantes*, la tipología de las *torres* o pilonos y la morfología del *tablero*

(2) Si bien un adecuado *diseño* requiere considerar la fuerte *interacción* existente entre todos ellos, estructural y formal, para el *modelado resistente* debemos considerar:

(2.1) La *esbeltez* de las torres y del tablero y como se conectan entre sí ambos elementos

(2.2) El comportamiento intrínsecamente *no lineal* de los tirantes

▪ Para ilustrar estas cuestiones hemos seleccionado una *serie de ejemplos*, con tablero de acero o de hormigón pretensado, cuidadosamente escogidos para barrer las distintas *configuraciones estructurales* usualmente utilizadas

▪ En lo estructural, ya se ha indicado que la *problemática* consiste en como modelar elementos *esbeltos* como *torres* y *tablero*, que por configuración resultan fuertemente comprimidos, y como reproducir el comportamiento intrínsecamente no lineal de los *tirantes*

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



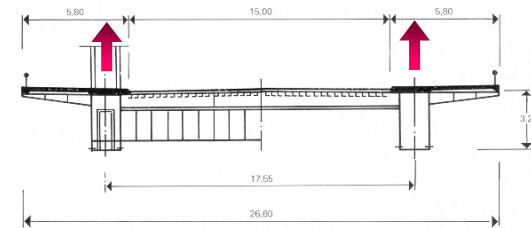
Puente Severin, en Colonia (1962, luz de 302 m, Gutehoffnungshütte Sterkrade A.G. y G. Lohmer)

- 2 planos inclinados de tirantes sobre dos vanos. Disposición en abanico
- Pórtico de atirantamiento en A, empotrado en pedestal y conectado transversalmente al tablero (dos vigas cajón laterales)



Nordbrücke o puente Theodor Heuss, en Düsseldorf (1958, luz de 260 m, Leonhardt & Andrä y F. Tamms)

- 2 planos verticales de tirantes sobre tres vanos. Disposición en arpa
- 4 mástiles empotrados en el tablero (dos vigas cajón laterales)



6.2.1.1 Puentes atirantados con tirantes aislados y tablero metálico

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

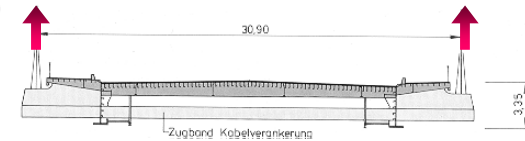
<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



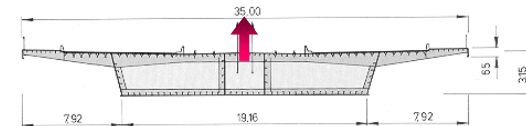
Kniebrücke (Düsseldorf, 1969, luz de 319 m. Leonhardt & Andrä y F. Tamms)

- 2 planos verticales de tirantes sobre dos vanos (pero uno es de retenida). Disposición en arpa
- Mástiles empotrados en cimientos, conectados lateralmente al tablero (dos vigas laterales de alma llena)



Puente Oberkassel (Düsseldorf, 1972, luz de 257.5 m. Leonhardt & Andrä y F. Tamms)

- 1 plano central de tirantes sobre dos vanos (el menor es de retenida). Disposición en arpa
- Mástil empotrado en tablero (cajón trícilular)

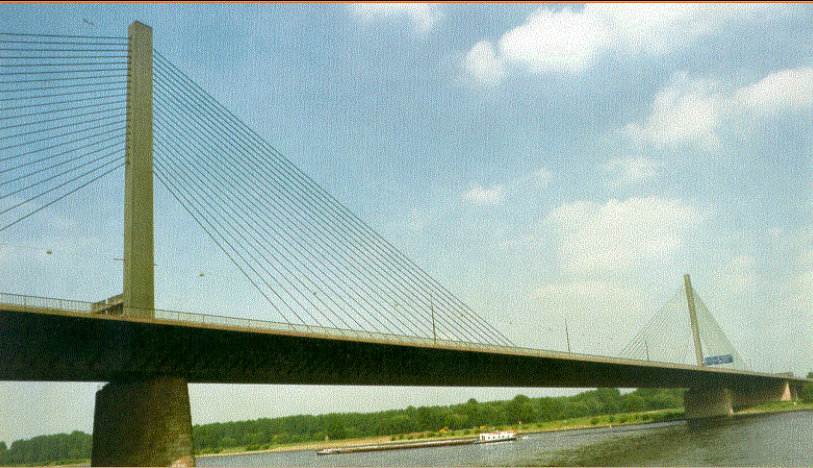


6.2.1.1 Puentes atirantados con tirantes aislados y tablero metálico

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

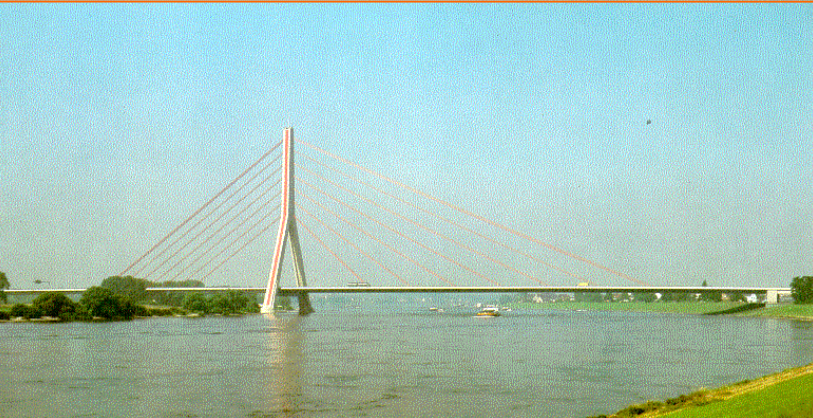
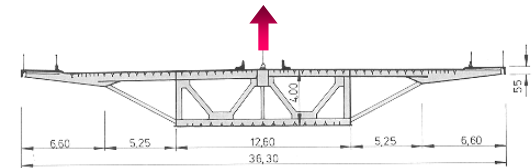
<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



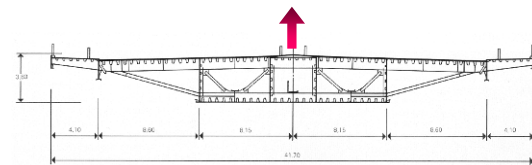
Puente de Bonn-Norte, o puente Friedrich-Hebert sobre el Rin (1966, 280 m de luz. H. Homberg)

- 1 plano de tirantes sobre tres vanos. Disposición híbrida múltiple
- Mástiles empotrados en tablero (cajón con voladizos apuntalados)



Puente de Flehe sobre el Rin, en Düsseldorf (1979, 368 m de luz)

- 1 plano de tirantes sobre dos vano (el menor es de retenida). Disposición híbrida
- Pórtico de atirantamiento de hormigón en Y invertida empotrada en la base, con apoyo del tablero (cajón con voladizos apuntalados)



6.2.1.2 Puentes atirantados con tirantes múltiples y tablero metálico o mixto

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



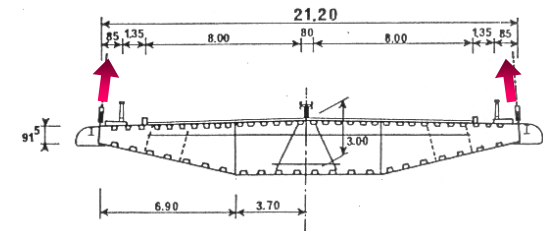
Puente de Yangpu sobre el río Huang-pu, en Shanghai (1993, tablero mixto de 602 m de luz)

- 2 planos inclinados de tirantes sobre tres vanos. Disposición híbrida múltiple
- Pórtico de atirantamiento en diamante y tablero pasante ($h=3$ m)



Pont de Normandie (en la desembocadura del sena, 1995, luz de 856 m, M. Virlogeux)

- 2 planos inclinados de tirantes sobre tres vanos (los laterales son de retenida). Disposición híbrida múltiple
- Pórtico de atirantamiento en Y invertida empotrada en la base y tablero pasante (viga cajón metálica en la parte central del vano principal y de HP en accesos)



6.2.1.2 Puentes atirantados con tirantes múltiples y tablero metálico o mixto

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

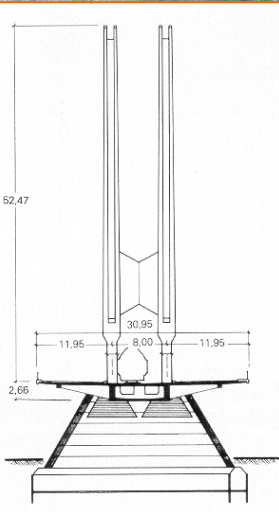
<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puentes sobre el lago Maracaibo (1962, Ricardo Morandi)

- Vanos de 235 m en cantilever con 2 pares de tirantes por vano
- Pórticos espaciales empotrados en la base y conectados al tablero (cajón multicelular)



Puentes de la factoría Hoechst sobre el Main (1972, 148 m de luz, U. Finsterwalder)

- 2 planos de tirantes sobre dos vanos (el menor es de retenida). Disposición en arpa múltiple
- Pórtico de atirantamiento en H empotrado en el tablero (cajón con voladizos laterales)

6.2.1.3 Puentes atirantados con tablero de hormigón pretensado

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

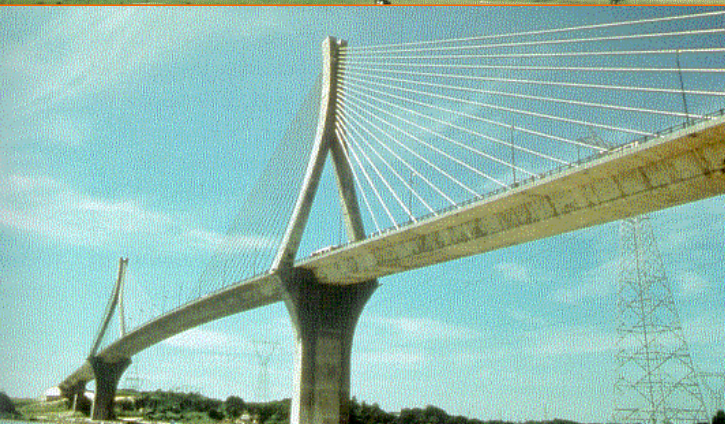
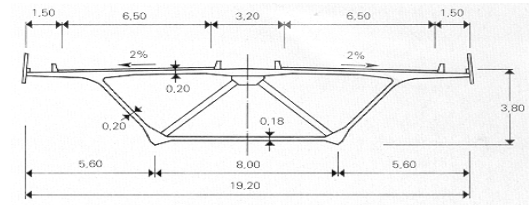
<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



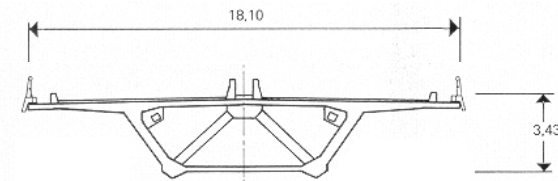
Puente de Brotonne sobre el Sena (1977, 320 m de luz, J. Muller y J. Mathivat)

- 1 plano de tirantes sobre tres vanos. Disposición híbrida múltiple
- Mástiles empotrados en tablero (cajón arriostrado interiormente con puntales de HP)
- Tablero empotrado elásticamente sobre las dos columnas que prolongan los mástiles mediante pares de neoprenos



Puente sobre el río Coatzacoalcos, en México (1984, 288 m de luz, J. Mathivat)

- 1 plano de tirantes sobre tres vanos. Disposición híbrida múltiple
- Pórtico de atirantamiento en diamante empotrado en la base, con unión rígida del tablero (cajón arriostrado interiormente con puntales de HP)



6.2.1.3 Puentes atirantados con tablero de hormigón pretensado

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

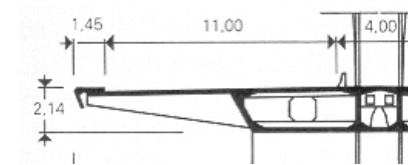
<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puente Sancho el Mayor sobre el Ebro, cerca de Castejón (1978, 146 m de luz, C.F.C.S.L.)

- 1 plano de tirantes sobre el vano principal y dos planos posteriores de retenida, anclados en macizos. Disposición híbrida múltiple
- Mástil de atirantamiento de sección variable empotrado en tablero (cajón tricelular con voladizos sobre costillas laterales)



Puente sobre el Lérez (Pontevedra, 1995, vano atirantado de 125 m, C.F.C.S.L.)

- 1 plano de tirantes sobre el vano principal y dos planos posteriores de retenida, anclados en macizos. Disposición híbrida múltiple
- Mástil de atirantamiento de sección variable empotrado en tablero (cajón tricelular con voladizos sobre jabalcones)

6.2.1.3 Puentes atirantados con tablero de hormigón pretensado

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

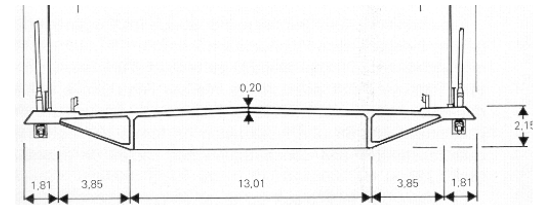
<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puente de Pasco-Kennewick sobre el río Columbia (1978, 299 m de luz, A. Grant y Leonhardt & Ändra)

- 2 planos de tirantes sobre tres vanos. Disposición en abanico múltiple
- Pórtico empotrado en cimientos y tablero pasante (dos vigas cajón laterales)



Puente sobre el río Papalaopan (México, 1995, vano central de 203 m, C.F.C.S.L.)

- 2 planos de tirantes sobre tres vanos. Disposición híbrida múltiple
- Mástiles empotrados en cimientos y tablero pasante

6.2.1.3 Puentes atirantados con tablero de hormigón pretensado

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Diseño interactivo atirantamiento-torres-tablero.** A continuación, mostraremos como la *disposición de los tirantes condiciona la concepción del tablero* y el *diseño de las torres*. Dicho de otro modo, indicaremos como ha de conformarse de la sección transversal del tablero y la geometría de las torres en función del número de planos de tirantes y de su inclinación, en el caso de tener más de un plano. La discusión se ha organizado considerando las opciones más ortodoxas:

	un solo plano de tirantes (en mediana)	dos planos de tirantes (verticales o inclinados)
Tablero	cajón central uni o multicelular, en función de su anchura, y jabalcones o cuchillos transversales. Riostras en secciones de apoyo en estribos	tableros metálicos: dos vigas bajo calzada, de alma llena y más frecuentemente en cajón, alineadas con los anclajes de tirantes. Riostras* en secciones de anclaje de tirantes y de apoyo en pilas o estribos tableros de hormigón: losa maciza o nervada transversalmente con dos nervios laterales longitudinales, dos cajones laterales y riostras* o bien cajón multicelular, en función de la luz
Torres	ménsula empotrada en el tablero, o pórtico en “Y” invertida o diamante con ménsula superior, según la luz del vano principal	planos verticales: ménsulas empotradas en tablero o en cimientos, en función de la luz del vano principal, pórtico recto o en “H” con patas inclinadas... planos inclinados: pórtico en “A” en “Y” invertida o diamante con ménsula superior, según la luz del vano principal

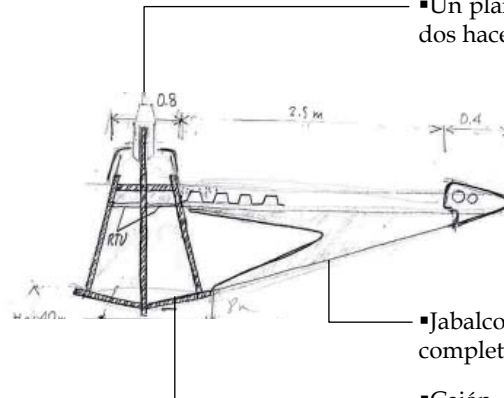
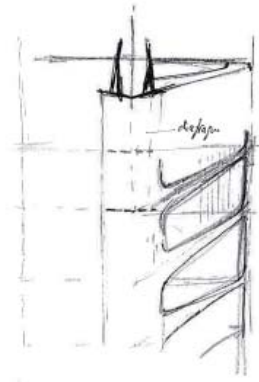
(*) Si los planos de tirantes están entre calzada y aceras voladas, éstas se resuelven con jabalcones o cuchillos transversales en prolongación de las vigas de piso y las riostras

<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪Un solo plano de tirantes.

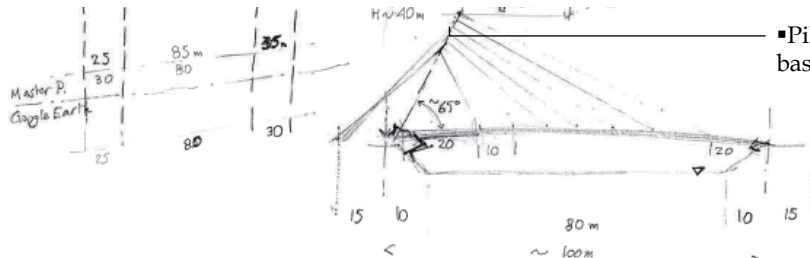


▪Un plano de tirantes en mediana y dos haces de tirantes de retenida

▪Jabalcoes laterales *oblicuos*, para completar el ancho útil del tablero

▪Cajón bicelular con alma central para anclaje de tirantes

▪Pilono con articulación esférica en la base sobre el estribo

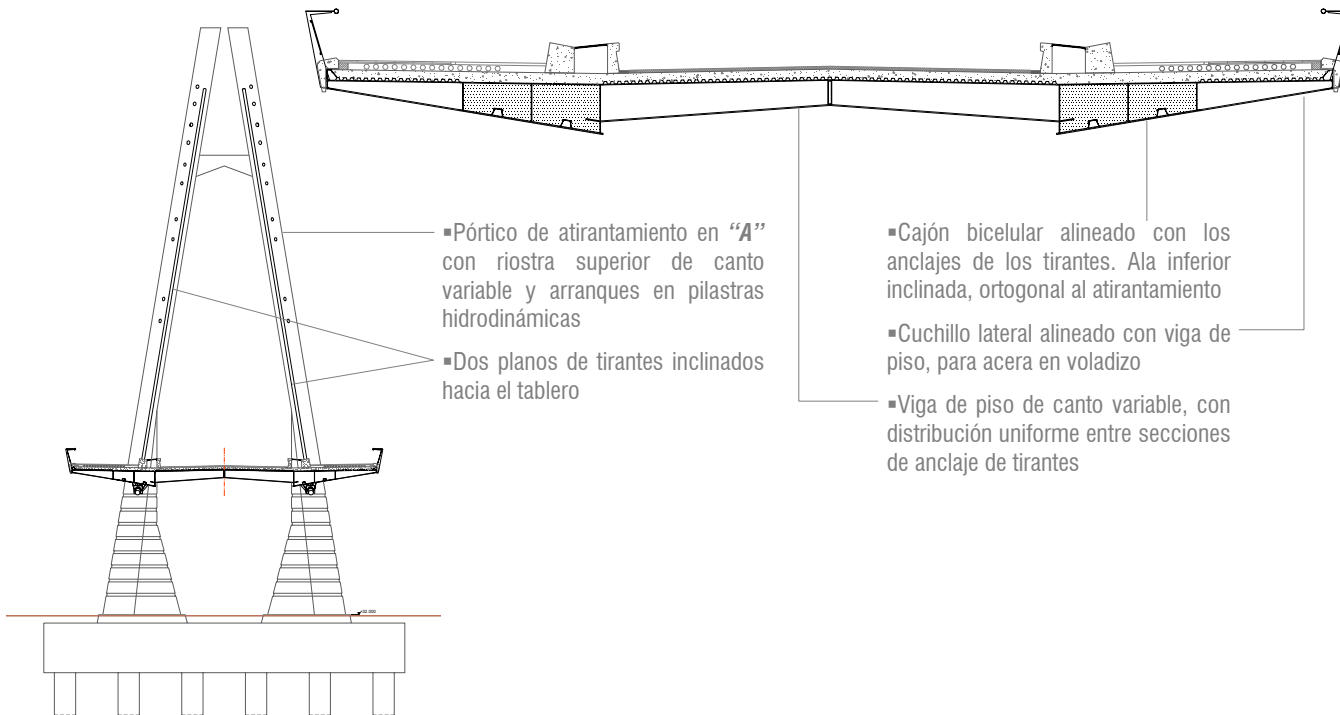


<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ Dos planos de tirantes inclinados.



<6.2.1 MORFOLOGÍA DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Comportamiento de puentes atirantado.** Los aspectos particulares que deben ser tenidos en cuenta a la hora de plantear el análisis de un *puente atirantado* son los siguientes: los *tirantes* tienen un comportamiento intrínsecamente **no-lineal**, mientras que los *tableros* son formidablemente **esbeltos** (de ahí la economía de esta tipología, adoptándose con gran frecuencia valores de la relación $h/L < 1/100$) y están en general **comprimidos** debido a la inclinación de los tirantes. Finalmente, las *torres* o pilonos también poseen formas **esbeltas** y siempre están **fuertemente comprimidas**. Desarrollaremos todos estos aspectos de acuerdo con el guión siguiente:

(1) respuesta de los tirantes

se analiza el problema de la **catenaria elástica** como punto de partida para la elaboración de herramientas mejor orientadas al análisis de sistemas de barras

(2) respuesta no lineal de torres y tablero

el estudio de la viga-columna, desarrollado en la sección dedicada a puentes arco, es de aplicación directa para cuantificar la **influencia de la no-linealidad** sobre la respuesta de las **torres y tableros comprimidos**, situación que se produce sistemáticamente en los **puentes atirantados**

(3) análisis no-lineal del sistema completo

la **matriz de rigidez no-lineal** de un elemento recto deducida anteriormente, puede aplicarse al análisis del sistema formado por **torres y tablero**, debiendo especificar como proceder con los tirantes en el marco general de aplicación del **MEF**

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Objetivo del análisis no lineal del puente.** Al igual que en los puentes arco, consiste en **comprobar la estabilidad** de los elementos que capitalizan la no linealidad geométrica del *modelo global*, torres y tablero en el caso de los puentes atirantados, así como **validar la comprobación lineal de los EL**

▪ **Propiedades de los elementos.** Revisaremos el tratamiento de los elementos constructivos que componen los puentes atirantados. En concreto:

- **Torres y tablero:** ambos sistemas se modelan con elementos 1D, ajustando la **posición y conexiones de las barras** a la **morfología del esqueleto resistente** de las torres y del tablero. El cómputo de la no linealidad se basa en la matriz de rigidez de la viga-columna presentada anteriormente
- **Tirantes y soportes:** como mostraremos a continuación, los tirantes se modelan como elementos 1D solicitados a axil (*desconectados a rotaciones nodales*) con un **módulo de elasticidad aparente** función de la tracción soportada, y ello tanto para cálculos lineales como no lineales. En cuanto a las pilas bajo tablero, su altura es la que determina su sensibilidad al comportamiento no lineal y por lo tanto la forma de tratarlas en el modelo
- **Desconexiones y aparatos de apoyo:** nuevamente deberán quedar materializadas en el modelo (coacciones elásticas de los aparatos de apoyo de neopreno mediante elementos tipo *link*...)

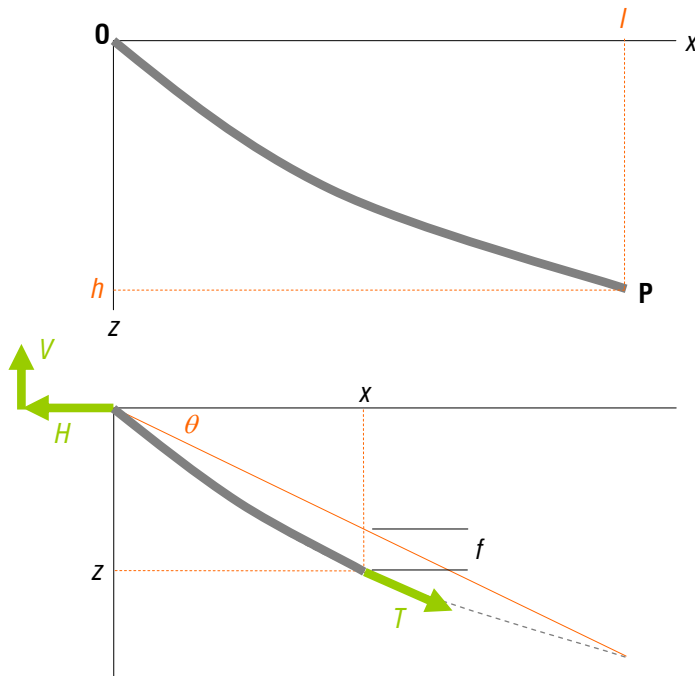
▪ **Otros cálculos no lineales:** pueden ser necesarios a nivel local, en particular en las zonas de anclaje de los tirantes de las soluciones metálicas, y requieren modelos específicos (en general modelos de **EF 2D**)

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **La catenaria elástica.** Denominando W al peso del cable, L_0 a su longitud inicial (libre de tensiones) y definiendo su configuración actual por la posición $P(l, h)$ de su extremo final, tendremos las siguientes ecuaciones de estado



(1) **Equilibrio del cable.** Si s y p definen las longitudes de arco en configuración inicial y actual, tendremos en cualquier configuración $dp^2 = dx^2 + dz^2$ y:

$$T \frac{dx}{dp} = H$$

$$T \frac{dz}{dp} = V - \frac{s}{L_0} W$$

(2) **Ecuación constitutiva.** Si A_0 corresponde al área inicial de la sección transversal del cable, tendremos:

$$T = EA_0 \left(\frac{dp}{ds} - 1 \right)$$

(3) **Tracción en el cable.**

$$T = \left[H^2 + \left(V - \frac{s}{L_0} W \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

6.2.2.1 Respuesta no lineal del cable

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

(4) **Geometría inicial del cable.** Se puede caracterizar combinando adecuadamente las ecuaciones de equilibrio y la relación constitutiva. El resultado es:

$$\frac{dx}{ds} = \frac{H}{T} \left(1 + \frac{T}{EA_0} \right)$$

$$\frac{dz}{ds} = \frac{V - sW/L_0}{T} \left(1 + \frac{T}{EA_0} \right)$$

(5) **Geometría actual del cable.** El sistema anterior se puede integrar si expresamos la tracción T en función de sus componentes en el origen y el peso del cable, según se estableció en (3):

$$x = \frac{H}{EA_0} s + \frac{HL_0}{W} \left(ash \frac{V}{H} - ash \frac{V - sW/L_0}{H} \right)$$

$$z = \frac{W}{EA_0} s \left(\frac{V}{W} - \frac{s}{2L_0} \right) + \frac{HL_0}{W} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^2 - \left[1 + \left(\frac{V - sW/L_0}{H} \right)^2 \right]^2 \right\}$$

(6) **Posición del extremo final.** Basta particularizar en $s=L_0$, obteniendo:

$$l = \frac{HL_0}{EA_0} + \frac{HL_0}{W} \left(ash \frac{V}{H} - ash \frac{V - W}{H} \right)$$

$$h = \frac{WL_0}{EA_0} \left(\frac{V}{W} - \frac{1}{2} \right) + \frac{HL_0}{W} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^2 - \left[1 + \left(\frac{V - W}{H} \right)^2 \right]^2 \right\}$$

6.2.2.1 Respuesta no lineal del cable

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

(7) **Matriz de flexibilidad tangente.** El sistema anterior es de tipo *implícito* y requiere soluciones numéricas, lo cual por otra parte no supone ninguna dificultad. En cambio, sí se puede construir una relación *explícita* entre *variaciones* de desplazamientos y fuerzas. Basta diferenciar las fórmulas anteriores para obtener la relación tangente correspondiente:

$$\begin{Bmatrix} \delta l \\ \delta h \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial l}{\partial H} & \frac{\partial l}{\partial V} \\ \frac{\partial h}{\partial H} & \frac{\partial h}{\partial V} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta H \\ \delta V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta H \\ \delta V \end{Bmatrix}$$

$$f_{11} = \frac{\partial l}{\partial H} = \frac{L_0}{EA_0} + \frac{L_0}{W} \left\{ ash \frac{V}{H} - ash \frac{V-W}{H} - \frac{V}{H} \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \frac{V-W}{H} \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$f_{12} = \frac{\partial l}{\partial V} = \frac{L_0}{W} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$f_{21} = \frac{\partial h}{\partial H} = \frac{L_0}{W} \left\{ \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \left(\frac{V}{H} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

$$f_{22} = \frac{\partial h}{\partial V} = \frac{L_0}{EA_0} + \frac{L_0}{W} \left\{ \frac{V}{H} \left[1 + \left(\frac{V}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} - \frac{V-W}{H} \left[1 + \left(\frac{V-W}{H} \right)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \right\}$$

6.2.2.1 Respuesta no lineal del cable

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

(8) **Matriz de rigidez tangente del cable.** La ecuación anterior se puede invertir, obteniendo de ese modo una relación de rigidez *tangente* entre variaciones de fuerzas y desplazamientos:

$$\delta \mathbf{F} = \mathbf{K}_T \delta \mathbf{u} \quad , \quad \begin{Bmatrix} \delta H \\ \delta V \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta l \\ \delta h \end{Bmatrix}$$

Con las componentes:

$$k_{11} = \frac{f_{22}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad k_{12} = \frac{-f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}$$

$$k_{21} = \frac{-f_{21}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad k_{22} = \frac{f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}$$

Con este operador, se puede implementar códigos numéricos basados en el método de rigidez para sistemas no-lineales (por técnicas iterativas tipo *Newton-Raphson*) y así resolver sistemas estructurales en los que intervengan cables sin ninguna restricción de forma. Sin embargo, en el caso de los tirantes de puentes, su baja relación f/L permite un planteamiento más sencillo y directo que se expone a continuación

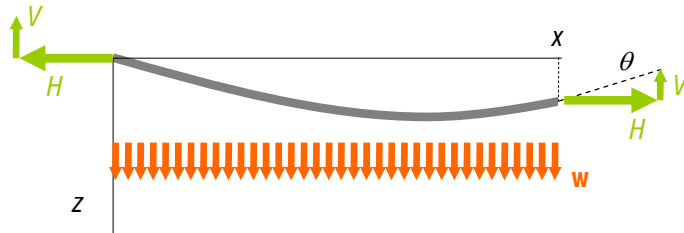
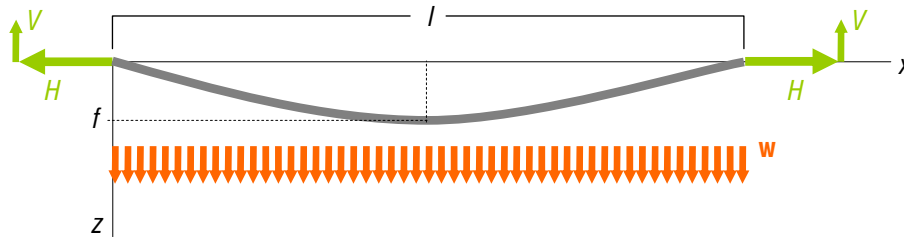
6.2.2.1 Respuesta no lineal del cable

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **El tirante elástico.** Supongamos que el cable tiene ambos extremos a nivel ($z=0$). Si su longitud L es ligeramente superior a la cuerda l (caso del **tirante**) el peso por unidad de longitud $w=W/l$ puede suponerse linealmente distribuido y justifica una aproximación parabólica para la forma del cable



(1) **Longitud del tirante.** Si s define la longitud de arco en configuración actual, tendremos $ds^2 = [1 + (z')^2] dx^2$, $z = 4f\xi(1-\xi)$, $\xi = x/l$ y la longitud L será:

$$L = \int_{x=0}^l \sqrt{1 + (z')^2} dx$$

$$\approx l \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right]$$

(2) **Equilibrio del tirante horizontal.** Si T es la tracción en el cable y θ la pendiente del mismo, tendremos:

$$H = \cos \theta T = \frac{T}{\sqrt{1 + (z')^2}} = \frac{Wl}{8f}$$

$$V = \sin \theta T = \frac{1}{2} W (1 - 2\xi)$$

(3) **Extensión del tirante.** Sea L_0 la longitud inicial del cable (libre de tensiones)

$$L = L_0 + \int_{s=0}^{L_0} \frac{T}{EA_0} ds = L_0 + \frac{H}{EA_0} \int_{x=0}^l [1 + (z')^2] dx$$

$$= L_0 + \frac{Hl}{EA_0} \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f}{l} \right)^2 \right]$$

6.2.2.2 Respuesta no lineal del tirante

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

(4) Comportamiento estático del cable. Supongamos dos configuraciones del tirante, a las que corresponden longitudes y fuerzas dadas por l_1, L_1, T_1 y l_2, L_2, T_2 . Para cada una de ellas se cumplirá exactamente:

$$L_1 = L_0 + \frac{H_1 l_1}{EA_0} \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f_1}{l_1} \right)^2 \right] = l_1 \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f_1}{l_1} \right)^2 \right]$$

$$L_2 = L_0 + \frac{H_2 l_2}{EA_0} \left[1 + \frac{16}{3} \left(\frac{f_2}{l_2} \right)^2 \right] = l_2 \left[1 + \frac{8}{3} \left(\frac{f_2}{l_2} \right)^2 \right]$$

Restando ambas ecuaciones y sustituyendo las flechas f_i por su expresión en función de la componente horizontal de la tracción H_i se obtiene:

$$\frac{H_2 l_2 - H_1 l_1}{EA_0} + \frac{1}{EA_0} \frac{W^2}{12} \left(\frac{l_2}{H_2} - \frac{l_1}{H_1} \right) = l_2 - l_1 + \frac{W^2}{24} \left(\frac{l_2}{H_2^2} - \frac{l_1}{H_1^2} \right)$$

Por lo que el cambio de longitud de la cuerda resulta valer:

$$l_2 - l_1 = \frac{H_2 l_2 - H_1 l_1}{EA_0} + \frac{W^2}{24} \left(\frac{l_1}{H_1^2} - \frac{l_2}{H_2^2} \right) + \frac{W^2}{12EA_0} \left(\frac{l_2}{H_2} - \frac{l_1}{H_1} \right)$$

Pero el tercer sumando del miembro de la derecha es despreciable frente al que le precede. Basta comparar $24H^2$ con $12EA_0H$ y comprobar que su cociente es equivalente a $2\sigma/E \ll 1$. Por lo tanto:

$$l_2 - l_1 \approx \frac{H_2 l_2 - H_1 l_1}{EA_0} + \frac{W^2}{24} \left(\frac{l_1}{H_1^2} - \frac{l_2}{H_2^2} \right)$$

6.2.2.2 Respuesta no lineal del tirante

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

(5) **Módulos de elasticidad aparentes.** Estos pueden definirse para el tirante mediante fórmulas del tipo $1/E^* = \Delta\epsilon / \Delta\sigma = (\Delta l/l) / (\Delta T/A_0)$. Por lo tanto, sobre la base de la última expresión deducida, podemos proponer dos módulos de elasticidad:

5.1 Módulo secante. Corresponde a tomar $l_1 \approx l_2 \approx l$ en el miembro de la derecha, resultando:

$$\frac{1}{E_s} = \frac{1}{E} + \frac{A_0 W^2}{24} \left(\frac{H_1 + H_2}{H_1^2 H_2^2} \right)$$

5.2 Módulo tangente. Haciendo ahora $H_1 = H_2 = H$ se obtiene:

$$\frac{1}{E_T} = \frac{1}{E} + \frac{A_0 W^2}{12 H^3}$$

Si el tirante está inclinado un ángulo ϕ , como sucede sistemáticamente en un puente atirantado, debemos sustituir w por su proyección sobre la normal a la cuerda, igual a $w \cos \phi$, por lo que las fórmulas anteriores adoptan la expresión final siguiente:

$$E_s = \frac{E}{1 + \frac{EA_0 (w l_0)^2}{24} \left(\frac{T_1 + T_2}{T_1^2 T_2^2} \right)}$$

$$E_T = \frac{E}{1 + \frac{EA_0 (w l_0)^2}{12 T^3}}$$

En estas últimas, T corresponde a la **proyección sobre la cuerda de la tracción en el tirante** (constante) y l_0 es la **proyección horizontal de la cuerda**

6.2.2.2 Respuesta no lineal del tirante

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Análisis no lineal.** En puentes atirantados de luces moderadas (por debajo de 200 m), pese a la esbeltez de torres y tableros, se observa que la *respuesta* es **dominantemente lineal**, por lo que el *análisis no lineal* vuelve a tener por finalidad esencial el **chequeo de la estabilidad** del sistema y en particular de las torres. El estudio de la viga-columna es de aplicación directa para cuantificar la influencia de la no-linealidad sobre la respuesta de las torres y tableros comprimidos, situación que se produce sistemáticamente en estas estructuras. Además, en el apartado anterior hemos obtenido módulos de elasticidad aparentes para los tirantes, que permiten incluir a estos elementos en la formulación no lineal desarrollada para los elementos viga. Finalmente, en los códigos comerciales, se suele disponer de módulos para la determinación de modos y cargas críticas de pandeo (*inestabilidad elástica*) y para el cálculo no-lineal (*Buckling Analysis* y *análisis P-Δ* con SAP 2000, Statik...)

■ **Método general de comprobación.** Sus etapas se vuelven a esquematizar a continuación. La imperfección inicial w_{init} se determina, en el caso de puentes atirantados metálicos o mixtos, por el método general descrito en la sección anterior

(1) obtención del coeficiente de amplificación α_{cr} que produce la inestabilidad inicial o elástica	Este coeficiente estará asociado a una determinada combinación de acciones o hipótesis de carga total previamente seleccionada	
(2) definición de la imperfección o deformada inicial del elemento	Dará lugar a tantas deformadas iniciales como modos de pandeo debamos chequear (siempre asociados a $\alpha_{cr} < 10$)	←
(3) comprobación directa de ELU	Resulta suficiente comprobar la sección con los esfuerzos obtenidos del análisis no-lineal con imperfecciones iniciales	←

6.2.2.3 Análisis no lineal de puentes atirantados

<6.2.2 MODELADO ESTRUCTURAL DE PUENTES ATIRANTADOS>

<6.2 DESCRIPCIÓN MORFOLÓGICA Y MODELADO DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES EN PUENTES ATIRANTADOS>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Consideraciones generales: modelos globales y locales.** Para las tipologías abordadas en este tema, esencialmente compuestas por elementos esbeltos, lo usual es plantear un *modelo global de barras* y desarrollar modelos de *EF 2D* para los *análisis locales complementarios*, con el fin de captar aquellos efectos que no reproducen los esqueletos de barras, como la difusión de los esfuerzos de membrana, las flexiones locales del piso o la abolladura de chapas esbeltas. Además, conviene subrayar que *al modelar los tableros* de estos puentes, se debe aplicar todos los conceptos y conocimientos adquiridos en los temas específicos de esta materia, en particular los dos primeros (modelos *viga* y *emparrillado*). Por su parte, los *modelos híbridos* resultan en general mucho más *pesados* y solo son adecuados para algunas tipologías singulares como la mostrada en la diapositiva siguiente, correspondiente al viaducto de la línea T2 del tranvía de Valencia. Finalmente, comentar que además del chequeo del diseño en servicio, se deben realizar todas las comprobaciones requeridas por el *proceso constructivo*

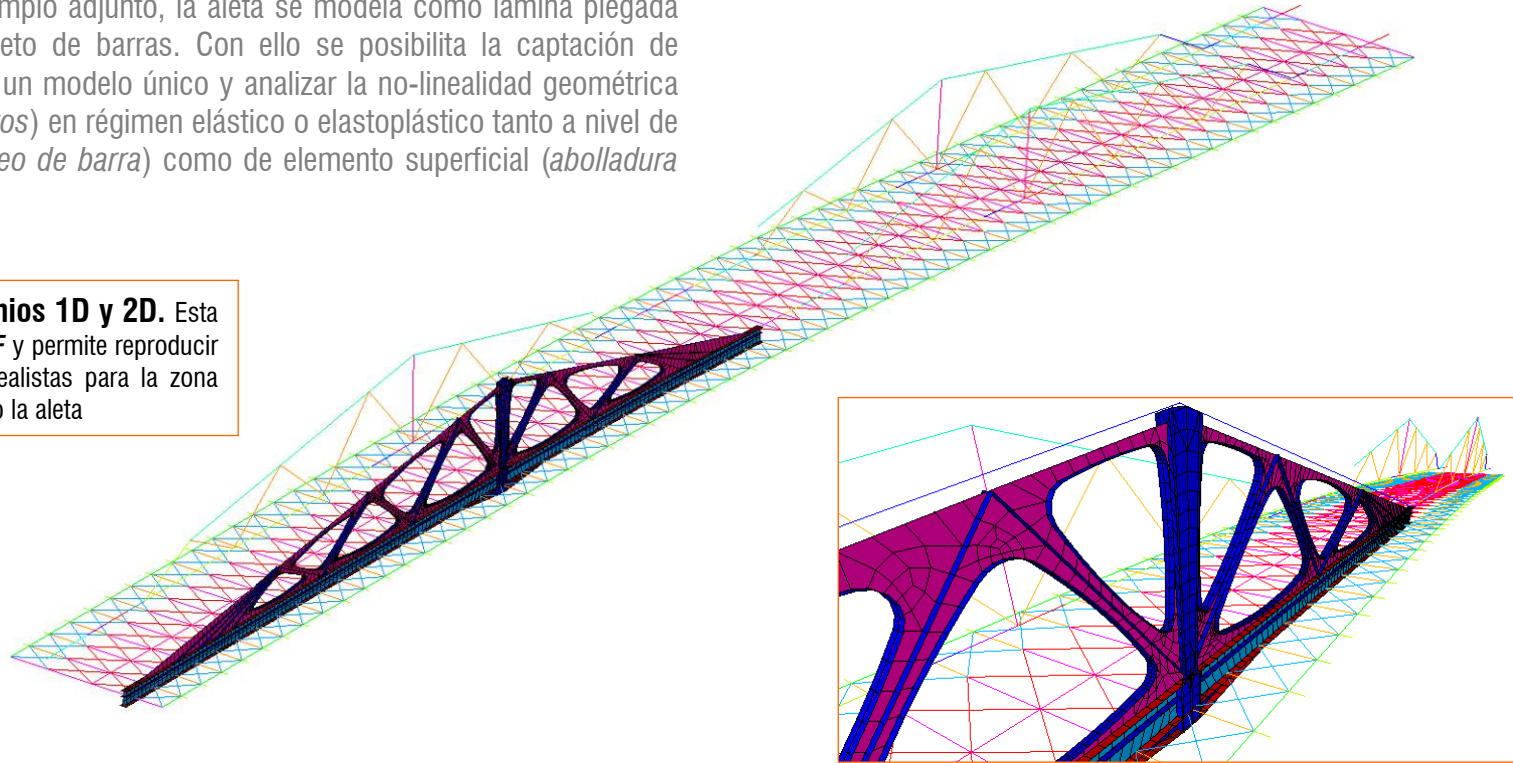
▪ **Análisis lineal y no lineal (I).** Los puentes se *diseñan* en *régimen lineal*, y no solo los puentes: otras estructuras como los automóviles, las embarcaciones o las aeronaves también. Ello se explica por el hecho de que en servicio, las *sensaciones transmitidas* por estas construcciones han de ser *amables*

▪ **Análisis lineal y no lineal (II).** Por ello, la metodología estándar de *comprobación sistemática de los EL* se basa en el principio de superposición y puede desarrollarse en *régimen lineal*. En este marco, el *análisis no lineal* no solo tiene por finalidad comprobar la *estabilidad* de los elementos esbeltos comprimidos, como arco o torres y tablero. También debe *validar* la estrategia general de comprobación lineal de la estructura. Además, algunas comprobaciones locales, como los impactos contra elementos estructurales, solo pueden evaluarse fiablemente en régimen no-lineal, geométrico y del material

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Modelo híbrido.** Consiste en combinar elementos barra y lámina en un único modelo: en el ejemplo adjunto, la aleta se modela como lámina plegada insertada en un esqueleto de barras. Con ello se posibilita la captación de fenómenos locales con un modelo único y analizar la no-linealidad geométrica (*grandes desplazamientos*) en régimen elástico o elastoplástico tanto a nivel de elemento esbelto (*pandeo de barra*) como de elemento superficial (*abolladura de las paredes*)

▪ **Conexión entre dominios 1D y 2D.** Esta se materializa mediante **NDF** y permite reproducir condiciones de contorno realistas para la zona de mallado 2D, en este caso la aleta



06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puente del acceso sur a Cullera, sobre el Júcar (2007, vano central de 90 m de luz, S. Monleón y CMD Ingenieros)

- Diseñado como arco atirantado, o "bowstring", el nuevo puente es una evolución de los puentes metálicos históricos existentes en la zona. Consta de tres vanos, apoyado sobre dos estribos y sobre dos parejas de pilas intermedias, que no interfieren con el cauce, según las condiciones de la Confederación Hidrográfica del Júcar. Las luces son de 22.5 m en los vanos laterales y de 90 m en el vano central. La estructura principal del puente está formada por un arco compuesto atirantado por el tablero en el tramo central
- El tablero, de sección mixta, se suspende del arco en su vano principal. Es continuo más allá de los apoyos intermedios y vuelve a apoyarse simplemente sobre estribos. El arco compuesto está formado por dos arcos tubulares de acero Ø914, inclinados y arriostrados entre sí
- El singular diseño de estos arriostramientos, de morfología orgánica debido a la red de nervaduras dispuestas en su cara inferior, crea un particular ambiente de inspiración neogótica en los accesos al arco

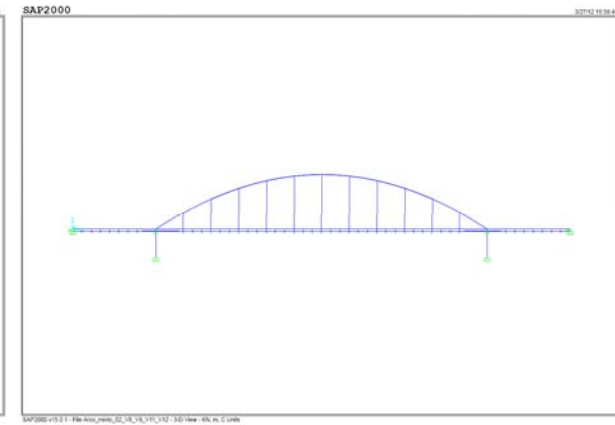
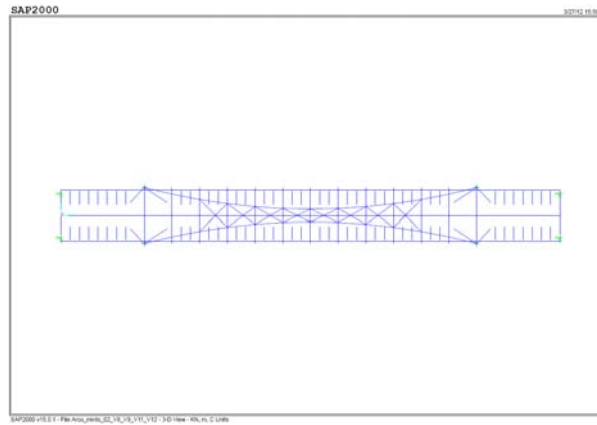
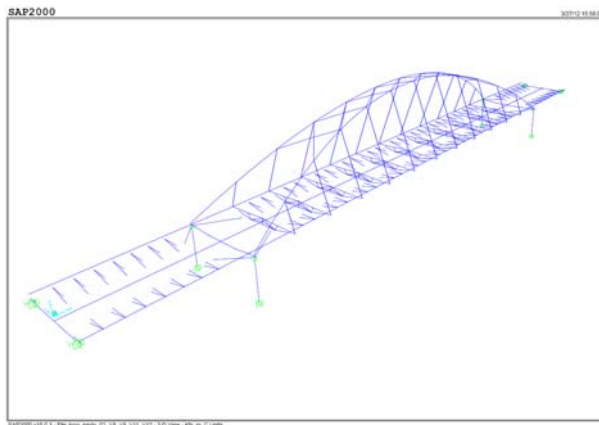
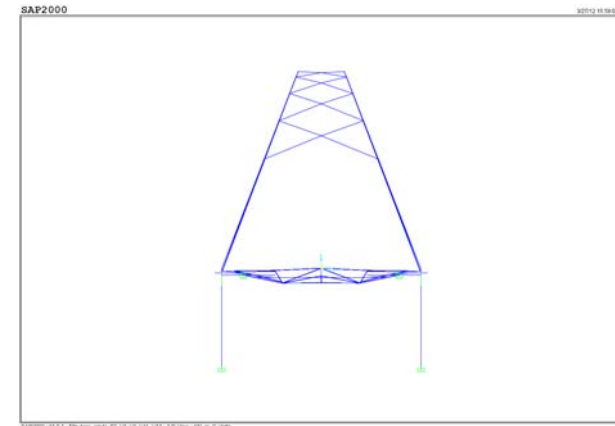
<6.3.1 EJEMPLO 1: modelado de un puente arco>

<6.3 ANÁLISIS COMPLETO DEL PUENTE>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Puente del acceso sur a Cullera (I).** Para el análisis global de la estructura en servicio, así como para el chequeo de su estabilidad, se desarrolló un modelo espacial de barras, procesado mediante SAP 2000. El tablero, formado por un cajón mixto bicelular, se asimiló a una viga única, a la que se conectaron los jabalones, los arriostramientos interiores y el sistema horizontal de puntales y tirantes (en las figuras adjuntas, no se visualizan los **NDF**). La flexión local del piso, así como la difusión de esfuerzos membrana en los arriostramientos entre arcos se estudiaron mediante modelos locales 2D

▪ **Puente del acceso sur a Cullera (II).** Así mismo, el singular proceso constructivo adoptado exigió otro modelo de barras para el arco y la parte central del tablero, con la incorporación del marco provisional de apoyo en el flotador, el cual **no** se materializaba en la sección de unión arco-tablero sino en la sección de la primera péndola, generando una situación de funcionamiento singular para el conjunto durante esta fase

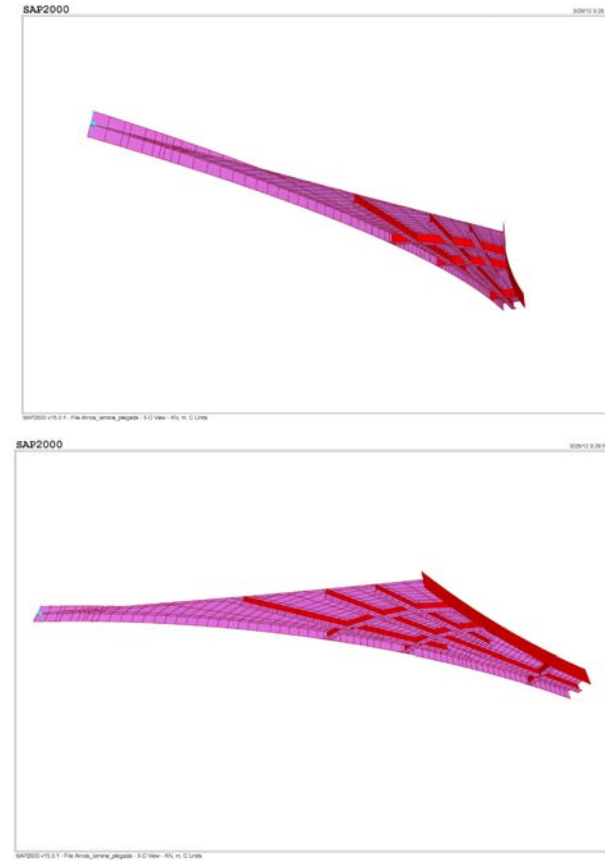
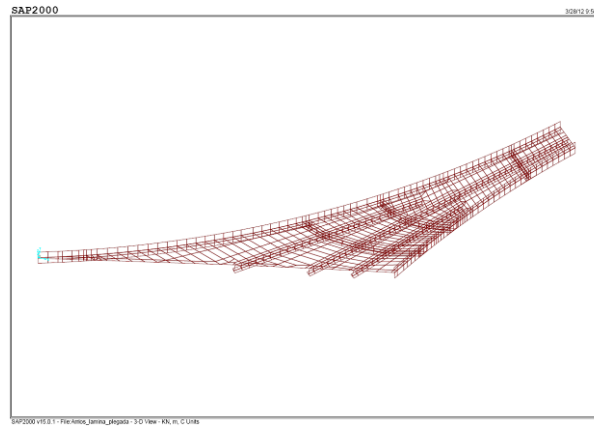
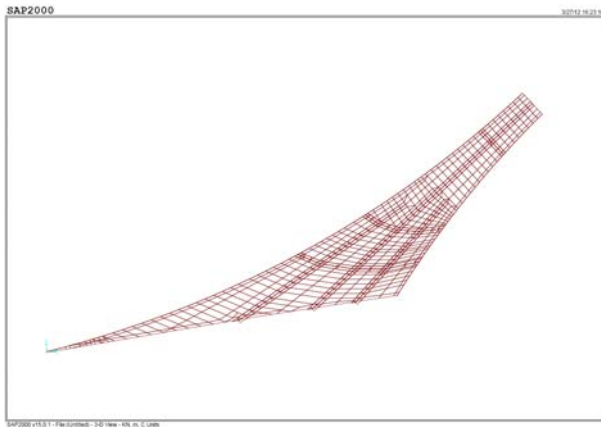


<6.3.1 EJEMPLO 1: modelado de un puente arco>

<6.3 ANÁLISIS COMPLETO DEL PUENTE>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

■ **Puente del acceso sur a Cullera (III).** Para complementar el análisis global en servicio, llevado a cabo con el modelo espacial de barras descrito anteriormente, se desarrolló, entre otros, un modelo local para el análisis de la difusión de tensiones en las paredes de los arriostramientos entre arcos tubulares. Por su singular morfología y proporciones, las piezas situadas en la parte más baja de los arcos (creando un claro efecto portal) eran susceptibles de abollar y también de presentar concentraciones de tensiones por arrastre de cortante, en las uniones del alma o *piel* con los rigidizadores longitudinales, dispuestos a modo de nervaduras orgánicas. Estos efectos se estudiaron con un modelo **EF 2D** generado y procesado con SAP 2000, del que se adjuntan algunas vistas



<6.3.1 EJEMPLO 1: modelado de un puente arco>

<6.3 ANÁLISIS COMPLETO DEL PUENTE>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados



Puente sobre el Turia, entre Manises y Paterna (2009, vano principal de 90 m de luz, S. Monleón y CMD Ingenieros)

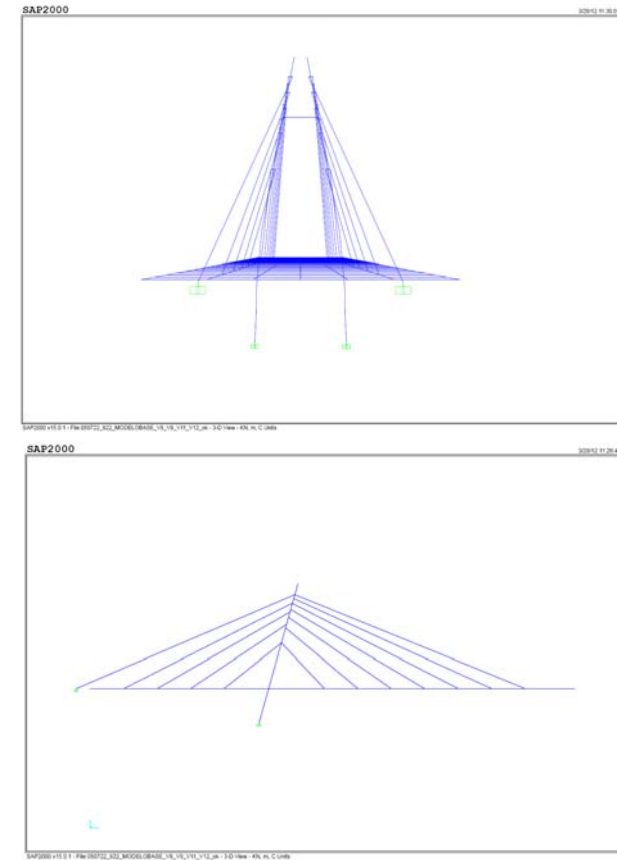
- *Pieza clave en el diseño del nuevo bulevar Paterna-Manises, su tipología y geometría resuelven adecuadamente trazado vial e interacción hidráulica y crean un magnífico portal sobre el río Turia, símbolo perfecto del abrazo entre dos municipios vecinos que han compartido historia, cultura y tradición. Las luces de los vanos atirantados son de 90+55 m, para un ancho total $B=22.4$ m*
- *El atirantamiento está formado por dos planos tumbados de 7+2×5 tirantes de acero de alta resistencia envainados en PADE blanco*
- *Las torres, de 30.9 m sobre tablero, conforman un pórtico en A de canto creciente hacia el vértice superior. Altura total: 41.4 m (para una nueva rasante situada a +42.5, frente a los +38 de la inicial)*
- *El tablero es mixto en el vano principal, con artesonado de #corten en cajones y vigas de piso, y de hormigón armado/pretensado en el vano corto, con moldes en #corten para los nervios prolongación de los cajones*

<6.3.2 EJEMPLO 2: modelado de un puente atirantado>

<6.3 ANÁLISIS COMPLETO DEL PUENTE>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

▪ **Puente sobre el Turia (I), entre Manises y Paterna.** Nuevamente, el análisis global de la estructura en servicio y en construcción (*retesado-desapeo*), así como el chequeo de su estabilidad, se desarrollaron con un modelo espacial de barras, procesado mediante SAP 2000. El tablero, formado por un emparrillado mixto con dos vigas cajón longitudinales y vigas de piso+cuchillos en voladizo para el vano principal, y una losa maciza de **HP** con espesor variable transversalmente en el vano menor, se asimiló a dos emparrillados consecutivos, de diferente topología para adaptarlos a la situación real de las vigas físicas (*tramo mixto*), a la *uniformidad* de la rigidez de losa (*tramo de HP*, en las figuras adjuntas no se visualizan los **NDF**) y a la posición de los anclajes de los tirantes. Estos últimos se procesaron con su módulo de elasticidad tangente, mientras que la flexión local del piso así como los ELU de rotura de torres y estribo de retenida se comprobaron con modelos específicos (*placa y bielas y tirantes respectivamente*). Adicionalmente, la estabilidad inicial de los anclajes de los tirantes en el tramo mixto se chequeó con modelos de **EF 2D** generados y procesados con ANSYS



<6.3.2 EJEMPLO 2: modelado de un puente atirantado>

<6.3 ANÁLISIS COMPLETO DEL PUENTE>

06 Análisis de sistemas complejos: puentes arco y puentes atirantados

► **Puente sobre el Turia (II).** Análisis local de los anclajes de tirantes: mallado, distribución de tensiones y análisis linealizado del pandeo mediante ANSYS

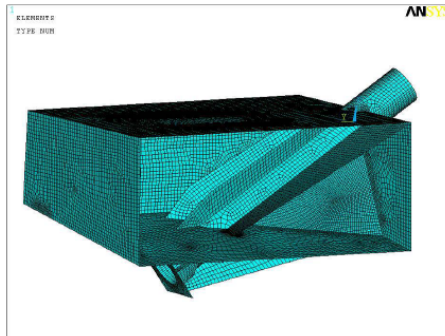


Fig. 4.2. Modelo de Elementos Finitos Anclaje 13

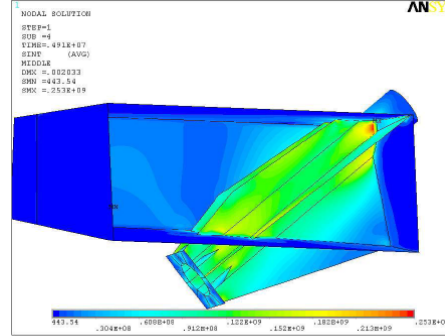


Fig. 3.6. Distribución de Intensidad de Tensión en Anclaje 12.

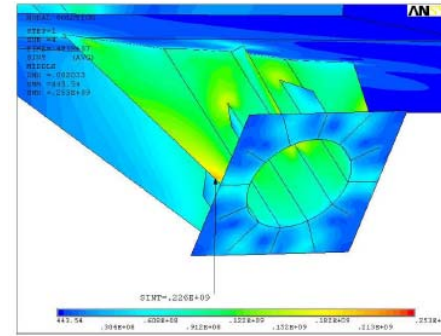


Fig. 3.7. Distribución de Intensidad de Tensión en Anclaje 12.

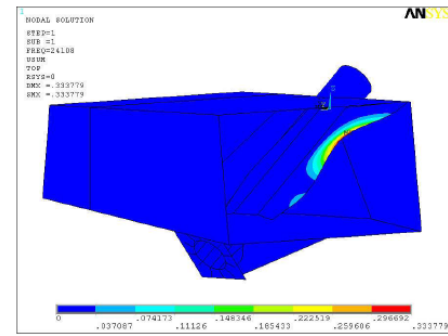


Fig. 3.3. Modo de Pandeo Lineal del Anclaje 12.

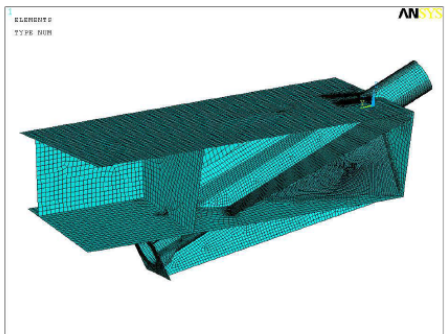


Fig. 5.2. Modelo de Elementos Finitos Anclaje 16

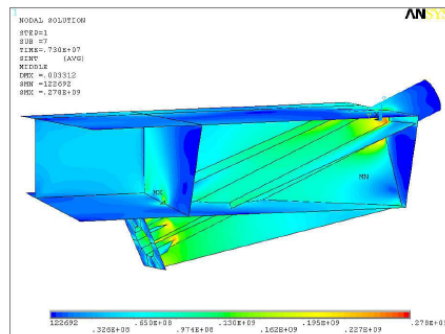


Fig. 5.6. Distribución de Intensidad de Tensión en Anclaje 16.

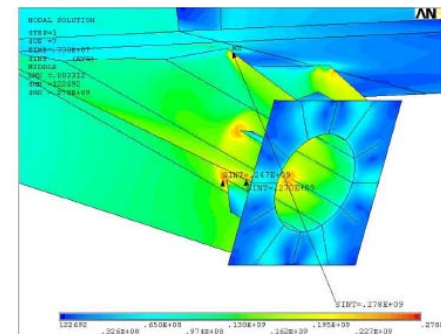


Fig. 5.8. Distribución de Intensidad de Tensión en Anclaje 16.

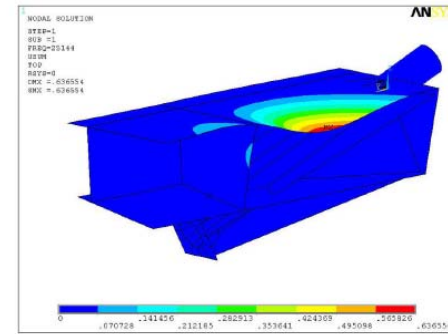


Fig. 5.3. Modo de Pandeo Lineal del Anclaje 16.

<6.3.2 EJEMPLO 2: modelado de un puente atirantado>

<6.3 ANÁLISIS COMPLETO DEL PUENTE>

- 7.1 Objeto y ámbito de aplicación**
- 7.2 Principios generales de proyecto**
- 7.3 Acciones permanentes**
- 7.4 Acciones variables (Q)**
- 7.5 Acciones accidentales (A)**
- 7.6 Bases para la combinación de acciones**
- 7.7 Criterios para la comprobación de estados límite de servicio**
- 7.8 Pruebas de carga**

07 Presentación de la IAP-11

- ❑ Esta Instrucción tiene por **objeto** la *determinación de las acciones, los coeficientes de ponderación y las combinaciones de acciones* que deben tenerse en cuenta en el *proyecto de puentes* y otras estructuras de la *red de carreteras del Estado (RCE)*. Además, se incluyen algunos *criterios funcionales* que deben cumplir los puentes, con independencia de los materiales que los constituyen.
- ❑ También será de aplicación esta Instrucción al proyecto de estructuras asimilables a los puentes (tales como falsos túneles, pontones o tajeas), a **pasarelas** para peatones, ciclistas o ciclomotores y a las **obras de acompañamiento**, como son las escaleras, rampas de acceso y muros.
- ❑ Asimismo, esta Instrucción podrá aplicarse en las comprobaciones correspondientes a la **evaluación, ampliación o refuerzo** de puentes existentes, con las especificaciones complementarias, o modificaciones de las prescripciones aquí recogidas, que la Dirección General de Carreteras (DGC) establezca específicamente para cada caso.
- ❑ Para el proyecto de **puentes de uso mixto**, que además de la carretera soporten por ejemplo tráfico ferroviario, se considerarán las acciones correspondientes a cada uso, de forma independiente o combinada, según resulte más desfavorable. En estos casos, se someterán siempre a la aprobación de la DGC, las acciones, coeficientes y combinaciones que el proyectista considere oportuno aplicar.
- ❑ El cumplimiento de esta Instrucción será condición necesaria para autorizar el paso de otras carreteras **sobre** las vías de la RCE.
- ❑ Esta Instrucción se aplicará de forma **complementaria** con el resto de la normativa vigente que tenga en su ámbito de aplicación los puentes y sus materiales constituyentes.

<7.1 OBJETO Y ÁMBITO DE APLICACIÓN>

07 Presentación de la IAP-11

2.1 REQUISITOS FUNDAMENTALES

2.2 VIDA ÚTIL

2.3 CRITERIOS DE COMPROBACIÓN

2.4 CLASIFICACIÓN DE LAS ACCIONES

07 Presentación de la IAP-11

2.1 REQUISITOS FUNDAMENTALES

Esta Instrucción ha sido redactada teniendo en cuenta los **requisitos fundamentales** siguientes:

- Una estructura debe ser proyectada y construida para que, con una probabilidad razonable, sea capaz de soportar todas las acciones que puedan solicitarla durante su **construcción y uso**, en el período de vida previsto, y de cumplir la función para la que ha sido construida con unos costes de conservación aceptables.
- Una estructura debe también ser concebida de manera que las consecuencias de acciones excepcionales, como sismos o impactos, no produzcan daños desproporcionados con la causa que los ha originado (**requisito de robustez**).

Para alcanzar los niveles de seguridad adoptados en esta instrucción, además de las prescripciones en ella establecidas, deberán cumplirse los principios siguientes:

- Los puentes serán proyectados por **ingenieros** con capacidad y experiencia suficientes
- La construcción será realizada por técnicos y operarios con los conocimientos y la experiencia necesarios
- Los materiales y productos utilizados cumplirán las prescripciones establecidas en los correspondientes reglamentos técnicos o, en su defecto, normas
- Existirán controles de calidad adecuados durante todo el proceso de proyecto y ejecución de la estructura
- La estructura estará destinada al uso para el que haya sido proyectada y construida
- La estructura será conservada adecuadamente

<7.2 PRINCIPIOS GENERALES DE PROYECTO>

07 Presentación de la IAP-11

2.2 VIDA ÚTIL

Se entiende por *vida útil* de una estructura el período de tiempo, a partir de la fecha en que finaliza su ejecución, durante el cual debe *cumplir la función para la que fue construida*, contando siempre con la conservación adecuada pero sin requerir operaciones significativas de rehabilitación. Para los puentes de carretera objeto de esta Instrucción, se establece una *vida útil de proyecto de cien (100) años*.

2.3 CRITERIOS DE COMPROBACIÓN

Las comprobaciones estructurales estarán basadas en la *teoría de los estados límite* y su verificación mediante el método de los coeficientes parciales de seguridad. En cada *situación de proyecto*, se comprobará que no se supera ninguno de los *estados límite* que proceda

2.3.1 SITUACIONES DE PROYECTO

Una *situación de proyecto* de una estructura es un conjunto de condiciones físicas que representan las circunstancias reales que pueden presentarse durante un cierto intervalo de tiempo para el cual en el proyecto se va a comprobar que no se superan los estados límite pertinente. Se considera que, durante este intervalo de tiempo, los factores que afectan a la seguridad estructural no varían.

Cada una de las situaciones posibles, y entre ellas especialmente las que se producen durante la construcción de la obra proyectada, deben ser objeto de *comprobaciones independientes*.

07 Presentación de la IAP-11

2.3.1 SITUACIONES DE PROYECTO *(continuación)*

Las situaciones de proyecto consideradas en esta Instrucción son:

- **Situaciones persistentes**, que corresponden a las **condiciones de uso normales** de la estructura durante su vida útil.
- **Situaciones transitorias**, que se producen cuando las condiciones de uso o estado de la estructura son **temporales** como, por ejemplo, durante su **construcción o reparación**, y para las que se considerará el correspondiente período de duración. A falta de estudios más detallados se podrá aceptar como tal un año
- **Situaciones accidentales**, que corresponden a condiciones excepcionales aplicables a la estructura como, por ejemplo, las provocadas por un **impacto** o por el **fallo** de algún elemento. Se consideran instantáneas (*salvo que dicho fallo pueda permanecer sin ser detectado*).
- **Situaciones sísmicas**, que corresponden a condiciones excepcionales aplicables a la estructura durante un evento sísmico. La situación sísmica se distingue del resto de situaciones accidentales debido a que en ella se establecen **diferentes niveles** de la magnitud de la acción en función de los requisitos de seguridad o de servicio.

07 Presentación de la IAP-11

2.3.2 ESTADOS LÍMITE

Se definen como **estados límite** aquellas condiciones para las que puede considerarse que, de ser superadas, la estructura no cumple alguno de los requisitos de proyecto.

2.3.2.1 Estados límite últimos (ELU)

Son aquellos que, si se sobrepasan, se produce el **agotamiento o colapso de la estructura** o de una parte de ella. A efectos de aplicación de esta Instrucción, en función del tipo de estructura, se deberán considerar los siguientes:

- **ELU de equilibrio (EQU)**, por pérdida de **estabilidad estática** de una parte o del conjunto de la estructura, considerada como sólido rígido (*resistencia de los materiales no determinada*).
- **ELU de rotura (STR)**, por agotamiento resistente o deformación plástica excesiva (*resistencia de los materiales determinada*).
- **ELU de fatiga (FAT)**, relacionado con los daños que pueda sufrir una estructura o cualquiera de sus elementos como consecuencia de sollicitaciones variables repetidas.

Los estados límite últimos de tipo **geotécnico**, cuya ocurrencia está controlada principalmente por las características del terreno, tales como **socavación**, **inestabilidad global** o **hundimiento** por falta de capacidad portante del terreno, entre otros, **no** son objeto de esta Instrucción.

07 Presentación de la IAP-11

2.3.2.2 Estados límite de servicio (ELS)

Son aquellos tales que, si se sobrepasan, la estructura dejará de cumplir el cometido para el que fue proyectada por razones **funcionales**, de **durabilidad**, o de **aspecto**, sin que ello suponga el colapso de la misma. A efectos de aplicación de esta Instrucción, en función del tipo de estructura, se deberán considerar los siguientes:

- **ELS de fisuración** que afecte a la durabilidad o estética del puente.
- **ELS de deformación** que afecte a la apariencia o funcionalidad de la obra, o que cause daño a elementos no estructurales.
- **ELS de vibraciones** que no sean aceptables para los usuarios o que puedan afectar a su funcionalidad o provocar daños en elementos no estructurales
- **ELS de plastificaciones** en zonas localizadas de la estructura que puedan provocar daños o deformaciones irreversibles.
- **ELS de deslizamiento** en uniones mediante tornillos de alta resistencia.

Los estados límite de servicio se pueden clasificar en **reversibles** o **irreversibles**. Los primeros son aquellos que dejan de ser superados cuando desaparece la acción que los provoca. Los estados límite de servicio irreversibles son aquellos que, una vez superados, se mantienen de forma permanente, incluso si se elimina la acción que los ha provocado.

07 Presentación de la IAP-11

2.3.3 VERIFICACIONES

2.3.3.1 Verificaciones en ELU

Para verificar el **ELU de equilibrio**, se debe satisfacer la condición siguiente:
siendo:

$$E_{d,dst} \leq E_{d,stab}$$

$E_{d,dst}$ valor de cálculo del efecto de las **acciones desestabilizadoras**

$E_{d,stab}$ valor de cálculo de las **acciones estabilizadoras**

Para verificar el resto de los **ELU**, salvo el de fatiga, se debe satisfacer la condición siguiente:
siendo:

$$E_d \leq R_d$$

E_d valor de cálculo del **efecto** de las acciones

R_d valor de cálculo de la **resistencia** correspondiente

La verificación del **ELU de fatiga** se efectuará de acuerdo con los criterios recogidos en la normativa específica de cada material estructural.
El valor de cálculo de las acciones se obtendrá de acuerdo con lo indicado en el **capítulo 6. Bases para la combinación de acciones**.

07 Presentación de la IAP-11

2.3.3.2 Verificaciones en ELS

Para verificar los **ELS**, se debe satisfacer la condición siguiente:

siendo:

$$E_d \leq C_d$$

E_d valor de cálculo del **efecto** de las acciones obtenido de acuerdo con lo indicado en el **capítulo 6**.

C_d valor **límite del efecto de las acciones** para el ELS considerado.

07 Presentación de la IAP-11

2.4 CLASIFICACIÓN DE LAS ACCIONES

Las acciones pueden clasificarse atendiendo a su **naturaleza** (*directas o indirectas*), a su **variación espacial** (*fijas o libres*), a la naturaleza de la **respuesta estructural** que producen (*estáticas o casi estáticas o bien acciones dinámicas*) o a su **variación en el tiempo**. A efectos de aplicación de esta Instrucción, se adopta la clasificación de las acciones atendiendo a su **variación en el tiempo**:

■ **Acciones permanentes de valor constante (G)**: **actúan en todo momento** y son constantes en posición y magnitud (*peso propio y cargas muertas*).

■ **Acciones permanentes de valor no constante (G*)**: **actúan en todo momento** pero varían en magnitud (*reología, pretensado, asientos*).

■ **Acciones variables (Q)**: son acciones externas a la estructura y **pueden actuar o no**, y, si lo hacen, pueden tener diferentes valores (*sobrecargas de uso, acciones climáticas*).

■ **Acciones accidentales (A)**: son acciones de **corta duración** cuya probabilidad de actuación durante la vida útil de la estructura es pequeña, pero cuyos efectos pueden ser considerables (*impactos de vehículos, sismos, avenidas de período de retorno importante*).

De acuerdo con esta clasificación, en los **capítulos 3 a 5**, se establecen los valores de las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera, que se tomarán como **valores característicos**.

El **valor característico de una acción**, que es su principal valor representativo, puede venir determinado por un valor medio, un valor nominal o, en el caso en que se fije mediante criterios estadísticos, por el correspondiente a una determinada probabilidad de no ser superado durante un período de referencia teniendo en cuenta la vida útil de la estructura y la duración de la situación de proyecto.

07 Presentación de la IAP-11

3.1 ACCIONES PERMANENTES DE VALOR CONSTANTE (G)

3.2 ACCIONES PERMANENTES DE VALOR NO CONSTANTE (G^*)

07 Presentación de la IAP-11

3.1 ACCIONES PERMANENTES DE VALOR CONSTANTE (G)

Las cargas permanentes son producidas por el peso de los distintos elementos que forman parte del puente. A efectos de esta Instrucción se clasifican en **peso propio** y **cargas muertas**.

3.1.1 PESO PROPIO

Esta acción corresponde al peso de los **elementos estructurales** y su **valor característico** podrá deducirse de la **Tabla 3.1-a**. Cuando el peso que resulte de las mediciones obtenidas a partir de los planos de proyecto sobrepase en más de un **5%** el valor estimado en las bases de cálculo del proyecto, deberán adaptarse dichos cálculos al peso que se deduce de lo representado en planos.

3.1.2 CARGAS MUERTAS

Son las debidas a los **elementos no estructurales** que gravitan sobre los estructurales, tales como:

- pavimento de la calzada y aceras
- elementos de contención (*barreras y barandillas*)
- dotaciones viales y de la propia estructura
- conductos de servicios, etc.

07 Presentación de la IAP-11

Salvo justificación expresa, se tomarán para los materiales de construcción más usuales los siguientes pesos específicos:

Fundición	72.5
Acero	78.5
Aluminio	27.0
Madera seca	6.0 a 9.0
Madera húmeda	10.5
Hormigón en masa	23.0 a 24.0
Hormigón armado y pretensado	25.0
Elementos de basalto, pórfidos y ofitas	31.0
Elementos de granito y caliza	30.0
Materiales granulares y rellenos (zahorras, gravas y arenas)	20.0
Pavimentos de mezcla bituminosa	23.0
Material elastomérico	15.0
Poliestireno expandido	0.3
Vidrio	25.0

Tabla 3.1-a

07 Presentación de la IAP-11

▪ **Pavimento de la calzada y aceras.** El **espesor máximo** del pavimento bituminosos **proyectado y construido** sobre tableros de puentes, incluida la preceptiva capa de impermeabilización y la eventual capa de regularización, no será en ningún caso superior a **10 cm**, salvo aprobación expresa de la DGC.

No obstante, a efectos de cálculo, para la acción debida al pavimento se deberán considerar dos valores extremos:

- (1) Valor inferior $\{G_{k,inf}\}$, determinado con los espesores teóricos definidos en el proyecto.
- (2) Valor superior $\{G_{k,sup}\}$, obtenido incrementando un **50%** los espesores teóricos definidos en el proyecto.

Este valor **no permite**, en modo alguno, **la rehabilitación del pavimento por extensión de nuevas capas**. Por tanto, el proyecto no sólo definirá con suficiente precisión la tipología de la impermeabilización y de los pavimentos, estudiando con detalle la funcionalidad de estos últimos compatible con la deformabilidad del tablero y su conservación a medio y largo plazo, sino que también, a efectos de la correcta explotación y conservación del puente, incluirá criterios sobre la rehabilitación de los pavimentos en lo referente a espesores, deformabilidad, características, y cualquier otro aspecto técnico que el proyectista considere importante para la seguridad o funcionalidad de la estructura.

El valor que se considere para el peso del pavimento, $G_{k,inf}$ o $G_{k,sup}$, **será el mismo para toda la estructura**.

07 Presentación de la IAP-11

▪ **Conductos de servicios.** Para el peso propio de tuberías y otros servicios soportados por el puente, se tomarán también dos valores extremos, $G_{k,inf}$ y $G_{k,sup}$, considerándose una desviación respecto a su valor medio de $\pm 20\%$.

El peso del agua contenida en una canalización soportada por un puente se tomará en principio como carga muerta y se considerarán los pesos de las canalizaciones tanto vacías como llenas.

▪ **Rellenos.** El peso de los rellenos sobre elementos estructurales (*losas, dinteles, zapatas, etc.*) se considerarán también como carga muerta. Este peso se determinará aplicando al volumen de terreno que gravite sobre la superficie del elemento horizontal, el peso específico del relleno vertido y compactado. Si no se dispusiera de datos reales de este peso específico, se podrán adoptar los definidos en la **Tabla 3.1-a** para materiales granulares y rellenos.

07 Presentación de la IAP-11

3.2 ACCIONES PERMANENTES DE VALOR NO CONSTANTE (G^*)

3.2.1 PRESOLICITACIONES

En el término *presolicitaciones*, se considerarán incluidas todas las formas posibles de *introducir esfuerzos* en una estructura antes de su puesta en servicio, *con el fin de mejorar su respuesta* frente al conjunto de solicitaciones a las que posteriormente se verá sometida.

3.2.1.1 Pretensado

A efectos de aplicación de esta Instrucción se considerarán dos tipo de acción del pretensado:

- a) *Tipo P_1* : es la inducida por elementos colocados dentro del contorno de la sección estructural de hormigón (*pretensado interior*), o fuera de la sección pero *dentro del canto de la estructura* (*pretensado exterior*). A todos los efectos se considerará y tratará de acuerdo con lo especificado en la vigente **Instrucción de hormigón estructural (EHE-08)** o normativa que la sustituya.
- b) *Tipo P_2* : es la inducida a través de *elementos diferenciados en el esquema estructural* (*tirantes, péndolas, pretensado exterior fuera del canto*, etc.).

Las acciones del *tipo P_2* varían en función de la magnitud de las cargas permanentes de valor constante, por lo que deben ser consideradas ambas conjuntamente y no de forma independiente.

07 Presentación de la IAP-11

El **pretensado extradadosado** es un tipo de presolicitación que se encuentra entre los pretensados **tipo P_1 y P_2** aquí definidos. Su semejanza a uno de los dos depende de la rigidez de la estructura y de su esquema estructural. En función de estas características, el proyectista justificará en el proyecto el tratamiento adoptado para el pretensado extradadosado.

3.2.1.2 Otras presolicitaciones

En este apartado se incluirán las **presolicitaciones** introducidas por medio de **gatos**, por bloqueo provisional de coacciones, por **desplazamientos impuestos en los apoyos** de la estructura, etc.

La **presolicitación** se aplicará con el valor definido en proyecto, en el instante previsto y sobre la estructura parcial o total correspondiente.

Al igual que las presolicitaciones debidas al **pretensado**, su valor varía con el tiempo, siendo su efecto especialmente sensible a deformaciones diferidas de la estructura producidas por fluencia y retracción. Por tanto, deberá determinarse su valor para cada situación de proyecto y deberá considerarse adecuadamente su reducción.

3.2.2 ACCIONES REOLÓGICAS

El valor característico de las **acciones reológicas** se obtendrá a partir de las **deformaciones** provocadas por la **retracción** y la **fluencia**, determinadas en el instante **t** en que se evalúen, de acuerdo con lo que especifique sobre el particular en la vigente **Instrucción de hormigón estructural (EHE-08)** o normativa que la sustituya.

07 Presentación de la IAP-11

3.2.3 EMPUJE DEL TERRENO

El empuje del terreno, natural o de relleno, sobre elementos de la estructura (*muros, aletas, etc.*) se determinará en función de las características del terreno y de otras consideraciones geotécnicas.

Cuando la actuación del empuje sea *desfavorable* para el elemento y efecto estudiado, su valor nunca será inferior al empuje hidrostático de un fluido de peso específico igual a **5 kN/m³**.

Cuando existan *incertidumbres* sobre la actuación efectiva del empuje de tierras y su acción sea *favorable* para el elemento y efecto en estudio, **no se considerará su actuación**.

3.2.4 ASIENTOS DEL TERRENO DE CIMENTACIÓN

Los valores de los asientos se obtendrán a partir de los datos del *preceptivo estudio geotécnico*, de la tipología y geometría de la cimentación y de las cargas transmitidas por esta.

Además, se determinará su *evolución en el tiempo*. Cuando la estructura pase por fases de construcción isostáticas de una duración significativa, se estimará qué parte del asiento total puede desarrollarse en esas fases.

07 Presentación de la IAP-11

3.2.5 ROZAMIENTO DE APOYOS DESLIZANTES

Cuando en un puente se dispongan *aparatos de apoyo deslizantes*, será necesario considerar la **fuerza de reacción** que el rozamiento del apoyo deslizante ejerce sobre ambas partes de la estructura.

A falta de estudios más precisos, los coeficientes de rozamiento μ_a y μ_r se considerarán según se indica a continuación:

$$\mu_a = 0.5\mu_{max}(1 + \alpha)$$

$$\mu_r = 0.5\mu_{max}(1 - \alpha)$$

donde:

μ_a coeficiente de rozamiento **adverso**

μ_r coeficiente de rozamiento **favorable**

μ_{max} **máximo** coeficiente de rozamiento del aparato de apoyo (según UNE-EN 1337-2). Para apoyos deslizantes con PTFE, se considerará un coeficiente de rozamiento máximo del 3%, independientemente de la presión a la que esté sometido el apoyo.

α factor que depende del número parcial de apoyos (**n**) que ejercen bien una coacción favorable o bien una coacción desfavorable para el elemento en estudio. A falta de estudios más precisos, se puede determinar de acuerdo con la **Tabla 3.2-a**. Este factor adoptará generalmente valores distintos según se esté calculando μ_a o μ_r

07 Presentación de la IAP-11

n	α
≤ 4	1
$4 < n < 10$	$\frac{16 - n}{12}$
≥ 10	0.5

Tabla 3.2-a

En general, el **rozamiento** producido en *fase de construcción* por procesos de *empuje*, *lanzamiento*, *ripado*, etc. sobre *apoyos deslizantes provisionales*, suele ser **mayor** que el producido por los aparatos de apoyo deslizantes definitivos. Por este motivo, el proyectista deberá justificar el valor adoptado para los coeficientes de rozamiento adverso y favorable en las *comprobaciones del proceso constructivo*, estableciendo además en los planos y pliego de prescripciones del proyecto las medidas oportunas para el control de las fuerzas de rozamiento generadas.

07 Presentación de la IAP-11

4.1 SOBRECARGA DE USO

4.2 VIENTO

4.3 ACCIÓN TÉRMICA

4.4 NIEVE

4.5 OTRAS ACCIONES VARIABLES

07 Presentación de la IAP-11

4.1 SOBRECARGA DE USO

El *modelo de carga* definido en este apartado para representar la *acción del tráfico rodado* ha sido calibrado para puentes de **longitudes cargadas** hasta **200 m** (UNE-EN 1991-2). En general, la consideración de este modelo cuando la carga se extiende a una longitud superior estará del lado de la seguridad. Para longitudes cargadas superiores a 200 m, el proyectista podrá adoptar valores o expresiones distintos de los aquí indicados, previa autorización de la DGC, siempre que los justifique adecuadamente sobre las mismas bases teóricas que el modelo aquí establecido.

En todas las cargas definidas en este apartado, que se suponen *aplicadas estáticamente*, está *incluido* el correspondiente *factor de amplificación* que tiene en cuenta el carácter dinámico de las mismas.

4.1.1 DIVISIÓN DE LA PLATAFORMA EN CARRILES VIRTUALES

A efectos de la aplicación de esta Instrucción, se define como *plataforma* del tablero de un puente de carretera a la *superficie apta para el tráfico rodado* (incluyendo, por tanto, todos los carriles de circulación, arcenes, bandas de rodadura y marcas viales) situada a nivel de calzada y comprendida entre bordillos de las aceras laterales del tablero —*si estas existen*— cuando tengan más de **150 mm** de altura, o entre caras interiores de los pretiles del tablero, para el resto de los casos.

A efectos de aplicación de la componente vertical de la sobrecarga de uso sobre el tablero del puente, la plataforma, de ancho w , se dividirá en n_1 carriles virtuales, de anchura w_1 cada uno, con el criterio que se define en la **Tabla 4.1-a**.

07 Presentación de la IAP-11

ANCHURA DE LA PLATAFORMA (w)	NÚMERO DE CARRILES VIRTUALES (n_1)	ANCHURA DEL CARRIL VIRTUAL (w_1)	ANCHURA REMANENTE
$w < 5.4$ m	$n_1 = 1$	3 m	$w - 3$ m
$5.4 \text{ m} \leq w < 6$ m	$n_1 = 2$	$w/2$	0
$w \geq 6$ m	$n_1 = \text{ent}(w/3)$	3 m	$w - 3n_1$

Tabla 4.1-a

En el caso de que la *plataforma* esté *dividida* en dos o más partes separadas por una *mediana*:

- Si en la mediana se dispone una *barrera fija e infranqueable*, cada parte de la plataforma (incluidos arcenes, marcas viales, etc.) se dividirá de forma independiente en carriles virtuales.
- Si en la mediana se dispone un *elemento móvil o rebasable*, se tratará toda la plataforma del puente, incluida la mediana, como un único elemento.

07 Presentación de la IAP-11

La *ubicación y numeración de cada carril virtual* se determinará conforme a los criterios que se exponen a continuación:

▪ *Para la comprobación de cada estado límite*, se considerarán cargados los carriles que sean desfavorables para el efecto en estudio. El carril que genere el **efecto más desfavorable** se denominará **carril 1**, el segundo más desfavorable se denominará **carril 2**, y así sucesivamente (**Figura 4.1-a**).

▪ *Se empleará una única numeración de carriles para todo el tablero*, aunque la plataforma soporte dos o más calzadas separadas por barreras fijas y no rebasables. Así pues, para el cálculo del tablero **sólo habrá un carril 1, un carril 2**, etc.

▪ *Cuando existan varias calzadas soportadas por tableros separados*, cada uno de ellos tendrá una **numeración de carriles independiente**, a efectos de las comprobaciones de los estados límite del tablero así como de la subestructura, si esta es independiente para cada tablero. Si dichos tableros están soportados por la **misma subestructura**, pilas y estribos, a efectos del cálculo de esos elementos, se considerará una **numeración única para el conjunto de tableros**.

07 Presentación de la IAP-11

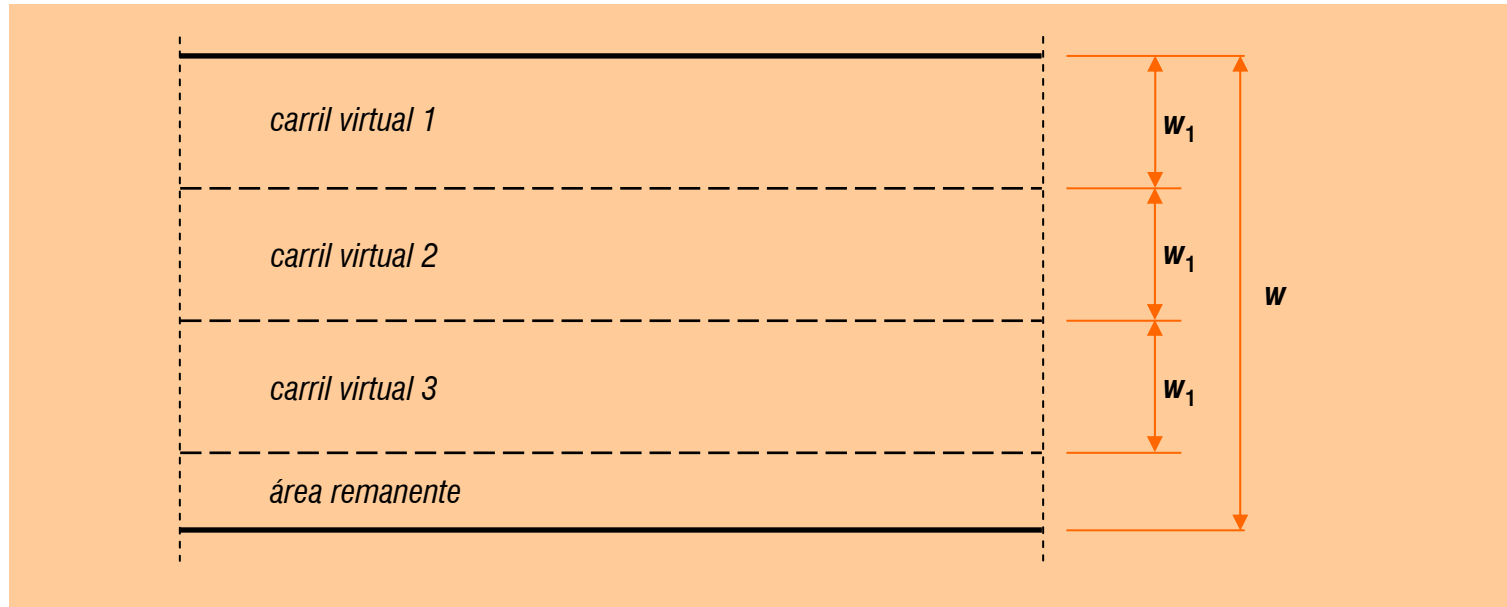


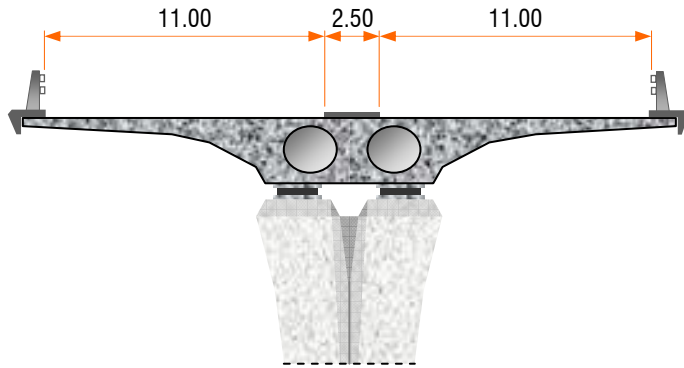
Figura 4.1-a

- Al *carril virtual 1* también se le llama **vía pesada**. Esta denominación quedará justificada en el epígrafe siguiente.

<7.4.1.1 Ejemplo genérico de distribución de carriles virtuales>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

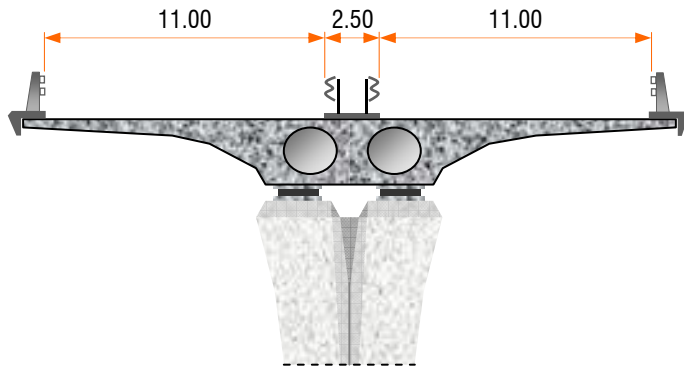
07 Presentación de la IAP-11



Tablero de autopista de dos carriles en cada sentido

Mediana rebasable (o móvil): plataforma única que incluye la mediana

- $w=24.50$ m, $n_1=8$ carriles virtuales
- ancho remanente de 0.50 m



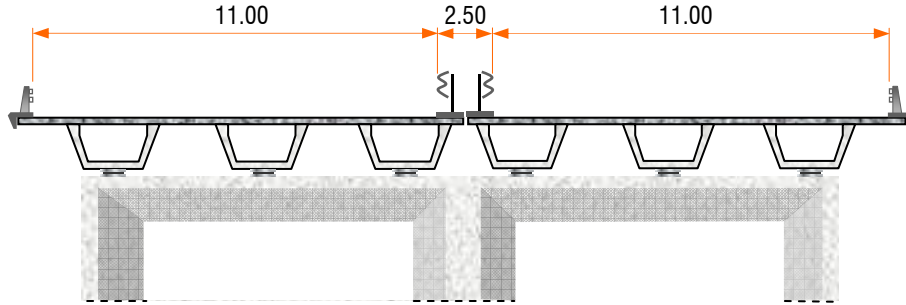
Mediana con barrera fija e infranqueable: plataforma dividida en dos calzadas

- $w=2 \times 11$ m, $n_1=3$ carriles virtuales por calzada
- ancho remanente de 2 m por calzada
- TOTAL: 6 carriles virtuales y ancho remanente de 4 m, pero **una única vía pesada**

<7.4.1.1 División de la plataforma en carriles virtuales: **casuística**>

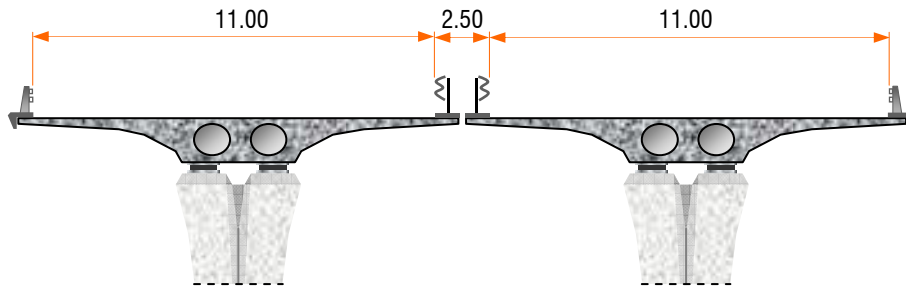
<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11



Dos tableros de autopista independientes de dos carriles cada uno **soportados por las mismas pilas**

- $w=2 \times 11$ m, $n_1=3$ carriles por tablero
- ancho remanente de 2 m por tablero
- Numeración separada para el cálculo de cada tablero, **una vía pesada por tablero**
- Numeración única para el cálculo de los aparatos de apoyo y la subestructura, **una vía pesada para los dos tableros**



Dos tableros de autopista independientes de dos carriles cada uno **soportados por pilas independientes**

- Se trata de dos estructuras separadas. Todos los cálculos se realizan con **una vía pesada por tablero**

<7.4.1.1 División de la plataforma en carriles virtuales: **casuística**>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

4.1.2 CARGAS VERTICALES

4.1.2.1 Cargas verticales debidas al tráfico de vehículos

Se considera la *acción simultánea* de las cargas siguientes:

a) Uno o más *vehículos pesados*, según el número de carriles virtuales. Cada vehículo pesado estará constituido por *dos ejes*, siendo Q_{ik} la carga de cada eje, indicada en la **Tabla 4.1-b**, correspondiente al carril i .

Se tendrá en cuenta los siguientes criterios:

- En cada carril virtual se considerará la actuación de un único vehículo pesado de peso $2Q_{ik}$.
- La *separación transversal* entre ruedas del mismo eje será de **2.00 m**. La *distancia longitudinal* entre ejes será de **1.20 m** (ver **Figura 4.1-b**)
- Las dos ruedas de cada eje tendrán la misma carga, que será por tanto igual a $0.5Q_{ik}$.
- A efectos de las *comprobaciones generales*, se supondrá que cada vehículo pesado actúa *centrado* en el carril virtual (ver **Figura 4.1-b**)

07 Presentación de la IAP-11

- Para las **comprobaciones locales**, cada vehículo pesado se situará, transversalmente dentro de cada carril, en la posición más desfavorable. Cuando se consideren dos vehículos pesados en carriles virtuales adyacentes, podrán aproximarse transversalmente, manteniendo una distancia entre ruedas mayor o igual que **0.50 m** (ver **Figura 4.1-c**).
- Para las **comprobaciones locales**, la carga puntual de cada rueda de un vehículo pesado se supondrá **repartida** sobre una superficie de contacto cuadrada de **0.4 m×0.4 m** (ver **Figura 4.1-c**). Se considerará que esta carga se reparte con una pendiente **1:1** (H:V), tanto a través del pavimento como a través de la losa del tablero, hasta el centro de dicha losa.

b) Una **sobrecarga uniforme** de valor q_{ik} según la **Tabla 4.1-b**, con las consideraciones siguientes:

- En el **área remanente**, se considerará la actuación de una sobrecarga uniforme de valor q_{rk} según la **Tabla 4.1-b**.
- La sobrecarga uniforme se extenderá, longitudinal y transversalmente, a todas las zonas donde su efecto resulte desfavorable para el elemento en estudio, incluso en aquellas ya ocupadas por algún vehículo pesado.

07 Presentación de la IAP-11

SITUACIÓN	VEHÍCULO PESADO $2Q_{ik}$ [kN]	SOBRECARGA UNIFORME q_{ik} (o q_{rk}) [kN]
CARRIL VIRTUAL 1	2×300	9.0
CARRIL VIRTUAL 2	2×200	2.5
CARRIL VIRTUAL 3	2×100	2.5
Otros carriles virtuales	0	2.5
Área remanente (q_{rk})	0	2.5

Tabla 4.1-b

07 Presentación de la IAP-11

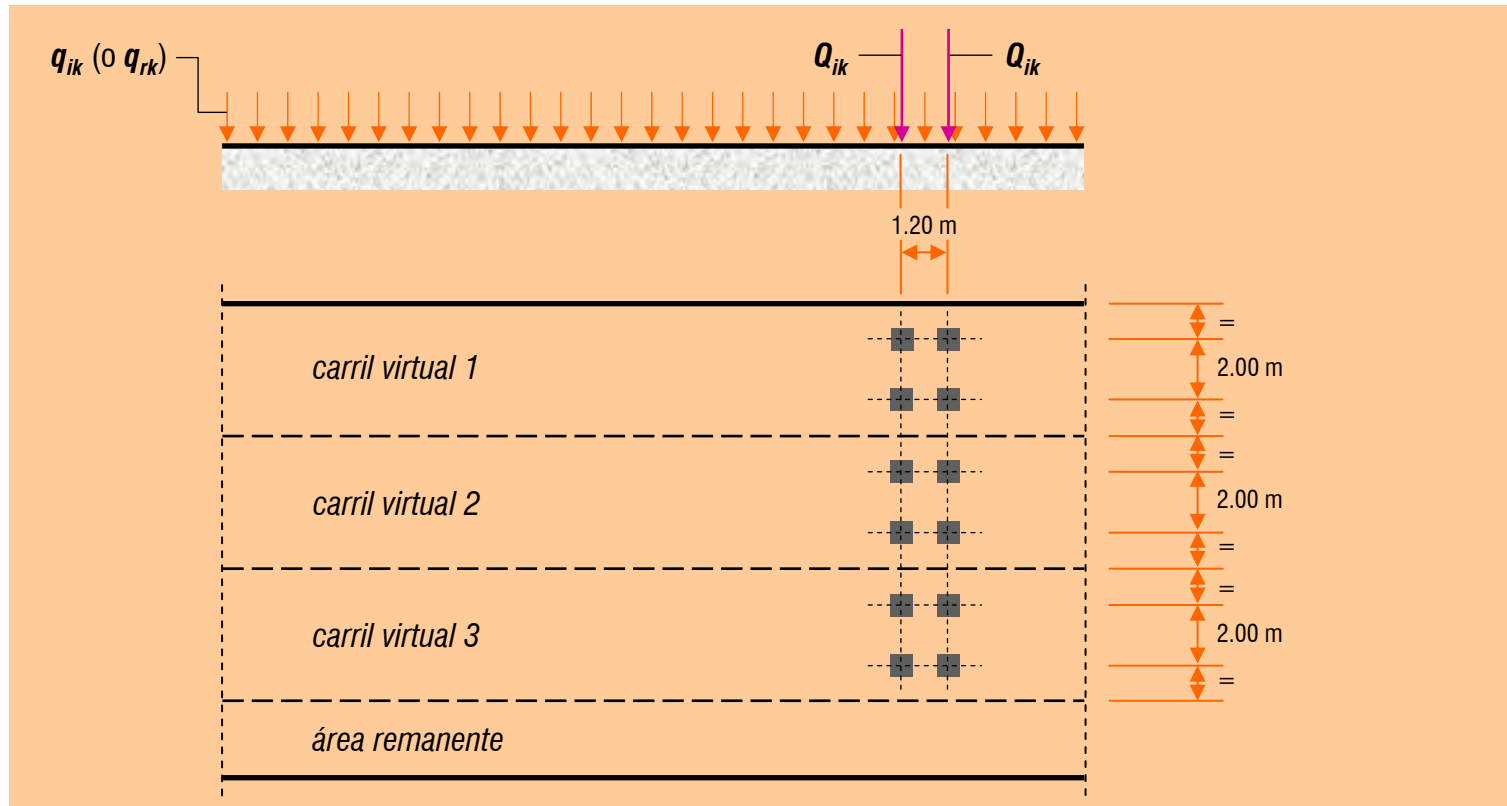
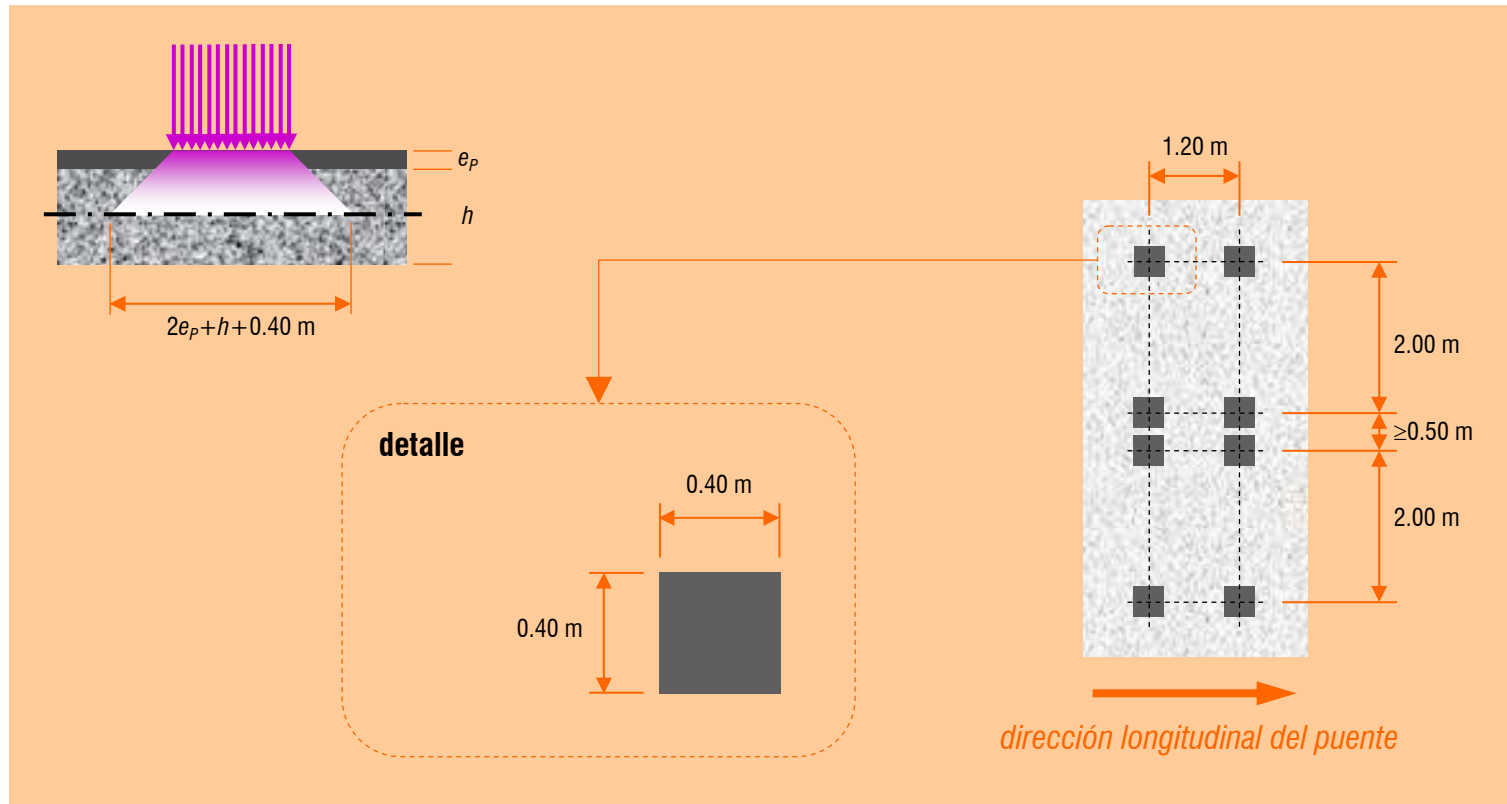


Figura 4.1-b

<7.4.1.2.1 Distribución de vehículos pesados y sobrecarga uniforme>

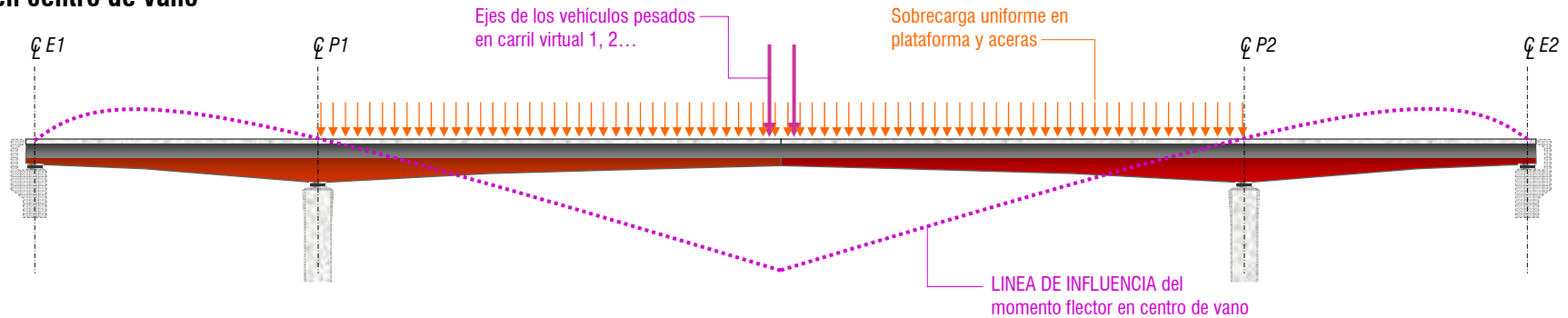
<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11**Figura 4.1-c****<7.4.1.2.1 Disposición de vehículos pesados para comprobaciones locales>****<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>**

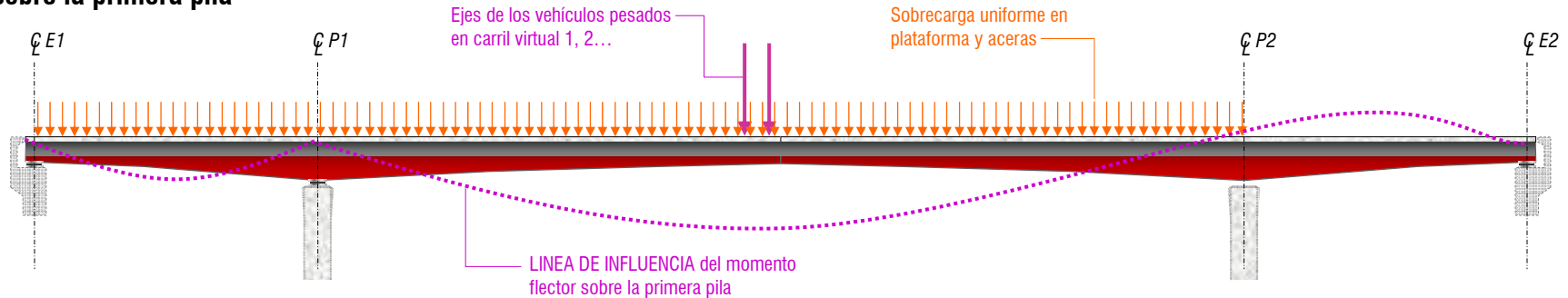
07 Presentación de la IAP-11

1 FLEXIÓN LONGITUDINAL

en centro de vano



sobre la primera pila



<7.4.1.2.1 Ejemplos de disposición del modelo de cargas verticales debidas al tráfico de vehículos>

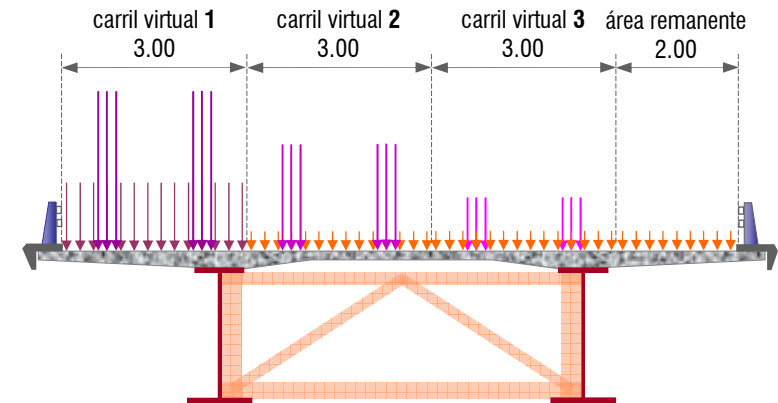
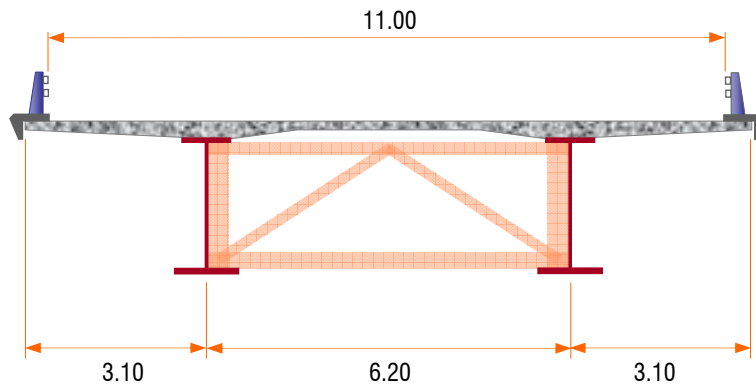
<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

1 FLEXIÓN LONGITUDINAL

disposición en sección transversal

La disposición de carriles virtuales adoptada permite analizar la **flexión del tablero**, asociada a la máxima torsión concomitante, y es por lo tanto adecuada para la **flexión de la 1ª viga**.



▪ Disposición de vehículos pesados y sobrecarga uniforme para la sección de centro de vano (*máxima flexión positiva del tablero*) y en la sección de apoyo en pila 1 (*máxima flexión negativa del tablero*)

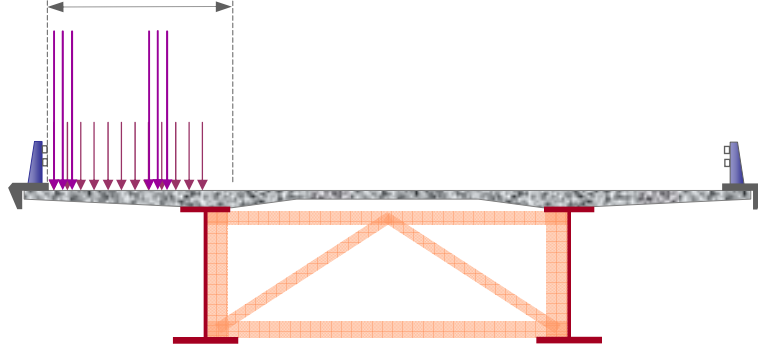
<7.4.1.2.1 Ejemplos de disposición del modelo de cargas verticales debidas al tráfico de vehículos>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

2 FLEXIÓN TRANSVERSAL sobre la viga longitudinal

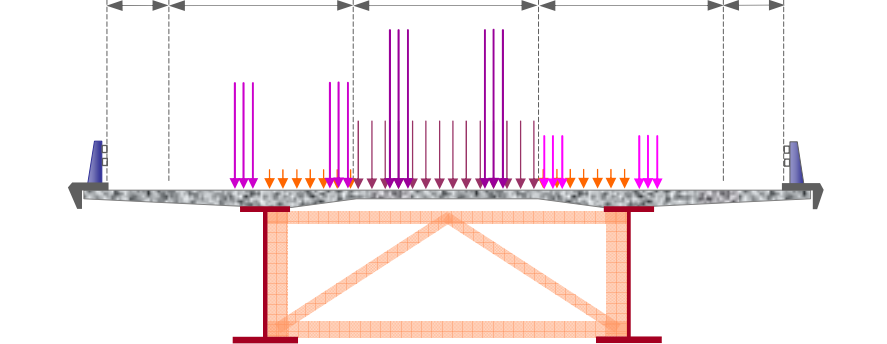
carril virtual 1 parcialmente cargado
3.00



- Posible disposición de vehículo pesado y sobrecarga uniforme para la máxima flexión transversal de la losa sobre viga longitudinal. En realidad, la distribución más desfavorable de esta última requiere el conocimiento de la superficie de influencia correspondiente.

2 FLEXIÓN TRANSVERSAL en el centro de la losa, primera configuración

área remanente 1.00 carril virtual 2 3.00 carril virtual 1 3.00 carril virtual 3 3.00 área remanente 1.00



- En esta primera configuración del modelo de cargas verticales, para la flexión en el centro de la losa, se ha centrado el carril 1, mientras que los vehículos pesados de los carriles 2 y 3 se han descentrado al máximo y la sobrecarga uniforme se ha extendido a las zonas desfavorables (*a estima*).

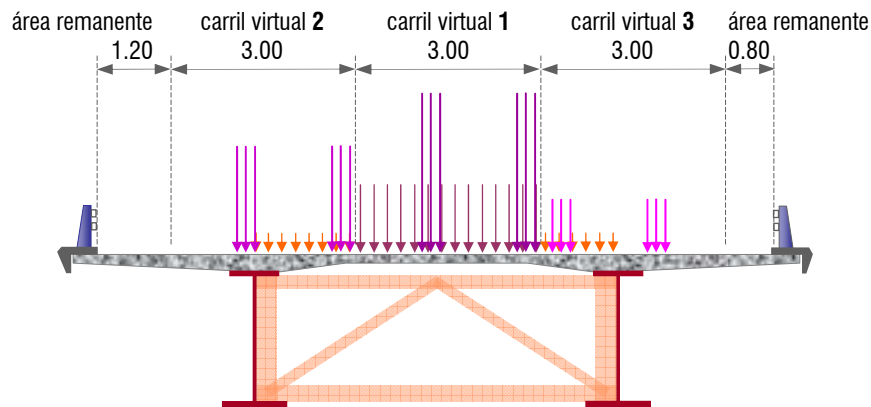
<7.4.1.2.1 Ejemplos de disposición del modelo de cargas verticales debidas al tráfico de vehículos>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

2 FLEXIÓN TRANSVERSAL

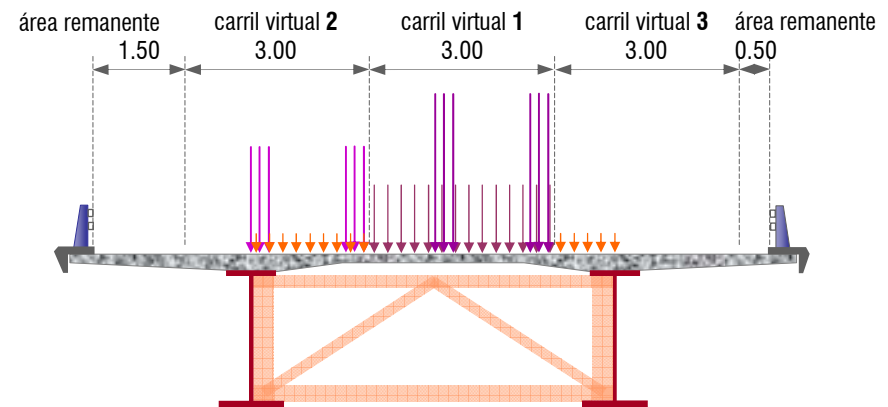
en el centro de la losa, segunda configuración



- Con la segunda configuración, se busca maximizar el efecto del carril 1 dándole una leve excentricidad respecto al eje de la losa, que permita incrementar la acción del vehículo pesado, sin que el efecto de la sobrecarga uniforme se vea excesivamente reducido.

2 FLEXIÓN TRANSVERSAL

en el centro de la losa, tercera configuración



- Para la tercera configuración del modelo de cargas verticales, se ha colocado el vehículo pesado del carril 1 en la posición más desfavorable, después se ha situado el carril 1 y a continuación los carriles restantes. Se ha prescindido del vehículo pesado del carril 3, de efecto favorable.

<7.4.1.2.1 Ejemplos de disposición del modelo de cargas verticales debidas al tráfico de vehículos>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

4.1.2.2 Cargas verticales en zonas de uso peatonal

En las **zonas de uso peatonal** de los puentes (*aceras, rampas y escaleras*), se supondrá aplicada una sobrecarga uniforme de **5 kN/m²** en las zonas más desfavorables, longitudinal y transversalmente, para el efecto en estudio.

En **puentes** en los que sean de prever **aglomeraciones de personas**, se considerará la actuación de la sobrecarga uniforme de **5 kN/m²** en lugar de las cargas verticales debidas al tráfico de vehículos definidas en el **apartado 4.1.2.1** anterior, para aquellos **casos en que sea más desfavorable** para el elemento en estudio. Esta carga, prevista a efectos de comprobaciones generales, estará asociada únicamente a situaciones de cálculo transitorias.

4.1.3 CARGAS HORIZONTALES

4.1.3.1 Frenado y arranque

El **frenado y arranque** o cambio de velocidad de los vehículos, dará lugar a una **fuerza horizontal uniformemente distribuida** en la dirección longitudinal de la carretera soportada por el puente, y se supondrá aplicada al nivel de la superficie del pavimento.

En el caso de que la vía disponga de carriles de sentidos opuestos de circulación, se considerará como de sentido único si esta hipótesis resulta más desfavorable.

07 Presentación de la IAP-11

El valor característico de esta acción Q_{Ik} será igual a una fracción del valor de la carga característica vertical que se considere actuando sobre el *carril virtual número 1*, de acuerdo con la expresión:

$$Q_{Ik} = 0.6 \times 2Q_{1k} + 0.1q_{1k}w_1L$$

Siendo L la distancia entre juntas contiguas, o longitud del puente si estas no existieran, y el significado de las demás variables el definido en el apartado anterior.

Para el caso de carril virtual de **3 m** de anchura, esta expresión queda como sigue:

$$Q_{Ik} = 360 + 2.7L$$

El valor de Q_{Ik} estará limitado superior e inferiormente según lo indicado a continuación:

$$180 \text{ kN} \leq Q_{Ik} \leq 900 \text{ kN}$$

07 Presentación de la IAP-11

4.1.3.2 Fuerza centrífuga y otras fuerzas transversales

En puentes de planta curva, los vehículos generan una fuerza transversal centrífuga Q_{tk} de valor:

$$\begin{aligned} Q_{tk} &= 0.2Q_v & \text{si } r < 200 \text{ m} \\ Q_{tk} &= 40 \frac{Q_v}{r} & \text{si } 200 \text{ m} \leq r \leq 1500 \text{ m} \\ Q_{tk} &= 0 & \text{si } r > 1500 \text{ m} \end{aligned}$$

siendo:

$$Q_v = \sum 2Q_{ik} \quad \text{peso total de los vehículos pesados [kN], según 4.1.2.1}$$

r radio del eje del tablero en planta [m]

■ La fuerza Q_{tk} así definida se considerará como una **fuerza puntual**, en la superficie del pavimento, que actúa horizontalmente en dirección perpendicular al eje del tablero y **en cualquier sección transversal** del mismo.

■ Además, en puentes curvos de radio menor de 1500 m, se tendrá en cuenta el efecto del derrape durante el frenado mediante una fuerza transversal Q_{trk} , en la superficie del pavimento, igual al **25%** de la fuerza de frenado o arranque Q_{lk} , definida en el **apartado 4.1.3.1**, que actúa simultáneamente con ella.

07 Presentación de la IAP-11

4.1.4 GRUPOS DE CARGAS DE TRÁFICO

La *concomitancia* de las *distintas componentes de la sobrecarga de uso*, definidas en los apartados anteriores, se tendrá en cuenta mediante la consideración de los *grupos de cargas de tráfico* indicadas en la **Tabla 4.1-c**.

Los valores de las acciones que figuran en los **apartados 4.1.2 y 4.1.3** son valores característicos de esas acciones *consideradas individualmente*. Cuando dichas acciones entran a *formar parte de un grupo* de cargas de tráfico, lo hacen con los valores que se recogen en la **Tabla 4.1-c**.

Se considera que *estos grupos*, que son *excluyentes* entre sí, *definen el valor característico de la sobrecarga de uso* cuando se combina con el resto de las acciones (*cargas permanentes, viento, etc.*).

Se considerará la combinación de cada uno de los grupos de cargas con el resto de las acciones cuando sean pertinentes para el efecto en estudio.

07 Presentación de la IAP-11

GRUPO DE CARGAS ⁽¹⁾	CARGAS VERTICALES		PLATAFORMA			ACERAS
	vehículos pesados	sobrecarga uniforme	aglomeración de personas	FUERZAS HORIZONTALES frenado y arranque	fuerza centrífuga y transversal	CARGAS VERTICALES
gr 1 Cargas verticales	Valor caracter. 4.1.2.1	Valor caracter. 4.1.2.1	-	-	-	Valor reducido: 2.5 kN/m²
gr 2 Fuerzas Horizontales	Valor reducido ⁽²⁾ $\psi_1 Q_{ik}$	Valor reducido ⁽²⁾ $\psi_1 q_{ik}$	-	Valor caracter. 4.1.3.1	Valor caracter. 4.1.3.2	-
gr 3 Peatones	-	-	-	-	-	Valor caracter. 4.1.2.2
gr 4 Aglomeraciones	-	-	Valor caracter. 4.1.2.2	-	-	Valor caracter. 4.1.2.2

(1) La denominación de los grupos de carga hace referencia a la componente dominante del grupo

Tabla 4.1-c

(2) Se define como valor reducido el que corresponde al valor frecuente que figura en la **Tabla 6.1-a**, es decir:

$\psi_1 = 0.75$ para los vehículos pesados

$\psi_1 = 0.40$ para la sobrecarga uniforme

07 Presentación de la IAP-11

4.1.5 TREN DE CARGAS PARA FATIGA

Para la comprobación del *estado límite último de fatiga* se considerarán las acciones variables producidas por la *acción del tráfico* que se prevé que actúen a lo largo de la vida útil del puente.

El efecto de estas *cargas repetidas* puede ser *representado* por el *modelo de cargas para fatiga* consistente en un vehículo de *4 ejes*, de *dos ruedas cada eje*, que se representa en la *Figura 4.1-d*. La carga en *cada eje* será de **120 kN** y la superficie de contacto de *cada rueda* se tomará igual a un cuadrado de **0.40×0.40 m**. La separación entre ejes y entre las ruedas de un mismo eje será la que se indica en la *Figura 4.1-d*. A efectos de comprobación a fatiga no se considerará ninguna carga horizontal.

Para el cálculo de las tensiones máximas y mínimas que se produce el modelo de cargas de fatiga se considera la actuación de *un solo vehículo* como el definido en el párrafo anterior. Este vehículo se supondrá *centrado* en el *carril virtual 1* (el más desfavorable para el efecto estudiado).

El modelo de cargas definido *incluye el coeficiente de impacto* correspondiente a una *superficie de rodadura* de *buena calidad* (según ISO 8608). Para la comprobación de aquellos *elementos estructurales* que estén a una *distancia* menor de **6 m** de una *junta de calzada* se tomará un *factor de amplificación dinámico* adicional de **1.3**.

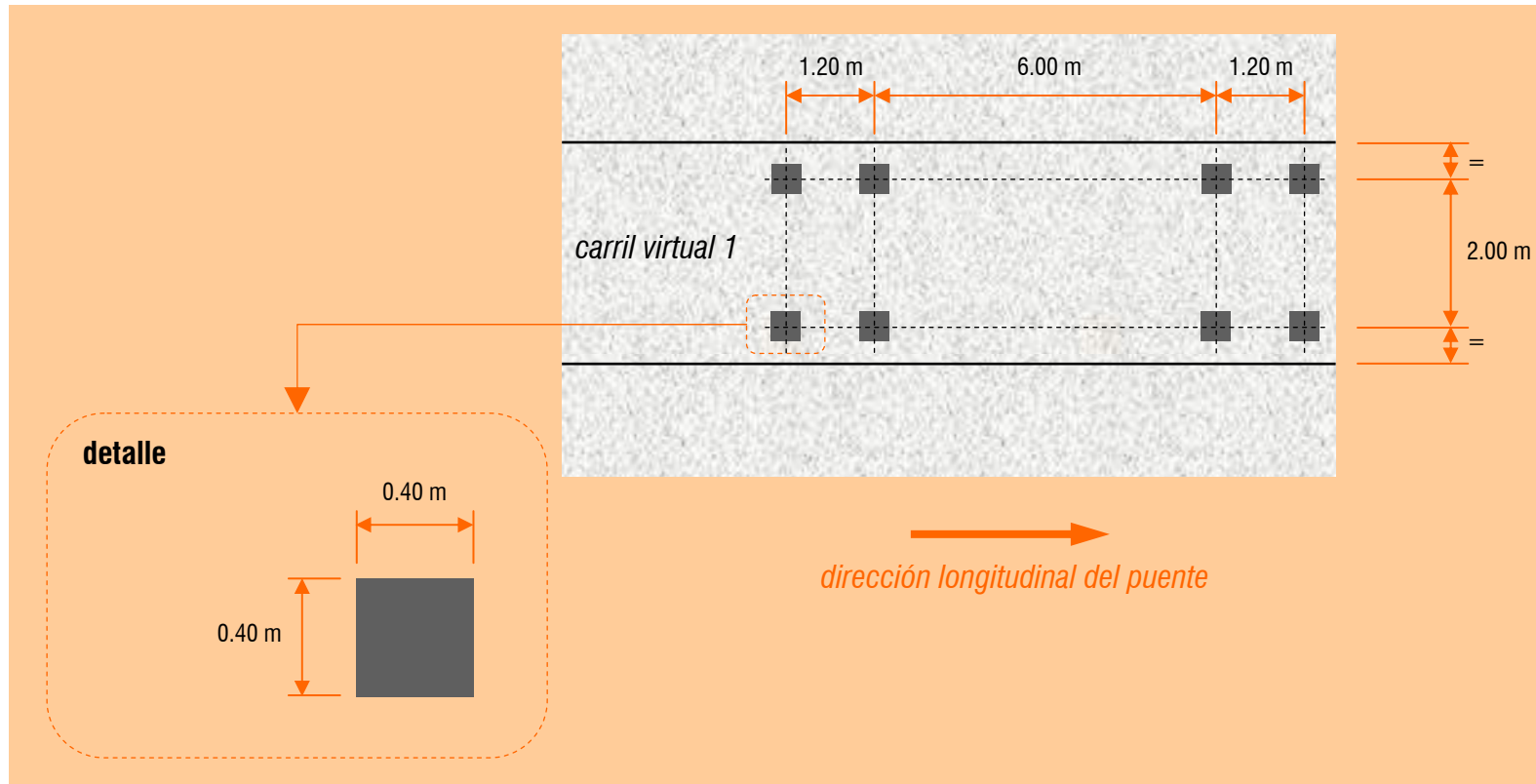
07 Presentación de la IAP-11

Figura 4.1-d

<7.4.1.5 Tren de cargas para la comprobación del estado límite de fatiga>**<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>**

07 Presentación de la IAP-11

Alternativamente al vehículo definido anteriormente, para la comprobación del *estado límite de fatiga*, se podrán emplear *datos reales* de tráfico, ajustados o extrapolados, en su caso, por métodos estadísticos apropiados, previa autorización de la DGC. Estos datos de tráfico deberán ser multiplicados por el correspondiente *factor de amplificación dinámico*, que tendrá en cuenta entre otros aspectos la *regularidad superficial del pavimento*.

4.1.6 SOBRECARGA DE USO EN TERRAPLENES ADYACENTES A LA ESTRUCTURA

Para el cálculo de *empujes del terreno* sobre elementos de la estructura en contacto con el (*estribos, muros, etc.*), se considerará actuando en la parte superior del terraplén, en la zona por donde pueda discurrir el tráfico, el *modelo de cargas verticales* definido en el *apartado 4.1.2*. *Alternativamente*, podrá adoptarse el *modelo simplificado* consistente en una *sobrecarga uniforme* de **10 kN/m²**.

Esta sobrecarga *se tendrá en cuenta* únicamente en los casos en que las cargas producidas por el tráfico actúen a una *distancia, medida en horizontal, menor o igual a la mitad de la altura del elemento* de la estructura sobre el que actúe el empuje.

A efectos de la aplicación de los coeficientes parciales que figuran en el *capítulo 6*, se considerará como una misma acción la componente gravitatoria de esta sobrecarga y el empuje a que da lugar. Además, esta acción se considerará con su valor característico como único valor representativo (ver *apartado 6.1.2*).

07 Presentación de la IAP-11

4.1.7 EMPUJE SOBRE BARANDILLAS

Las *fuerzas transmitidas* por la barandilla al tablero dependerán de la **clase de carga** de la barandilla proyectada, según **EN 1317-6**. En *puentes y pasarelas*, se adoptará una clase de carga tal que la **fuerza horizontal perpendicular al elemento superior de la barandilla** sea como mínimo **1.5 kN/m**.

Esta fuerza horizontal se considerará actuando simultáneamente con la sobrecarga uniforme definida en el **apartado 4.1.2.2**.

4.1.8 SOBRECARGA DE USO EN PASARELAS

Para la determinación de los efectos estáticos de la *sobrecarga de uso debida al tráfico de peatones*, se considerará la **acción simultánea** de las cargas siguientes:

- a) Una **carga vertical** uniformemente distribuida q_{fk} de valor igual a **5 kN/m²**
- b) Una **fuerza horizontal longitudinal** Q_{fk} de valor igual al **10%** del total de la carga vertical uniformemente distribuida, actuando en el eje del tablero al nivel de la superficie del pavimento.

07 Presentación de la IAP-11

- **Ambas cargas** se consideran como **una acción única**, cuyo valor constituye el valor característico de la sobrecarga de uso cuando se combina con el resto de las acciones (*cargas permanentes, viento, etc.*).
- La fuerza horizontal Q_{hk} será en general suficiente para **asegurar la estabilidad horizontal longitudinal** de la pasarela; no así la estabilidad horizontal transversal, que deberá asegurarse mediante la consideración de las acciones correspondientes.
- A efectos de las **comprobaciones locales**, se considerará una **carga vertical puntual** Q_{fwk} de valor igual a **10 kN/m²**, actuando sobre una superficie cuadrada de **0.10 m** de lado.
- Cuando, de acuerdo con el **capítulo 8**, sea necesario efectuar un **análisis dinámico**, se tendrá en cuenta lo indicado al respecto en dicho capítulo.

07 Presentación de la IAP-11

4.2 VIENTO

En general, la *acción del viento* se asimilará a una *carga estática equivalente*, salvo que, de acuerdo con el **apartado 4.2.9**, sea necesario además considerar los efectos aeroelásticos.

Para la obtención de la *carga estática equivalente* a la acción del viento, se seguirán las indicaciones que figuran en los **apartados 4.2.1 a 4.2.8**.

El proyectista podrá adoptar valores o expresiones distintos de los aquí indicados, previa autorización de la DGC, siempre que los justifique adecuadamente por disponer de medidas de velocidad de viento en el lugar durante un periodo de tiempo representativo para la situación de proyecto considerada, por el conocimiento de la intensidad de la turbulencia y su repercusión sobre las ráfagas de viento, o por las cualidades aerodinámicas de los elementos del puente y el conocimiento experimental de su coeficiente de fuerza (también llamado coeficiente de arrastre).

07 Presentación de la IAP-11

4.2.1 VELOCIDAD BÁSICA DEL VIENTO

La *velocidad básica fundamental* del viento $v_{b,0}$ es la velocidad media a lo largo de un periodo de **10 minutos**, con un periodo de retorno de **50 años**, medida con independencia de la dirección del viento y de la época del año en una zona plana desprotegida frente al viento, equivalente a un **entorno tipo II** (según se define en el **apartado 4.2.2**), a una altura de **10 m** sobre el suelo.

A partir de la *velocidad básica fundamental* del viento $v_{b,0}$, se obtendrá la *velocidad básica* del viento v_b mediante la expresión:

$$v_b = c_{dir} c_{season} v_{b,0}$$

v_b *velocidad básica* del viento para un periodo de retorno de 50 años [m/s]

c_{dir} *factor direccional* del viento que, a falta de estudios más precisos, puede tomarse igual a **1.0**

c_{season} *factor estacional* del viento que, a falta de estudios más precisos, puede tomarse igual a **1.0**

$v_{b,0}$ *velocidad básica fundamental* del viento [m/s], según el mapa de isotacas de la **Figura 4.2-a**

07 Presentación de la IAP-11

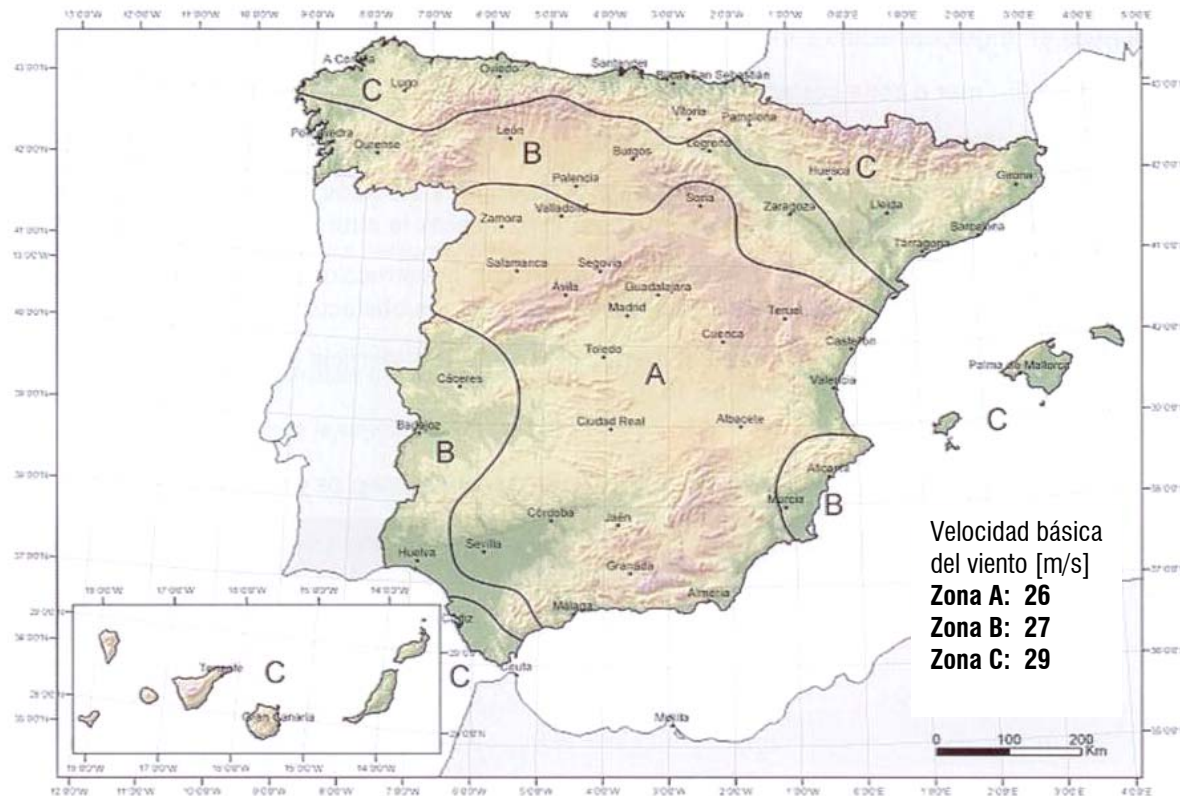


Figura 4.2-a

<7.4.2.1 Mapa de isotacas para la obtención de la velocidad básica fundamental del viento $v_{b,0}$ >

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

Para un periodo de retorno diferente de 50 años, la velocidad básica del viento $v_b(T)$ será:

$$v_b(T) = v_b c_{prob}$$

T periodo de retorno [años]

c_{prob} **factor de probabilidad**, obtenido de la siguiente fórmula:

$$c_{prob} = \left\{ \frac{1 - 0.2 \ln[-\ln(1 - 1/T)]}{1 - 0.2 \ln[-\ln(1 - 1/50)]} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

- Para **situaciones persistentes**, a falta de estudios específicos, se considerará un periodo de retorno de **100 años** ($c_{prob}=1.04$)
- Para **situaciones transitorias**, se tomarán los periodos de retorno indicados en la **Tabla 4.2-a** salvo que se justifiquen adecuadamente otros valores.

07 Presentación de la IAP-11

DURACIÓN DE LA SITUACIÓN	PERIODO DE RETORNO, T [AÑOS]
≤ 3 días	2
3 días < ≤ 3 meses	5
3 meses < ≤ 1 año	10
1 año <	50

Tabla 4.2-a

4.2.2 VELOCIDAD MEDIA DEL VIENTO

La **velocidad media del viento** $v_m(z)$ a una altura z sobre el terreno dependerá de la rugosidad del terreno, de la topografía y de la velocidad básica del viento v_b , y se determinará según la expresión siguiente:

$$v_m(z) = c_r(z) c_0 v_b(T)$$

07 Presentación de la IAP-11

donde:

$V_b(T)$ **velocidad básica** del viento [m/s] para un periodo de retorno T

c_0 **factor de topografía**, que se tomará habitualmente igual a **1.0**. En valles en los que se pueda reproducir un encauzamiento del viento actuante sobre el puente, se tomará para c_0 un valor de **1.1**. Cuando existan obstáculos naturales susceptibles de perturbar apreciablemente el flujo del viento sobre el puente, el valor de c_0 se determinará mediante un estudio específico

$c_r(z)$ **factor de rugosidad** obtenido de la siguiente fórmula:

$$c_r(z) = k_r \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) \quad \text{para } z \geq z_{min}$$
$$c_r(z) = c_r(z_{min}) \quad \text{para } z < z_{min}$$

siendo:

z **altura** del punto de aplicación del empuje del viento respecto del terreno o respecto del nivel mínimo del agua bajo el puente [m]

k_r **factor del terreno**, según **Tabla 4.2-b**

z_0 **longitud de la rugosidad**, según **Tabla 4.2-b**

z_{min} **altura mínima**, según **Tabla 4.2-b**

07 Presentación de la IAP-11

TIPO DE ENTORNO	k_r	z_0 [m]	z_{min} [m]
0	0.156	0.003	1
I	0.170	0.01	1
II	0.190	0.05	2
III	0.216	0.30	5
IV	0.235	1.00	10

Tabla 4.2-b

Tipo 0: mar o zona costera expuesta al mar abierto

Tipo I: lagos o áreas planas y horizontales con vegetación despreciable y sin obstáculos

Tipo II: zona rural con vegetación baja y obstáculos aislados, (árboles, construcciones pequeñas, etc.), con separaciones de al menos 20 veces la altura de los obstáculos

Tipo III: zona suburbana, forestal o industrial con construcciones y obstáculos aislados con una separación máxima de 20 veces la altura de los obstáculos

Tipo IV: zona urbana en la que al menos el 15% de la superficie esté edificada y la altura media de los edificios exceda de 15 m

07 Presentación de la IAP-11

4.2.3 EMPUJE DEL VIENTO

El empuje producido por el viento se calculará por separado para cada elemento del puente, teniendo en cuenta los siguientes aspectos:

- El *área expuesta al viento* o las *características aerodinámicas* del elemento pueden resultar *modificadas* por la materialización de otras acciones actuando en la estructura (nieve, sobrecargas de uso, etc.)
- En *situaciones transitorias*, algunos elementos pueden presentar *superficies* de exposición al viento *diferentes* a las definitivas (por ejemplo, cajón abierto frente a cerrado). Además, los elementos auxiliares de construcción pueden añadir superficies adicionales a tener en cuenta

El empuje del viento sobre cualquier elemento se calculará mediante la expresión:

$$F_w = \left[\frac{1}{2} \rho v_b^2(T) \right] c_e(z) c_f A_{ref}$$

07 Presentación de la IAP-11

siendo:

F_w **empuje horizontal** del viento [N]

$\frac{1}{2} \rho v_b^2(T)$ **presión de la velocidad básica** del viento q_b [N/m²]

ρ **densidad del aire**, que se tomará igual a **1.25 kg/m³**

$v_b(T)$ **velocidad básica** del viento [m/s] para un periodo de retorno T

C_f **coeficiente de fuerza** del elemento considerado según **Figura 4.2-b**

A_{ref} **área de referencia**, que se obtendrá como la proyección del **área sólida expuesta** sobre el plano perpendicular a la dirección del viento

$C_e(z)$ **coeficiente de exposición** en función de la altura z calculado según la fórmula siguiente:

$$C_e(z) = k_r^2 \left[C_0^2 \ln^2 \left(\frac{z}{z_0} \right) + 7k_r C_0 \ln \left(\frac{z}{z_0} \right) \right] \quad \text{para } z \geq z_{min}$$

$$C_e(z) = C_e(z_{min}) \quad \text{para } z < z_{min}$$

k_r **factor de turbulencia**, que se tomará igual a **1.0**. Parámetros C_0 , z_0 y z_{min} según el **apartado 4.2.2**

07 Presentación de la IAP-11

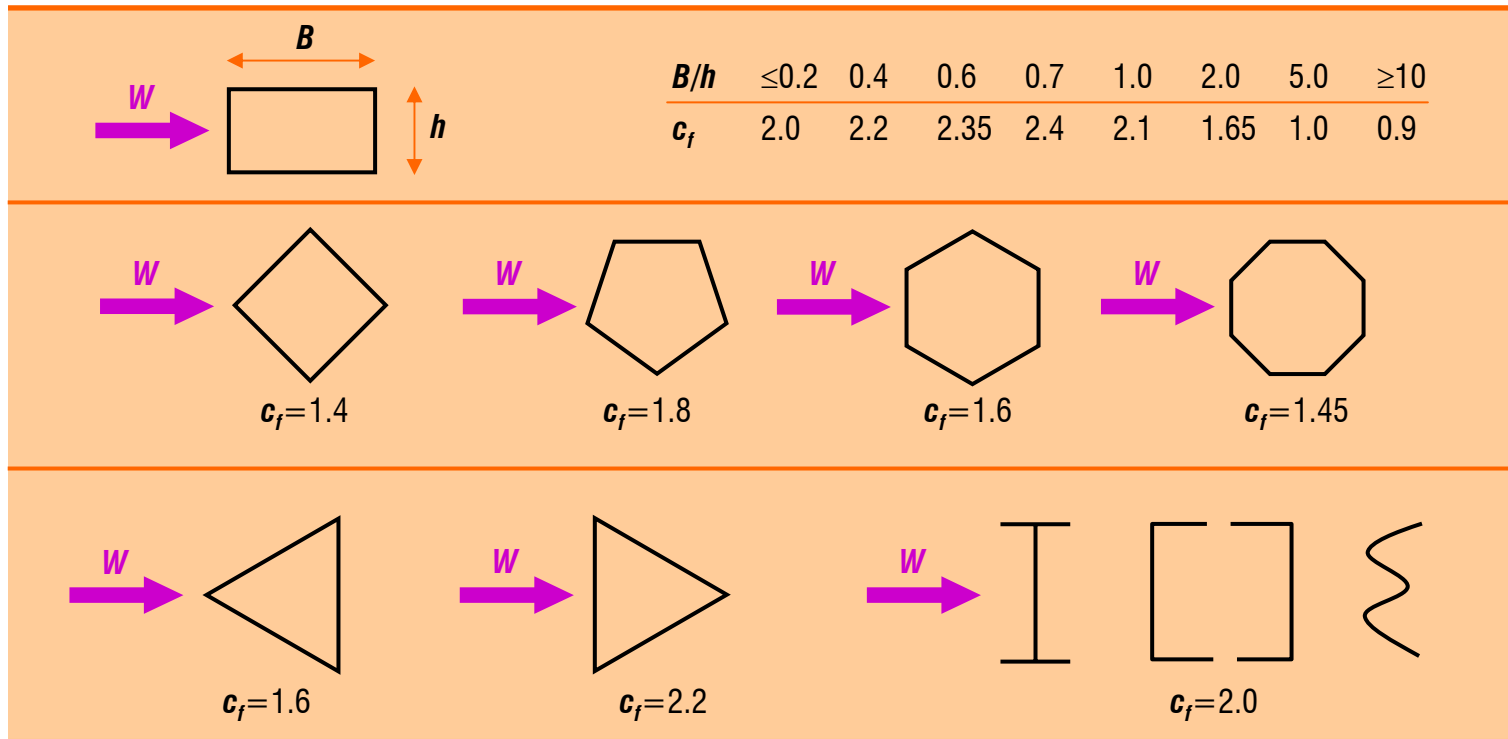
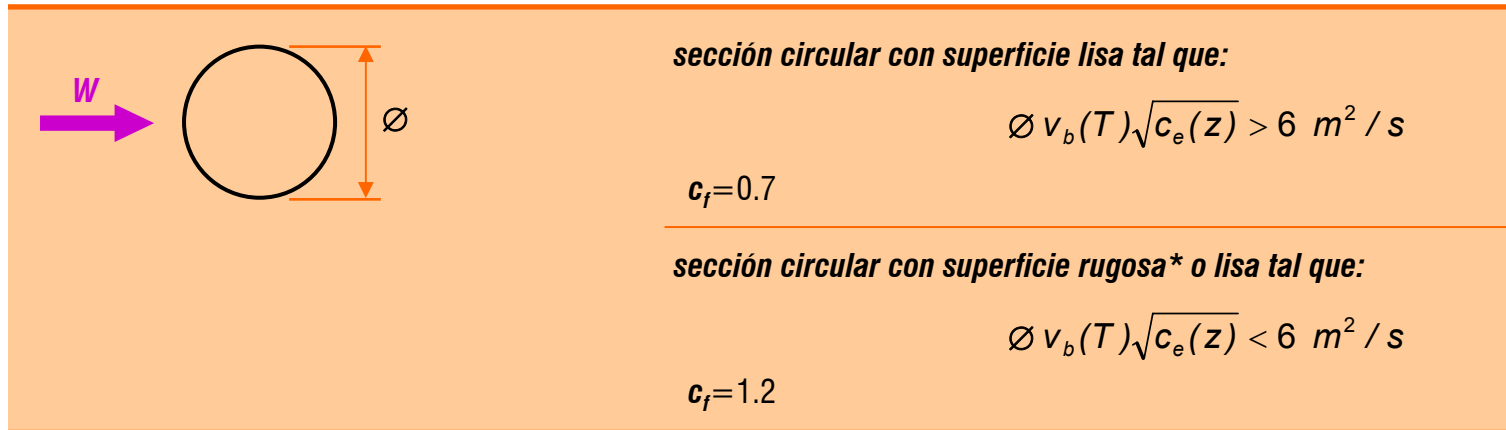


Figura 4.2-b

07 Presentación de la IAP-11

Figura 4.2-b
(continuación)

(*) se tomará siempre superficie rugosa excepto si la rugosidad superficial equivalente resulta menor de $\varnothing 10^{-5}$

El producto $c_f A_{ref}$ se calculará según las reglas que se exponen a continuación o bien mediante ensayos en túnel aerodinámico, lo cual será recomendable en puentes de gran luz. En este caso deberán considerarse tres ángulos de incidencia respecto a la horizontal: -6° , 0° y $+6^\circ$

07 Presentación de la IAP-11

El empuje del viento se *aplicará* sobre el *centro de gravedad* del área de referencia del elemento A_{ref} .

Se supondrá que el efecto de la sobrecarga de uso equivale a un área expuesta cuya altura se considerará igual a:

- 2 m en *puentes de carretera*

- 1.25 m en *pasarelas*

Dichas alturas se medirán desde la superficie del pavimento y se tendrán en cuenta para el cálculo tanto del coeficiente de fuerza, como del área. En el caso de coexistir distintos tipos de carga sólo se considerará la de altura más desfavorable.



$H=2\text{ m}$

07 Presentación de la IAP-11

Cuando sea necesario considerar el efecto del **ocultamiento** sobre cualquier elemento no expuesto directamente a la acción del viento (por quedar oculto tras la sombra o proyección de otro situado inmediatamente a barlovento de éste), el **coeficiente de fuerza** del elemento oculto se multiplicará por el coeficiente de ocultamiento η definido en la **Tabla 4.2-c**, donde λ es la **relación de solidez**, definida como:

$$\lambda = A_n / A_{tot}$$

λ **relación de solidez** correspondiente al elemento de barlovento más próximo

A_n **área** sólida neta o **real** (descontando los huecos) que el elemento de barlovento presenta al viento

A_{tot} **área** bruta o **total** (sin descontar huecos) del elemento de barlovento delimitada por su contorno externo

Y donde s_r es el espaciamiento relativo, definido como:

$$s_r = s / h_p$$

s_r **espaciamiento relativo** entre el elemento de barlovento y el de sotavento

s **distancia horizontal** entre las superficies de ambos elementos, proyectadas sobre un plano perpendicular a la dirección del viento

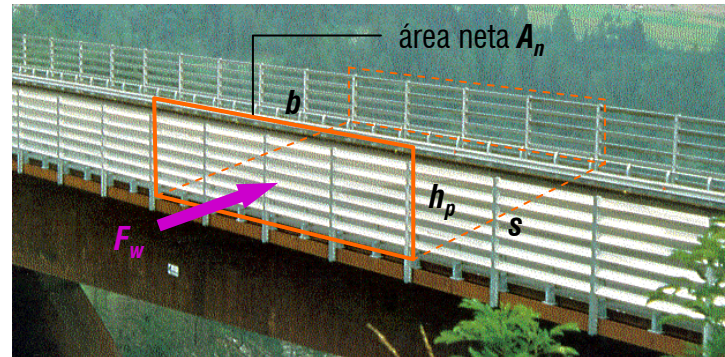
h_p **altura protegida** u oculta por el elemento de barlovento

07 Presentación de la IAP-11

ESPACIAMIENTO RELATIVO s_r	RELACIÓN DE SOLIDEZ λ					
	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	≥ 0.6
0.5	0.75	0.40	0.31	0.22	0.13	0.06
1	1.00	0.82	0.64	0.46	0.28	0.10
2	1.00	0.84	0.68	0.52	0.36	0.20
3	1.00	0.86	0.72	0.59	0.45	0.31
4	1.00	0.89	0.78	0.68	0.57	0.46
5	1.00	1.00	0.92	0.85	0.77	0.69
6	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00

Tabla 4.2-c

07 Presentación de la IAP-11



espaciamiento relativo
relación de solidez

$$s_r = s/h_p$$

$$\lambda = A_n/bh_p$$

Siempre que el viento actúe simultáneamente con las sobrecargas de uso, el valor resultante de la fuerza equivalente del viento se combinará con el resto afectado por los correspondientes factores de simultaneidad ψ , definidos en el **apartado 6.1** de esta Instrucción, y deberá aplicarse sobre la **longitud** ocupada por vehículos que resulte **más desfavorable**, **independientemente de la zona de aplicación de las acciones verticales debidas a la propia sobrecarga de uso**.

07 Presentación de la IAP-11

4.2.4 DIRECCIÓN DEL VIENTO

Para evaluar la acción del viento sobre la estructura se considerará su actuación en **dos direcciones**:

- **Perpendicular al eje del tablero**: dirección transversal (X). Esta componente podrá ir acompañada de una componente asociada en dirección vertical (Z)

- **Paralela al eje del tablero**: dirección longitudinal (Y)

Si el tablero es de **planta curva**, se supondrá que la dirección longitudinal es la de la **cuerda** que une los dos extremos del puente y que la dirección transversal es su perpendicular. Para cada dirección, el sentido de aplicación de la fuerza del viento será el que resulte más desfavorable para el elemento y efecto en estudio.

Alternativamente, para el cálculo del efecto del viento sobre el tablero, se podrá considerar, siempre que la amplitud angular del arco definido en planta no supere **90°**, lo siguiente:

- **Un viento radial**, normal a la superficie lateral del tablero en cada punto, cuyo valor característico será el mismo que el definido para el viento para el viento transversal sobre el tablero en el **apartado 4.2.5.1**

- **Un viento tangencial** a la directriz en cada punto, cuyo valor característico será el mismo que el definido para el viento longitudinal sobre el tablero en el **apartado 4.2.5.2**

07 Presentación de la IAP-11

Análogamente, en las **pilas de puentes de tablero curvo en planta**, y siempre que la amplitud angular del arco definido por el tablero no supere **90°**, se podrá considerar que las dos direcciones del viento son:

- **Perpendicular a la directriz del tablero en cada pila**, que se considerará concomitante con el viento transversal sobre el tablero
- **Tangente a la directriz del tablero en cada pila**, que se considerará concomitante con el viento longitudinal sobre el tablero

En general, se considerará que la acción del viento en las direcciones **transversal** y **longitudinal no es concomitante**. La componente vertical del viento (**Z**) se considerará concomitante sólo con la dirección transversal del viento.

En el caso particular de que las características **topográficas** del emplazamiento produzcan habitualmente **vientos en dirección oblicua** al eje del tablero, o cuando la estructura pueda ser especialmente sensible a vientos oblicuos, se comprobará además la seguridad estructural para estos vientos. Para ello se determinará la presión de la velocidad básica del viento, $\frac{1}{2} \rho v_b^2(T)$, correspondiente a la dirección oblicua, se **descompondrá vectorialmente** esta presión en las dos direcciones, longitudinal y transversal, se calcularán independientemente los empujes correspondientes y ambos se considerarán **aplicados simultáneamente** sobre la estructura.

07 Presentación de la IAP-11

4.2.5 EMPUJE DEL VIENTO SOBRE TABLEROS

4.2.5.1 Efectos producidos por el viento transversal

4.2.5.1.1 Empuje horizontal

En el cálculo del empuje transversal del viento sobre el tablero, a efectos de aplicación de esta Instrucción, se puede distinguir dos tipos de tablero: de alma llena y de celosía.

a) Tableros de alma llena

Se incluyen en este caso los tableros con alma llena de tipo **cajón** (sencillo o múltiple), las **losas** o los **tableros de vigas**.

Para el cálculo del empuje transversal (dirección X) sobre estos tableros se entenderá que el área de referencia $A_{ref,X}$ es el producto de la longitud del tramo de puente considerado por la altura equivalente h_{eq} .

A falta de datos experimentales, el **coeficiente de fuerza** en la dirección X se determinará mediante la expresión:

$$c_{f,X} = 2.5 - 0.3(B/h_{eq})$$

B **anchura** total del tablero [m]

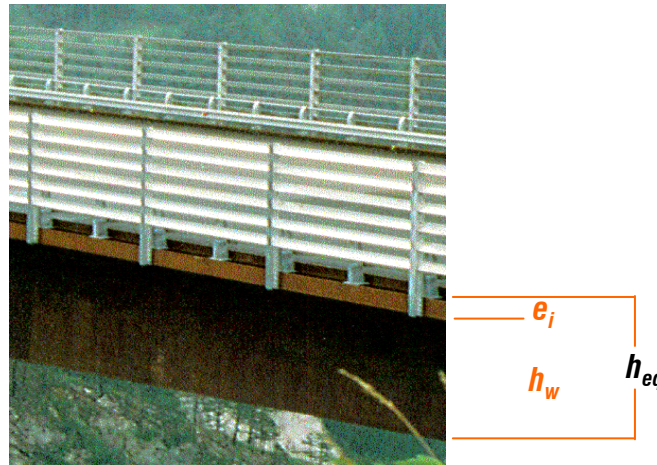
h_{eq} **altura equivalente** [m] obtenida considerando, además del propio tablero (en el caso de un tablero de vigas o varios cajones, se considerará únicamente el elemento de mayor canto), la altura de cualquier elemento no estructural que sea totalmente opaco frente al viento o, si se tiene en cuenta la presencia de la sobrecarga de uso, la altura de ésta, en caso de ser más desfavorable.

07 Presentación de la IAP-11

En cualquier caso, el coeficiente $c_{f,x}$ se considerará limitado por los valores siguientes:

$$1.3 \leq c_{f,x} \leq 2.4$$

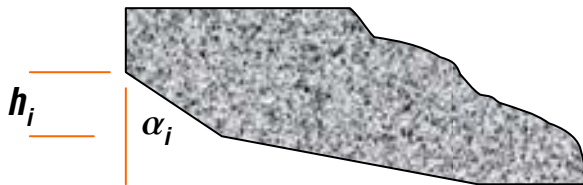
Si los elementos no estructurales (sistemas de contención, barandillas o pantallas) son permeables al viento, no se considerarán en la determinación de esta altura equivalente h_{eq} , y el empuje que soportan y transmiten se calculará de forma independiente, según se indica en el apartado 4.2.7.



07 Presentación de la IAP-11

El valor del coeficiente $c_{f,x}$ y sus límites inferior y superior se podrán modificar en función de la forma de la sección transversal del tablero, aplicando los siguientes criterios:

- Si una de las caras expuestas al viento está *inclinada respecto a la vertical en el sentido favorable a la circulación del viento*, se puede reducir su coeficiente de fuerza en un **0.5% por cada grado sexagesimal** de inclinación, con una **reducción máxima** de un **30%**.
- Si las caras expuestas al viento tienen *distinta inclinación*, la reducción a aplicar será la **media ponderada** de las reducciones relativas de las distintas superficies en función de sus áreas respectivas.



$$\rho = \frac{\sum h_i \rho_i}{\sum h_i} \quad , \quad \rho_i = 0.005 \alpha_i \leq 0.3$$

en ($^{\circ}$)

07 Presentación de la IAP-11

b) Tableros de tipo celosía

El empuje ***se calculará de forma independiente para cada celosía***, en función del área sólida expuesta al viento.

En las celosías no expuestas directamente al viento, se multiplicará, si procede, su coeficiente de fuerza por el ***coeficiente de ocultamiento η*** anteriormente definido en el **apartado 4.2.3**. El empuje total obtenido no será mayor que el de un tablero de sección rectangular del mismo canto y anchura.

Al igual que para los tableros de alma llena, si los elementos de contención o las barandillas son permeables al paso del aire, el empuje que soportan y transmiten se calculará de forma independiente, según se indica en el **apartado 4.2.7**.

Las ***sobrecargas de uso se tendrán en cuenta***, para el cálculo del empuje horizontal del viento, de la misma forma que en tableros de alma llena, ***sin reducir su área sólida expuesta por la presencia de celosías***, aunque el tablero esté embebido en las propias celosías.

07 Presentación de la IAP-11



celosía directamente expuesta ($i=0$)

barandilla: **no** interviene en el cálculo del empuje sobre el tablero

elemento opaco, oculto ($i=1,2$)

celosía oculta ($i=3$)

$$F_{w,X} = \frac{1}{2} \rho v_b^2 \left\{ \sum_{e=1}^{n_0} (c_{f0} A_{ref,0})_e + \sum_{i=1}^M \sum_{e=1}^{n_i} \eta_e (c_{fi} A_{ref,i})_e \right\}$$

07 Presentación de la IAP-11

El *coeficiente de fuerza* dependerá de la **sección de los perfiles** de la celosía. A falta de datos específicos se tomará:

- $c_{f,x}=1.8$ para perfiles de celosía de caras planas
- $c_{f,x}=1.2$ para perfiles cilíndricos lisos de diámetro \varnothing que cumplan la condición: $\varnothing v_b(T)\sqrt{c_e(z)} < 6 \text{ m}^2 / \text{s}$
- $c_{f,x}=0.7$ para perfiles cilíndricos lisos de diámetro \varnothing que cumplan la condición: $\varnothing v_b(T)\sqrt{c_e(z)} > 6 \text{ m}^2 / \text{s}$

siendo $v_b(T)$ la velocidad básica y $c_e(z)$ el coeficiente de exposición, definidos en los **apartados 4.2.1 y 4.2.3**, respectivamente.

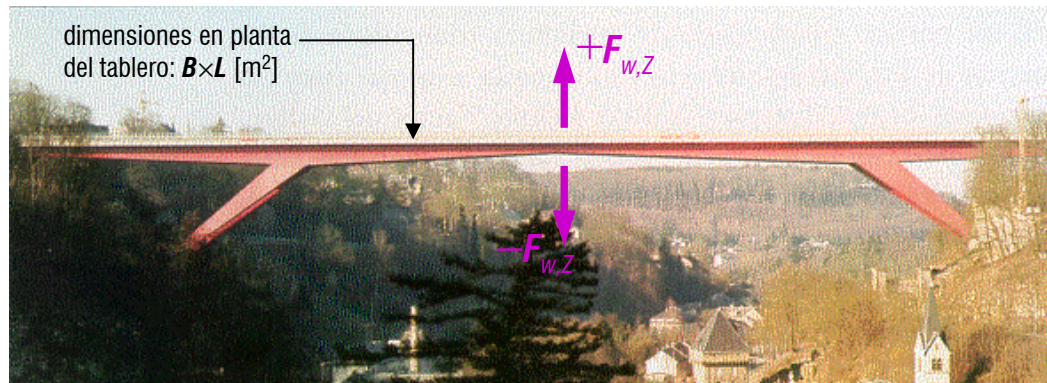
4.2.5.1.2 Empuje vertical

Se considerará un empuje vertical, dirección Z, sobre el tablero actuando en el sentido más desfavorable, igual a:

$$F_{w,Z} = \left[\frac{1}{2} \rho v_b^2(T) \right] c_e(z) c_{f,Z} A_{ref,Z}$$

07 Presentación de la IAP-11

$F_{w,Z}$	empuje vertical del viento [N]
$\frac{1}{2} \rho v_b^2(T)$	presión de la velocidad básica del viento definida en el apartado 4.2.3 [N/m ²]
$c_e(z)$	coeficiente de exposición definido en el apartado 4.2.3
$C_{f,Z}$	coeficiente de fuerza en la dirección vertical Z, que se tomará igual a ± 0.9
$A_{ref,Z}$	área en planta del tablero [m ²]



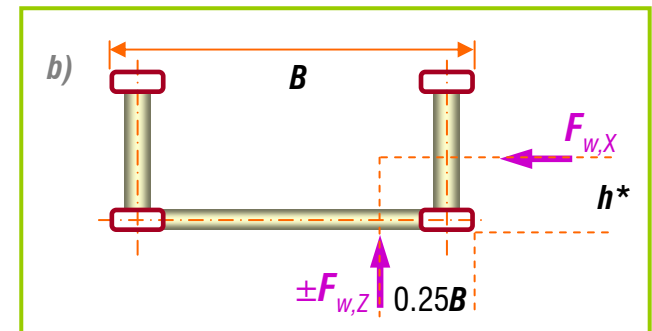
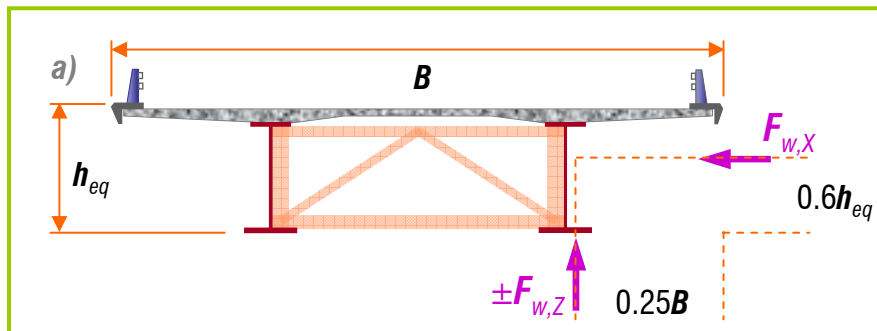
En el caso de disponer de ensayos de la sección transversal del tablero en túnel aerodinámico, se considerará el empuje vertical máximo del viento obtenido para los tres ángulos de incidencia respecto a la horizontal definidos en el **apartado 4.2.3**.

07 Presentación de la IAP-11

4.2.5.1.3 Momento de vuelco sobre el tablero

A falta de datos precisos sobre el **momento de vuelco** ejercido por la acción combinada de los empujes transversal (dirección X) y vertical (dirección Z) del viento sobre el tablero, se supondrá que:

- **El empuje transversal está aplicado** a la altura que se indica a continuación, medida respecto a la base del tablero:
 - a) **En tableros de alma llena**, el **60% de la altura** del primer frente máximo adoptado en el cálculo del área expuesta a la componente horizontal del viento transversal, incluyendo, en su caso, el área correspondiente a la sobrecarga de uso
 - b) **En tableros de tipo celosía**, la **media ponderada de las alturas** de los centros de gravedad de las diferentes áreas que compongan el primer frente máximo adoptado en el cálculo del área expuesta a la componente horizontal del viento transversal, incluyendo en su caso, el área correspondiente a la sobrecarga de uso
- **El empuje vertical está aplicado** a una distancia del borde de barlovento igual a **un cuarto de la anchura del tablero**.



07 Presentación de la IAP-11

4.2.5.2 Empuje provocado por el viento longitudinal

Se considerará un empuje horizontal paralelo al eje del puente (dirección Y) sobre los *elementos de desarrollo longitudinal* (tablero, pretilas, barandillas y pantallas).

Este *empuje longitudinal* será una *fracción del empuje transversal* producido por el viento transversal (dirección X), multiplicado por un coeficiente reductor $\kappa(z)$. El valor de dicha fracción será:

- **25%** para los elementos sólidos (tableros tipo cajón, losa o vigas, sistemas de contención no permeables, pantallas anti-ruido, sobrecarga de uso, etc.). Para el cálculo de este empuje longitudinal no se considerará la reducción debida a la inclinación de las almas en los tableros de alma llena
- **50%** para los elementos que presenten huecos (tableros tipo celosía, sistemas de contención permeables, barandillas y, en su caso, sobrecargas de uso)

El coeficiente reductor $\kappa(z)$, será el definido por la expresión:

$$\kappa(z) = 1 - \left[\frac{7}{c_0 \ln\left(\frac{z}{z_0}\right) + 7} \right] \Phi[L / L(z)]$$

07 Presentación de la IAP-11

donde:

c_0 **factor de topografía** definido en el **apartado 4.2.2**

$$\Phi [L/L(z)] = 0.230 + 0.182 \ln [L/L(z)]$$

siendo: $0 \leq \Phi [L/L(z)] \leq 1$

L **longitud** sobre la cual actúa el empuje longitudinal [m]. Se tomará igual a la longitud total del puente

$L(z)$ **longitud integral de la turbulencia** [m] definida por:

$$L(z) = \begin{cases} 300(z_{min} / 200)^\alpha & \text{para } z < z_{min} \\ 300(z / 200)^\alpha & \text{para } z_{min} \leq z \leq 200 \\ 300 & \text{para } 200 < z \end{cases}$$

z **altura** del punto de aplicación del empuje de viento respecto del terreno o de la cota mínima del nivel de agua bajo el puente [m]

z_0, z_{min} **coeficientes** definidos en la **Tabla 4.2-b**

α **coeficiente** definido en la **Tabla 4.2-d**

07 Presentación de la IAP-11

TIPO DE ENTORNO	α
0	0.38
I	0.44
II	0.52
III	0.61
IV	0.67

Tabla 4.2-d

- Tipo 0: mar o zona costera expuesta al mar abierto
- Tipo I: lagos o áreas planas y horizontales con vegetación despreciable y sin obstáculos
- Tipo II: zona rural con vegetación baja y obstáculos aislados, (árboles, construcciones pequeñas, etc.), con separaciones de al menos 20 veces la altura de los obstáculos
- Tipo III: zona suburbana, forestal o industrial con construcciones y obstáculos aislados con una separación máxima de 20 veces la altura de los obstáculos
- Tipo IV: zona urbana en la que al menos el 15% de la superficie esté edificada y la altura media de los edificios exceda de 15 m

07 Presentación de la IAP-11

4.2.6 EMPUJE DEL VIENTO SOBRE PILAS

El empuje se obtendrá en función del *área de referencia* y el *coeficiente de fuerza* adecuado a la forma de su sección transversal. En la **Figura 4.2-b** se indican los coeficientes de fuerza de las secciones de cálculo más usuales.

En pilas de sección rectangular con *aristas redondeadas* mediante acuerdos de radio r , se podrá reducir el coeficiente de fuerza multiplicándolo por el factor κ :

$$\kappa = 1 - 2.5 r/h \geq 0.5$$

Siendo h la dimensión transversal definida en dicha figura.

Para secciones de pila *no incluidas* en la **Figura 4.2-b**, se adoptará un valor del coeficiente de fuerza c_f contrastado por la experiencia u obtenido mediante ensayos en túnel aerodinámico. Para secciones sin superficies cóncavas, se podrá adoptar un valor de $c_f = 2.2$ sin necesidad de justificación mediante ensayos.

Las *pilas de sección variable*, o aquellas en las que el coeficiente de exposición $c_e(z)$ varíe apreciablemente a lo largo de su altura, se dividirán en tramos, adoptando en cada uno el valor correspondiente del coeficiente de exposición $c_e(z)$, del área de referencia A_{ref} y del coeficiente de fuerza c_f .

07 Presentación de la IAP-11

Se tomará como **área de referencia** la proyección del área sólida expuesta sobre el plano perpendicular a la dirección del viento.

Cuando en las pilas no se puedan despreciar las sollicitaciones de **torsión** debidas al viento, se considerará que el empuje sobre la superficie considerada actúa con una **excentricidad** respecto a su eje de **1/10** de la anchura de dicha superficie.

La **dirección** del viento a considerar en los cálculos será la que se indica en el **apartado 4.2.4**.

4.2.7 EMPUJE DEL VIENTO SOBRE OTROS ELEMENTOS DEL PUENTE

El empuje del viento sobre **sistemas de contención y barandillas permeables**, se obtendrá a partir del **área de referencia** y del **coeficiente de fuerza** específico de cada uno de sus elementos. Para las secciones no incluidas en la **Figura 4.2-b**, el coeficiente de fuerza de cada uno de ellos $c_{f,x}$ se tomará igual a **2.2** salvo que se justifique adecuadamente otro valor más preciso.

Se tomará como **área de referencia** la proyección del área sólida expuesta sobre el plano perpendicular a la dirección del viento.

El cálculo del empuje de viento sobre otros elementos del puente tales como **cables**, **péndolas** o los **sistemas de iluminación y señalización**, se realizará también a partir de las **áreas de referencia** y los **coeficientes de fuerza** indicados a la **Figura 4.2-b**. En este caso será necesario tener en cuenta el empuje sobre todos los elementos **sin considerar** posibles efectos de **apantallamiento**.

07 Presentación de la IAP-11

4.2.8 CÁLCULO SIMPLIFICADO DEL EMPUJE EN TABLEROS Y PILAS

En puentes de menos de **40 m** de luz (medida entre ejes de apoyo) y de menos de **20 m** de altura máxima de pila, podrá considerarse **únicamente el viento transversal**, con los valores de empuje unitario F_w/A_{ref} indicados en las **Tablas 4.2-e** y **4.2-f**, siempre que se cumplan las condiciones siguientes:

$$c_{f,x} \leq 1.8 \text{ en tableros}$$

$$c_{f,x} \leq 2.2 \text{ en pilas}$$

$$c_0 = 1.0$$

$$c_{prob} \leq 1.04$$

Para alturas de tableros y pilas comprendidas **entre 10 m y 20 m**, se podrá **interpolarse linealmente** entre las dos tablas anteriores.

El **punto de aplicación** del empuje transversal será el definido en el **apartado 4.2.5.1.3**.

En la elaboración de la **tablas anteriores**, **no** se ha considerado la **acción del viento sobre la sobrecarga de uso**; para tener en cuenta este efecto, se seguirán los criterios indicados en el **apartado 4.2.3** respecto al aumento del área expuesta.

07 Presentación de la IAP-11

TIPO DE ENTORNO	EMPUJE SOBRE TABLERO [kN/m ²]			EMPUJE SOBRE PILAS [kN/m ²]		
	$v_{b,0}=26$ m/s	$v_{b,0}=27$ m/s	$v_{b,0}=29$ m/s	$v_{b,0}=26$ m/s	$v_{b,0}=27$ m/s	$v_{b,0}=29$ m/s
0	2.58	2.78	3.21	3.16	3.40	3.93
I	2.29	2.47	2.85	2.79	3.01	3.47
II	1.94	2.09	2.41	2.37	2.56	2.95
III	1.47	1.58	1.83	1.80	1.94	2.23
IV	0.93	1.00	1.15	1.14	1.23	1.42

Tabla 4.2-e

<7.4.2.8 Empujes unitarios en puentes con altura de pila: $H_{max} \leq 10$ m>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

TIPO DE ENTORNO	EMPUJE SOBRE TABLERO [kN/m ²]			EMPUJE SOBRE PILAS [kN/m ²]		
	$v_{b,0}=26$ m/s	$v_{b,0}=27$ m/s	$v_{b,0}=29$ m/s	$v_{b,0}=26$ m/s	$v_{b,0}=27$ m/s	$v_{b,0}=29$ m/s
0	2.93	3.16	3.65	3.58	3.86	4.45
I	2.64	2.85	3.29	3.23	3.48	4.02
II	2.31	2.49	2.88	2.83	3.05	3.52
III	1.88	2.03	2.34	2.29	2.47	2.85
IV	1.30	1.40	1.62	1.60	1.72	1.99

Tabla 4.2-f

<7.4.2.8 Empujes unitarios en puentes con altura de pila: $H_{max} \leq 20$ m>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

4.2.9 EFECTOS AEROELÁSTICOS

4.2.9.1 Necesidades de comprobación

A efectos de aplicación de esta Instrucción, *no será necesario comprobar los efectos aeroelásticos* en puentes y pasarelas que cumplan las **tres condiciones** siguientes:

- **Luz** inferior a **200 m** en puentes y **100 m** en pasarelas
- **Luz efectiva** (máxima distancia entre puntos de momento flector nulo bajo la acción del peso propio) menor que **30 veces el canto**
- **Anchura del tablero** superior a **1/10** de la distancia entre puntos de momento transversal nulo bajo la acción del viento transversal

Aunque no se cumpla alguna de las tres condiciones anteriores, tampoco será necesario comprobar los efectos aeroelásticos en puentes o pasarelas en los que concurran las dos circunstancias siguientes:

- **Luz** menor de **80 m**
- **Frecuencia fundamental** de flexión vertical mayor de **2 Hz**

07 Presentación de la IAP-11

4.2.9.2 Criterios de comprobación

El estudio de los posibles *efectos aeroelásticos* deberá contemplar **al menos** los efectos de *divergencia torsional*, *desprendimiento de torbellinos*, *vibraciones divergentes por galope* o *flameo* y por *bataneo*.

Las comprobaciones a realizar para cada uno de estos efectos serán las siguientes:

▪ **Divergencia torsional**. La velocidad crítica de inestabilidad deberá ser superior a dos veces la velocidad media de proyecto a la altura del tablero, $2v_m(z)$

▪ **Desprendimiento de torbellinos**. No se considerará este efecto si la velocidad crítica de desprendimiento de torbellinos es superior a $1.25v_m(z)$. Si no se cumple esta condición, será necesario determinar la amplitud máxima de las oscilaciones resultantes y comprobar que los desplazamientos, las aceleraciones y los esfuerzos no sobrepasan los valores permitidos en estado límite de servicio para la sobrecarga de uso. Además, será necesario comprobar la seguridad de la estructura frente a la fatiga producida por estas oscilaciones

▪ **Vibraciones divergentes por galope**. La mínima velocidad crítica de inestabilidad deberá ser superior a $1.25v_m(z)$

▪ **Vibraciones divergentes por flameo**. La mínima velocidad crítica de inestabilidad deberá ser superior a $1.25v_c(z)$, siendo la *velocidad punta*:

$$v_c(z) = \sqrt{c_e(z)} v_b(T)$$

07 Presentación de la IAP-11

■ **Bataneo.** Se determinará los valores máximos de desplazamientos, aceleraciones y esfuerzos y se comprobará que no se sobrepasan los valores permitidos en estado límite de servicio para la sobrecarga de uso. Además, será necesario comprobar la seguridad de la estructura frente a la fatiga producida por estas oscilaciones

La **determinación de todos los valores citados** anteriormente deberá hacerse por **cálculos numéricos** suficientemente contrastados o **ensayos en túnel de viento**.

El **ensayo en túnel de viento** será en cualquier caso **preceptivo** en puentes de más de **200 m** de luz y en pasarelas de más de **100 m** de luz. También será **preceptivo** cuando, mediante los análisis efectuados, **no se confirme la ausencia de efectos aeroelásticos de importancia**. El proyectista deberá definir el alcance de los ensayos en túnel de viento de forma que sirvan para verificar la seguridad y funcionalidad de la estructura. La utilización de métodos numéricos para modelizar el flujo de aire sólo será admisible si éstos se restringen a la obtención de conclusiones de tipo cualitativo o si se han contrastado o calibrado con ensayos en túnel de viento para la misma sección de tablero (salvo modificaciones de detalle) y en las condiciones de turbulencia correspondientes al proyecto.

La **comprobación de los efectos aeroelásticos** deberá hacerse también para los estados de **construcción** del puente, siguiendo los mismos criterios expuestos en este apartado y teniendo en cuenta que la velocidad básica del viento, la configuración estructural (y, por tanto, las frecuencias) y el amortiguamiento pueden ser diferentes respecto a los correspondientes a la estructura completa.

07 Presentación de la IAP-11

Divergencia torsional

En un tablero de puente, o en cualquier otro obstáculo parecido a una placa plana, sometido a una corriente incidente con un ángulo de ataque pequeño, las acciones del viento sobre el perfil se traducen en una fuerza (cuyas componentes en la dirección de la corriente y en una dirección perpendicular a esta son la resistencia aerodinámica y la sustentación, respectivamente) y un momento torsor, o momento de cabeceo, que se supone positivo cuando tiende a levantar el borde de ataque del perfil. Por lo tanto, un momento positivo tenderá a aumentar el ángulo de ataque, lo que a su vez provocará el aumento del momento torsor, de modo que si la estructura no tiene suficiente rigidez a torsión para equilibrar el momento torsor de cabeceo, las deformaciones continuarán hasta que se produzca el colapso.

Este mecanismo divergente es semejante al galope, que presentaremos más adelante, pero considerando en este último las oscilaciones transversales en lugar de la torsión.

Desprendimiento de torbellinos

El flujo corriente bajo un cilindro circular situado perpendicularmente al viento uniforme incidente se caracteriza por el desprendimiento alternado y periódico de torbellinos: la denominada **calle de torbellinos de Kármán**. El desprendimiento de torbellinos genera sobre el cilindro fuerzas laterales periódicas, causando vibraciones laterales en las estructuras esbeltas en general, cualquiera que sea su sección.



Las cargas aerodinámicas alternadas generadas por la calle de torbellinos desprendidos pueden ser peligrosas si la frecuencia de desprendimiento, controlada por el **número de Strouhal**, coincide con alguna de las frecuencias propias de la estructura, en particular con primera, pudiendo aparecer un fenómeno de resonancia que amplifique la deformación del puente hasta provocar su colapso por fatiga.

07 Presentación de la IAP-11

Oscilaciones divergentes por galope y flameo

■ El **galope** es una inestabilidad típica de estructuras esbeltas con **secciones no circulares**, caracterizado por oscilaciones laterales $w(x,t)$ perpendiculares a la dirección de la corriente incidente. El galope se origina cuando se produce un acoplamiento entre la resultante de las fuerzas de sustentación y de resistencia aerodinámica que actúan sobre cada sección de la estructura, de forma que tienden a reforzar las oscilaciones. Por lo tanto, este fenómeno no tiene nada que ver con el desprendimiento de torbellinos alternados: un cuerpo de sección circular **no** puede presentar galope y sin embargo, sí puede oscilar lateralmente por causa del desprendimiento de torbellinos de la calle de Kármán.

■ Por su parte, el **flameo de un grado de libertad** o de torsión, puede producirse en ciertos tipos de estructuras (por ejemplo, tableros de puentes colgantes en celosía o con secciones abiertas, en las cuales el centro de masa está muy separado del centro de torsión) donde el movimiento de rotación $\theta_x(x,t)$ se vuelve inestable y produce un flameo auto-excitado de un solo grado de libertad debido al amortiguamiento negativo del modo de torsión.

■ Por último, el **flameo clásico** es una inestabilidad aerodinámica en la que intervienen dos grados de libertad: las vibraciones laterales $w(x,t)$ y las vibraciones de torsión $\theta_x(x,t)$. Puede aparecer en estructuras con frecuencias propias semejantes en ambos modos de vibración (oscilaciones del puente de Tacoma Narrows) y es un fenómeno completamente desacoplado de la estela de torbellinos de la calle de Kármán.

Bataneo o Buffeting

Los diferentes tipos de inestabilidad descritos anteriormente (ver apartados **4.2.9.3.1** a **4.2.9.3.3**) tienen en común que son fenómenos inducidos por la propia estructura y pueden aparecer incluso aunque la corriente incidente sea poco turbulenta.

Las **oscilaciones por bataneo** son de carácter irregular y se producen por causa de las turbulencias del viento atmosférico u otras perturbaciones de la corriente, exclusivamente. Además, también pueden producirse inducidas por la estela de un primer obstáculo.

07 Presentación de la IAP-11

4.2.9.3 Comprobaciones simplificadas

En el caso de puentes de menos de **200 m** de luz y pasarelas de menos de **100 m** de luz, las **comprobaciones** de los efectos aeroelásticos podrán efectuarse de **forma simplificada** según se recoge en este apartado. Estas fórmulas pueden aplicarse también al caso de los arcos exentos durante las fases de construcción.

A los efectos únicamente de estas comprobaciones simplificadas, se podrán estimar las frecuencias de vibración por métodos aproximados indicados a continuación:

a) *Frecuencia fundamental de flexión:*

$$\omega_w = 0.18 \sqrt{g / w_G}$$

w_G flecha máxima de la estructura [m] bajo la acción de la carga permanente actuando en la misma dirección y sentido que el modo de vibración esperado

g Aceleración de la gravedad, igual a **9.8 m/s²**

b) *Frecuencia fundamental de torsión:*

$$\omega_\theta = 1 / \sqrt{32 \theta_x}$$

θ_x giro máximo del tablero [rad] bajo la acción de un momento torsor uniformemente distribuido, igual al producto del momento de inercia másico polar por una aceleración angular de **1 rad/s²** y aplicado en el sentido del giro de torsión del modo de vibración esperado ($m_x = \rho \cdot I_0 \theta_x$)

07 Presentación de la IAP-11

4.2.9.3.1 Divergencia torsional

Se podrá descartar que se produzcan fenómenos de divergencia torsional si se cumple la condición:

$$7.3\omega_{\theta}r\sqrt{\frac{m}{\rho B^2}} \geq 2v_m$$

ω_{θ} frecuencia del primer modo de vibración de torsión del puente [Hz]

r radio de giro másico del tablero [m]

m masa unitaria del tablero [kg/m]

ρ densidad del aire, que se tomará igual a **1.25 kg/m³**

B ancho de la sección [m]

v_m velocidad media del viento [m/s]

07 Presentación de la IAP-11

4.2.9.3.2 Desprendimiento de torbellinos

Si la primera frecuencia de flexión vertical ω_w [Hz] es superior a $7.5/h$, en donde h es el canto de la sección [m], se considera que el puente **no** va a estar sometido a vibraciones apreciables por desprendimiento de torbellinos y no será necesario realizar más comprobaciones relativas a este efecto.

En caso contrario, se calculará el *número de Scruton*:

$$S_c = \frac{2m\delta_s}{\rho h^2}$$

y se comprobará que es superior a los dos valores siguientes:

$$S_c \geq 2600 \frac{B}{l} \quad , \quad S_c \geq 2100 \frac{\omega_w^2 B}{g}$$

δ_s amortiguamiento logarítmico estructural, cuya relación con la tasa de amortiguamiento ξ (ver **Tabla 4.2-g**), expresada como porcentaje respecto del amortiguamiento crítico es el siguiente:

$$\delta_s = \frac{2\pi}{100} \xi$$

07 Presentación de la IAP-11

- m masa unitaria del tablero [kg/m]
- ρ densidad del aire, que se tomará igual a **1.25 kg/m³**
- B ancho del tablero [m]
- l el menor de los dos valores siguientes: luz del puente o distancia entre dos puntos consecutivos de momento flector nulo ante la acción del peso propio [m]
- ω_w frecuencia del primer modo de vibración vertical del tablero [Hz]
- g aceleración de la gravedad, igual a **9.8 m/s²**

TIPO DE ESTRUCTURA	ξ [%]
Acero	0.4
Mixta	0.6
Hormigón pretensado	1.0
Hormigón armado	1.5

Tabla 4.2-g

07 Presentación de la IAP-11

4.2.9.3.3 Oscilaciones divergentes por galope y flameo

a) Se podrá descartar el riesgo de *oscilaciones divergentes en el plano vertical (galope)* si se cumple la condición:

$$\omega_w \frac{m \delta_s}{\rho h} \geq 1.25 v_m$$

Siendo los parámetros m , δ_s , ω_w , ρ y h los que se definen en el apartado 4.2.9.3.2

b) Se podrá descartar el riesgo de *oscilaciones divergentes de torsión (flameo)* si se cumple la condición:

$$5 \omega_\theta B \geq 1.25 v_c$$

ω_θ frecuencia del primer modo de torsión del tablero [Hz]

B anchura del tablero [m]

c) Se podrá descartar el riesgo de *oscilaciones divergentes acopladas de flexión y torsión (flameo clásico)* si se cumple la condición:

$$1.8 \omega_\theta B \sqrt{\frac{mr}{\rho B^3} \left[1 - 1.1 \left(\frac{\omega_w}{\omega_\theta} \right)^2 \right]} \geq 1.25 v_c$$

con el significado de las variables definido en los apartados 4.2.9.3.1 y 4.2.9.3.2

07 Presentación de la IAP-11

4.2.9.3.4 Oscilaciones producidas por las ráfagas (bataneo)

Se podrán despreciar los efectos de estas oscilaciones cuando se cumpla la condición:

$$\omega_w \frac{L(z)}{v_m} \geq 3$$

$L(z)$ longitud integral de la turbulencia [m], según **apartado 4.2.5.2**

ω_w frecuencia del primer modo de vibración vertical del tablero [Hz]

v_m velocidad media del viento [m/s]

En caso de no cumplirse la condición anterior será necesario estudiar el efecto dinámico de las ráfagas en combinación con los efectos de su tamaño en relación con la longitud del puente sometida a la acción del viento.

07 Presentación de la IAP-11

4.3 ACCIÓN TÉRMICA

4.3.1 ACCIÓN TÉRMICA EN TABLEROS

A efectos de aplicación de esta Instrucción, para evaluar el efecto de la acción térmica se considerarán los siguientes tipos de tablero:

- **Tipo 1:** *tableros de acero* con sección transversal en cajón, viga armada o celosía
- **Tipo 2:** *tableros mixtos* compuestos por acero estructural y hormigón armado o pretensado (conectados de forma que ambos materiales trabajan de forma solidaria)
- **Tipo 3:** *tableros de hormigón* armado o pretensado, sean losas, vigas o cajones

Los *valores representativos de la acción térmica* se evaluarán considerando la **componente uniforme** de temperatura y las **componentes de la diferencia de temperatura vertical y horizontal**.

4.3.1.1 Componente uniforme de la temperatura del tablero

4.3.1.1.1 Temperatura máxima y mínima del aire

Para calcular los efectos de la componente uniforme de temperaturas se partirá del valor de la temperatura del aire a la sombra en el lugar del emplazamiento del puente.

07 Presentación de la IAP-11

El valor característico de la temperatura máxima del aire a la sombra T_{max} depende del clima del lugar y de la altitud y, para un periodo de retorno de **50 años** (lo que equivale a una probabilidad anual de ser excedido de **0.02**), será el que se indica en el mapa de isotermas de la **Figura 4.3-a**.

Como valor característico de la temperatura mínima del aire a la sombra T_{min} se tomará, para un periodo de retorno de **50 años**, el que se deduce de la **Tabla 4.3-a** en función de la altitud del emplazamiento y de la zona climática invernal que se deduce del mapa de la **Figura 4.3-b**.

Para periodos de retorno diferentes de 50 años, se deben de ajustar los valores $T_{max,p}$ y $T_{min,p}$ según las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} T_{max,p} &= T_{max} \{0.781 - 0.056 \ln[-\ln(1-p)]\} \\ T_{min,p} &= T_{min} \{0.393 - 0.156 \ln[-\ln(1-p)]\} \end{aligned}$$

Siendo p el inverso del periodo de retorno.

Para **situaciones persistentes** se tomará un periodo de retorno de 100 años ($p=0.01$). Para **situaciones transitorias**, se tomarán los periodos de retorno indicados en la **Tabla 4.2-a**, salvo que se justifiquen adecuadamente otros valores.

07 Presentación de la IAP-11

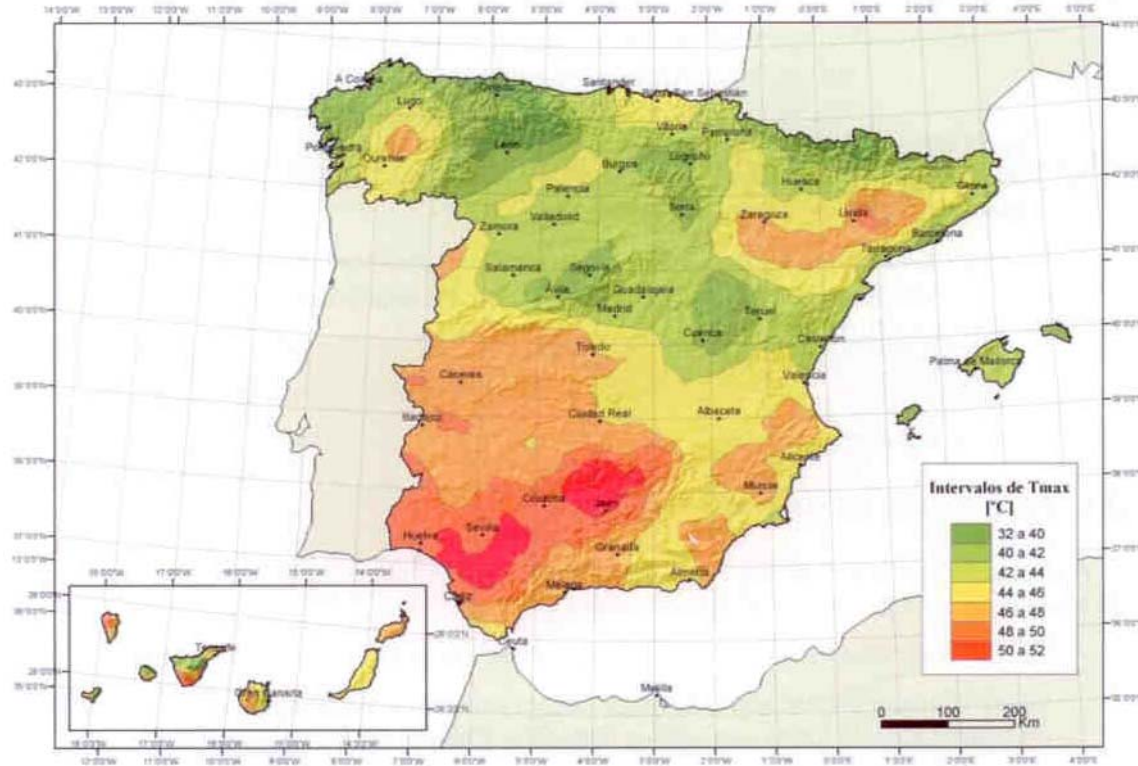


Figura 4.3-a

<7.4.3.1 Isotermas de la temperatura máxima anual del aire, T_{max} [°C]>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11



Figura 4.3-b

<7.4.3.1 Zonas climáticas de invierno>

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

4.3.1.1.2 Componente uniforme de la temperatura

La componente uniforme de la temperatura del tablero, también denominada **temperatura efectiva** (temperatura media de la sección transversal), tendrá un valor mínimo $T_{e,min}$ y un valor máximo $T_{e,max}$ que se determinarán a partir de la temperatura del aire, mediante las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} T_{e,min} &= T_{min} + \Delta T_{e,min} \\ T_{e,max} &= T_{max} + \Delta T_{e,max} \end{aligned}$$

T_{min} valor característico de la temperatura mínima del aire a la sombra en el lugar del emplazamiento del puente con el ajuste correspondiente al periodo de retorno según se indica en el **apartado 4.3.1.1.1**

T_{max} valor característico de la temperatura máxima del aire a la sombra en el lugar del emplazamiento del puente con el ajuste correspondiente al periodo de retorno según se indica en el **apartado 4.3.1.1.1**

Con los valores de $\Delta T_{e,min}$ y $\Delta T_{e,max}$ indicados en la **Tabla 4.3-b**.

En el caso de **celosías y vigas armadas de acero**, el valor de $\Delta T_{e,max}$ definido en la **Tabla 4.3-b** para tableros **Tipo 1**, puede **reducirse** en **3°**.

Para la determinación de los efectos debidos a la componente de temperatura, se emplearán los valores del coeficiente de dilatación térmica lineal indicados en la **Tabla 4.3-c**, a menos que, mediante ensayos o estudios más detallados, se justifiquen otros valores.

07 Presentación de la IAP-11

ALTITUD [m]	ZONA CLIMÁTICA INVERNAL (según Figura 4.3-b)						
	1	2	3	4	5	6	7
0	-7	-11	-11	-6	-5	-6	6
200	-10	-13	-12	-8	-8	-8	5
400	-12	-15	-14	-10	-11	-9	3
600	-15	-16	-15	-12	-14	-11	2
800	-18	-18	-17	-14	-17	-13	0
1000	-20	-20	-19	-16	-20	-14	-2
1200	-23	-21	-20	-18	-23	-16	-3
1400	-26	-23	-22	-20	-26	-17	-5
1600	-28	-25	-23	-22	-29	-19	-7
1800	-31	-26	-25	-24	-32	-21	-8
2000	-33	-28	-27	-26	-35	-22	-10

Tabla 4.3-a

07 Presentación de la IAP-11

TIPO DE TABLERO	$\Delta T_{e,min}$ [°C]	$\Delta T_{e,max}$ [°C]
Tipo 1: Tablero de acero	-3	+16
Tipo 2: Tablero mixto	+4	+4
Tipo 3: Tablero de hormigón	+8	+2

Tabla 4.3-b

MATERIAL	α_T [$\times 10^{-6}$ °C ⁻¹]
Acero inoxidable	16
Acero estructural, hierro dulce o fundición ⁽¹⁾	12
Hormigón ⁽²⁾	10

Tabla 4.3-c

⁽¹⁾ En estructuras mixtas, el coeficiente de dilatación lineal del acero estructural puede tomarse igual al del hormigón:
 $\alpha_T = 10 \times 10^{-6}$ °C⁻¹

⁽²⁾ En el caso de hormigón con áridos ligeros, $\alpha_T = 7 \times 10^{-6}$ °C⁻¹

07 Presentación de la IAP-11

4.3.1.1.3 Rango de la componente uniforme de la temperatura

La variación de la componente uniforme de la temperatura ocasionará, en una **estructura sin coacción al movimiento**, un cambio en la longitud del elemento. Teniendo en cuenta lo indicado en el apartado anterior, el **rango de variación de la componente uniforme** de temperatura en el tablero será:

$$\Delta T_N = T_{e,max} - T_{e,min}$$

A partir de los valores característicos máximo y mínimo de la componente uniforme de temperatura y a partir de la temperatura inicial T_0 (**temperatura media** del tablero en el momento en que se **coacciona** su movimiento), se obtendrán los rangos de variación térmica que permitan determinar la contracción y la dilatación máximas el tablero, según lo indicado en los párrafos siguientes.

El valor característico de la **máxima variación de la componente uniforme** de temperatura en **contracción** será:

$$\Delta T_{N,con} = T_0 - T_{e,min}$$

El valor característico de la **máxima variación de la componente uniforme** de temperatura en **dilatación** será:

$$\Delta T_{N,exp} = T_{e,max} - T_0$$

07 Presentación de la IAP-11

En el caso de que no sea posible establecer la temperatura inicial T_0 del elemento en el momento de coaccionar su movimiento, esta se tomará igual a la **temperatura media** de dicho elemento durante el **periodo de construcción** y, en ausencia de esta información, podrá tomarse un valor $T_0 = 15^\circ\text{C}$.

El **dimensionamiento** de los **aparatos de apoyo** y de las **juntas de dilatación** se realizará considerando como máxima variación de contracción de la componente uniforme de la temperatura del puente el valor de $(\Delta T_{N,con} + 15)^\circ\text{C}$, y como máxima variación de la dilatación el valor de $(\Delta T_{N,exp} + 15)^\circ\text{C}$.

Podrá considerarse como máxima variación de contracción de la componente uniforme de la temperatura del puente el valor de $(\Delta T_{N,con} + 5)^\circ\text{C}$ y como máxima variación de dilatación el valor de $(\Delta T_{N,exp} + 5)^\circ\text{C}$, en los casos siguientes:

- En los apoyos, cuando el **proyecto especifique** la **temperatura de colocación**, o bien cuando esté previsto **reajustar**, una vez concluida la ejecución, las holguras de los apoyos para una temperatura igual a T_0
- En el caso de la junta de dilatación, cuando el **proyecto especifique** la **temperatura de colocación**, o bien cuando esté previsto realizar una operación de **reglado** de la misma previamente a su colocación

En el cálculo de los recorridos de apoyos y de juntas se tendrán en cuenta las posibles **variaciones de sustentación horizontal del tablero a lo largo de la construcción**, puesto que pueden afectar a la magnitud y al sentido de los desplazamientos horizontales a considerar en función de la ubicación del **punto fijo** en cada fase de construcción.

07 Presentación de la IAP-11

4.3.1.2 Componente de la diferencia de temperatura

4.3.1.2.1 Diferencia vertical

a) Puentes de acero (Tipo 1) y puentes de hormigón (Tipo 3)

A lo largo de un periodo de tiempo determinado, el calentamiento y enfriamiento de la cara superior del tablero da lugar a una **variación de temperatura en la altura de la sección transversal** que tendrá un valor de máximo calentamiento (cara superior más caliente) y un valor de máximo enfriamiento (cara superior más fría).

El efecto de la **diferencia vertical de temperatura** se debe considerar mediante el empleo de una **componente lineal equivalente** de la diferencia de temperatura con $\Delta T_{M,heat}$ y $\Delta T_{M,cool}$. Estos valores son diferencias de temperatura entre las fibras superior e inferior del tablero.

Para tableros de acero (Tipo 1) o tableros de hormigón (Tipo 3), los valores $\Delta T_{M,heat}$ y $\Delta T_{M,cool}$ serán los que figuran en la **Tabla 4.3-d**.

La diferencias de temperatura está muy influenciada por el **tipo y espesor del pavimento**. Los valores dados en la **Tabla 4.3-d** corresponden a un espesor de pavimento de **50 mm**. Para espesores diferentes, será necesario aplicar un **factor corrector** k_{sur} dado en la **Tabla 4.3-e**.

07 Presentación de la IAP-11

TIPO DE TABLERO	FIBRA SUPERIOR MÁS CALIENTE $\Delta T_{M,heat}$ [°C]	FIBRA SUPERIOR MÁS FRÍA $\Delta T_{M,cool}$ [°C]
Tipo 1: Tablero de acero	18	13
Tipo 3: Tablero de hormigón		
▪ Sección en cajón	10	5
▪ Sección de vigas	15	8
▪ Sección losa	15	8

Tabla 4.3-d

ESPESOR DEL PAVIMENTO	k_{sur} en TABLERO TIPO 1		k_{sur} en TABLERO TIPO 3	
	Fibra sup. más caliente	Fibra sup. más fría	Fibra sup. más caliente	Fibra sup. más fría
Sin impermeabilización ni pavimento	0.7	0.9	0.8	1.1
Con impermeabilización y sin pavimento ⁽¹⁾	1.6	0.6	1.5	1.0
50 mm	1.0	1.0	1.0	1.0
100 mm	0.7	1.2	0.7	1.0
150 mm	0.7	1.2	0.5	1.0

Tabla 4.3-e

⁽¹⁾ Estos valores representan valores límite superiores para superficies de color oscuro

07 Presentación de la IAP-11

b) Puentes mixtos (Tipo 2)

El efecto de la *diferencia vertical de temperatura* en tableros mixtos (Tipo 2) se considerará mediante una *diferencia en la temperatura de las secciones parciales de acero y de hormigón*.

A efectos de aplicación de esta Instrucción, se considerarán condiciones de *calentamiento* aquéllas que originan una *ganancia de calor de la sección parcial de acero* respecto de la de hormigón. Por el contrario, condiciones de *enfriamiento* serán las que dan lugar a una *pérdida de calor de la sección parcial* de acero respecto de la de hormigón.

En general, *en una sección mixta, se producen diariamente las dos condiciones*, independientemente de la estación del año. Durante el *día*, las *secciones parciales de acero están más calientes* que las secciones parciales de hormigón, exista o no soleamiento, y durante la *noche* sucede lo contrario, las *secciones parciales de acero presentan menor temperatura* que las secciones parciales de hormigón.

En las *condiciones de calentamiento*, se considerará que la *sección parcial de acero* tiene un incremento $\Delta T_{M,heat} = +18^{\circ}\text{C}$ respecto a la sección parcial de hormigón (ya sea losa superior u hormigón de fondo).

En las *condiciones de enfriamiento*, se considerará que la *sección parcial de acero* tiene un incremento $\Delta T_{M,cool} = -10^{\circ}\text{C}$ respecto a la sección parcial de hormigón (ya sea losa superior u hormigón de fondo).

07 Presentación de la IAP-11

En ambos casos, calentamiento o enfriamiento, la diferencia de temperatura $\Delta T_{M,heat}$ ó $\Delta T_{M,cool}$ supone sobre la **sección mixta completa** una **componente uniforme** y una **componente equivalente lineal** de diferencia de temperatura vertical. El valor de la **componente uniforme** de temperatura producido por $\Delta T_{M,heat}$ ó $\Delta T_{M,cool}$ **no se debe tener en cuenta** en ninguna comprobación, al haberse incluido ya en el rango de variación de la acción definida en el **apartado 4.3.1.1**, por lo que **sólo se considerará el efecto de la diferencia vertical** de temperatura lineal equivalente.

Para la determinación de los **efectos debidos a la componente lineal equivalente de la diferencia vertical de temperatura producida** por $\Delta T_{M,heat}$ ó $\Delta T_{M,cool}$ en una sección mixta, se emplearán los valores de los coeficientes de dilatación lineal α_T definidos en la **Tabla 4.3-c**, considerando para el acero estructural un coeficiente de dilatación lineal de $\alpha_T = 12 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$.

▪ **Componente uniforme.** Actúa sobre la sección mixta completa y **no debe tenerse en cuenta en este apartado**. En un tablero isostático, produce las deformaciones longitudinales siguientes:

$$\varepsilon_x = \frac{N_x}{E_s A_R} = \varepsilon_c + (\varepsilon_s - \varepsilon_c) \frac{A_s}{A_R}$$

▪ **Componente de diferencia vertical lineal.** En un tablero isostático, produce los cambios de curvatura siguientes:

$$\chi_y = \frac{M_y}{E_s I_R} = (\varepsilon_s - \varepsilon_c) (z_{Gs} - z_{GR}) \frac{A_s}{I_R}$$

07 Presentación de la IAP-11

4.3.1.2.2 Diferencia horizontal

La **diferencia de soleamiento** entre un lado y otro de la sección transversal del tablero puede dar lugar a una **diferencia horizontal de temperatura**. Este hecho se produce en tableros que presentan una **orientación** próxima a la este-oeste, con mayor soleamiento general en la cara sur, pero también se produce en puentes con orientación próxima a la norte-sur, con mayor soleamiento en el lado este al amanecer con un máximo en los meses de verano, y en el lado oeste al atardecer con un máximo en los meses de invierno.

En aquellos casos en que esta acción pueda dar lugar a efectos estructurales o funcionales significativos, se considerarán los valores característicos de la **diferencia de temperatura entre las dos caras laterales extremas** del tablero definidas en la **Tabla 4.3-f**, donde l_v es la longitud del voladizo y h_a es la proyección del paramento lateral del tablero sobre el plano vertical.

TABLEROS TIPO 1 Y TIPO 2		TABLEROS TIPO 3	
$l_v \leq 2h_a$	$l_v > 2h_a$	$l_v \leq 2h_a$	$l_v > 2h_a$
18°C	-	5°C	-

Tabla 4.3-f

07 Presentación de la IAP-11

4.3.1.2.3 Diferencia local en paredes de secciones cajón de hormigón

En los **grandes puentes de hormigón con sección cajón**, en los que pueden aparecer diferencias significativas de temperatura entre las caras interior y exterior de las almas del cajón (por ejemplo, los situados en emplazamientos donde puedan producirse cambios bruscos de la temperatura ambiente exterior), se tendrá en cuenta dicho efecto considerando una diferencia lineal de temperatura entre ambas caras.

A falta de datos específicos, se podrá adoptar una diferencia $T_{ext}-T_{int}$ de **15°C**.



07 Presentación de la IAP-11

4.3.1.3 Simultaneidad de la componente uniforme y de la diferencia de temperatura

Si debido al esquema estructural, es necesario tener en cuenta la actuación simultánea de la variación de la componente uniforme, $\Delta T_{N,exp}$ o $\Delta T_{N,con}$, y la diferencia de temperatura, $\Delta T_{M,heat}$ o $\Delta T_{M,cool}$, ambas componentes se combinarán de acuerdo con las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned} \Delta T_M + \omega_N \Delta T_N \\ \omega_M \Delta T_M + \Delta T_N \end{aligned}$$

con $\omega_N=0.35$ y $\omega_M=0.75$

Estas expresiones dan lugar a **ocho** posibles formas de considerar la concomitancia de las distintas componentes de la acción térmica, de las que **se elegirán las que den lugar a los efectos más desfavorables para el elemento en estudio**.

07 Presentación de la IAP-11

4.3.2 ACCIÓN TÉRMICA EN PILAS

Se deberán **considerar** los efectos de las acciones térmicas en pilas, *cuando puedan dar lugar a la aparición de reacciones o movimientos* en los elementos adyacentes o en la propia pila.

Cuando las diferencias de temperatura puedan dar lugar a efectos significativos, se considerará, para **pilas de hormigón** tanto huecas como macizas, una diferencia lineal de temperatura de **5°C** entre caras externas opuestas. Para los tabiques de las pilas de hormigón huecas, se considerará, además, una diferencia lineal de temperatura entre las caras interna y externa de **15°C**.

En **pilas metálicas o mixtas**, **el proyectista analizará la necesidad** de considerar una diferencia de temperatura entre caras externas opuestas y una diferencia de temperatura entre la cara interna y externa de la sección hueca.

4.3.3 DIFERENCIAS DE TEMPERATURA UNIFORME ENTRE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Cuando las diferencias en la componente uniforme de temperatura de diferentes tipos de elementos estructurales puedan producir efectos adversos, se tendrán en cuenta según lo indicado en este apartado.

Los **efectos de la diferencia de temperatura entre distintos elementos estructurales** se considerarán **simultáneamente** con los producidos por la **variación de la componente uniforme de temperatura de todos los elementos**.

<7.4 ACCIONES VARIABLES (Q)>

07 Presentación de la IAP-11

4.3.3.1 Diferencias en puentes con tirantes o péndolas

En el caso de puentes constituidos por *tableros atirantados* o que contengan *péndolas metálicas*, se considerará una diferencia entre la temperatura uniforme de los tirantes o péndolas y la temperatura uniforme del resto de los elementos del puente (pilono, arco o tablero) con el valor siguiente:

▪ Diferencia positiva:

$$T_{\text{tirantes}} - T_{\text{resto puente}} = +20^{\circ}\text{C}$$

▪ Diferencia negativa:

$$T_{\text{tirantes}} - T_{\text{resto puente}} = -10^{\circ}\text{C}$$

En el caso de que los tirantes o péndolas se proyecten pintados de *color claro* (poco absorbente de la luz solar), se podrá *reducir* la diferencia positiva indicada hasta un mínimo de **10°C**.

En el caso de que en el puente *coexistan elementos metálicos y de hormigón o mixtos* (por ejemplo, tablero de hormigón y pilono metálico), se entenderá que la *diferencia* de temperatura anterior es la que se produce entre los *tirantes* o péndolas y *el elemento que sufra menor variación* de la temperatura uniforme (en el ejemplo, el tablero de hormigón).

4.3.3.2 Diferencias en puentes con arcos o pilonos

En el caso de *puentes arco* o de *puentes atirantados*, se considerará una diferencia de temperatura uniforme entre el tablero y el arco o el pilono, que será la que resulte de aplicar lo indicado en el **apartado 4.3.1.1.2** tanto en el tablero como en el resto de elementos estructurales (arco o pilono), asimilándolos a un tablero. En cualquier caso, se supondrá una diferencia de temperatura entre arco o pilono y tablero superior a **±15°C**, es decir:

$$|T_{\text{arco o pilono}} - T_{\text{tablero}}| \geq 15^{\circ}\text{C}$$

07 Presentación de la IAP-11

4.4 NIEVE

En general, solo será necesario considerar la sobrecarga de *nieve* en puentes situados en *zonas de alta montaña* o *durante la construcción*.

De no existir datos específicos suficientes de la zona en que se ubica el puente, se tomará como *valor característico* de la sobrecarga de nieve el que se indica en el **apartado 4.4.2**. Los valores recogidos en esta Instrucción *no serán de aplicación* en puentes situados en lugares conocidos por sus *condiciones extremas de viento o nieve*. En el caso de *altitudes superiores* a **2200 m**, será necesario un *estudio específico* para determinar la sobrecarga de nieve.

4.4.1 SOBRECARGA DE NIEVE EN UN TERRENO HORIZONTAL

En la **Tabla 4.4-a** se indican los valores característicos de la sobrecarga de nieve sobre un terreno horizontal para cada una de las siete zonas climáticas (*representadas en la Figura 4.3-b*) en función de la altitud del terreno.

En la **Tabla 4.4-b** figura la altitud y los valores característicos de la sobrecarga de nieve sobre un terreno horizontal en las capitales de provincia y ciudades autónomas.

07 Presentación de la IAP-11

ALTITUD [m]	ZONA CLIMÁTICA INVERNAL (según Figura 4.3-b)						
	1	2	3	4	5	6	7
0	0.3	0.4	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
200	0.5	0.5	0.2	0.2	0.3	0.2	0.2
400	0.6	0.6	0.2	0.3	0.4	0.2	0.2
500	0.7	0.7	0.3	0.4	0.4	0.3	0.2
600	0.9	0.9	0.3	0.5	0.5	0.4	0.2
700	1.0	1.0	0.4	0.6	0.6	0.5	0.2
800	1.2	1.1	0.5	0.8	0.7	0.7	0.2
900	1.4	1.3	0.6	1.0	0.8	0.9	0.2
1000	1.7	1.5	0.7	1.2	0.9	1.2	0.2
1200	2.3	2.0	1.1	1.9	1.3	2.0	0.2
1400	3.2	2.6	1.7	3.0	1.8	3.3	0.2
1600	4.3	3.5	2.6	4.6	2.5	5.5	0.2
1800	-	4.6	4.0	-	-	9.3	0.2
2200	-	8.0	-	-	-	-	-

Tabla 4.4-b

07 Presentación de la IAP-11

CAPITAL	ALTITUD [m]	s_k [kN/m ²]	CAPITAL	ALTITUD [m]	s_k [kN/m ²]	CAPITAL	ALTITUD [m]	s_k [kN/m ²]
Albacete	690	0.6	Guadalajara	680	0.6	Pontevedra	0	0.3
Alicante	0	0.2	Huelva	0	0.2	Salamanca	780	0.5
Almería	0	0.2	Huesca	470	0.7	San Sebastian	0	0.3
Ávila	1130	1.0	Jaén	570	0.4	Santander	0	0.3
Badajoz	180	0.2	León	820	1.2	Segovia	1000	0.7
Barcelona	0	0.4	Lleida	150	0.5	Sevilla	10	0.2
Bilbao	0	0.3	Logroño	380	0.6	Soria	1090	0.9
Burgos	860	0.6	Lugo	470	0.7	Tarragona	0	0.4
Cáceres	440	0.4	Madrid	660	0.6	Tenerife	0	0.2
Cádiz	0	0.2	Málaga	0	0.2	Teruel	950	0.9
Castellón	0	0.2	Murcia	40	0.2	Toledo	550	0.5
Ciudad Real	640	0.6	Orense	130	0.4	Valencia	0	0.2
Córdoba	100	0.2	Oviedo	230	0.5	Valladolid	690	0.4
Coruña, A	0	0.3	Palencia	740	0.4	Vitoria	520	0.7
Cuenca	1010	1.0	Palma Mallor.	0	0.2	Zamora	650	0.4
Girona	70	0.4	Palma, Las	0	0.2	Zaragoza	210	0.5
Granada	690	0.5	Pamplona	450	0.7	Ceuta y Melilla	0	0.2

Tabla 4.4-a

07 Presentación de la IAP-11

4.4.2 SOBRECARGA DE NIEVE EN TABLEROS

Como valor característico de la sobrecarga de *nieve sobre tableros* q_k , se adoptará el definido por la siguiente expresión:

$$q_k = 0.8s_k$$

donde s_k es el valor característico de la sobrecarga de *nieve sobre un terreno horizontal*, según el **apartado 4.4.1**.

4.4.3 ACUMULACIONES LOCALES DE NIEVE

La sobrecarga definida con la fórmula del epígrafe anterior no tiene en cuenta acumulaciones eventuales de nieve debidas, por ejemplo, a redistribuciones artificiales de la misma (*equipos quitanieves*). En estos casos y cuando los elementos de contención de vehículos puedan impedir la caída de la nieve fuera del tablero, se deberá considerar la nieve extendida en una anchura igual a la del tablero menos el ancho de dos carriles, con un espesor de nieve igual a la altura del elemento de contención.

El peso específico de la nieve suele ser variable y, en general, aumenta con el tiempo transcurrido desde la nevada y depende de la zona y la altitud. Como peso específico medio durante el periodo en que la sobrecarga de nieve es máxima, se podrán adoptar los valores que se indican en la **Tabla 4.4-c**.

07 Presentación de la IAP-11

ALTITUD, H [m]	γ [kN/m ³]
$2000 \geq H \geq 1500$	3.3
$1500 \geq H \geq 1000$	2.7
$1000 \geq H \geq 800$	2.0
$H < 800$	1.5

Tabla 4.4-c

07 Presentación de la IAP-11

4.5 OTRAS ACCIONES VARIABLES

4.5.1 ACCIÓN DEL AGUA

4.5.1.1 Empuje hidrostático

La acción hidrostática se valorará a partir de un peso específico del agua igual a 9.8 kN/m^3 . En el caso de elementos sumergidos se estimará la subpresión con el mismo peso específico.

4.5.1.2 Empuje hidrodinámico

El empuje debido a corrientes de agua y arrastres se calculará mediante la expresión siguiente:

$$E = \left[\frac{1}{2} \rho v^2(T) \right] c_f A(T)$$

- E empuje total [N]
- ρ densidad del agua, igual a 1000 kg/m^3
- $v(T)$ velocidad de la corriente correspondiente al caudal de avenida de periodo de retorno de T años [m/s]
- c_f coeficiente de fuerza (o de arrastre) de la sección que soporta el empuje de la corriente, según la **Figura 4.2-b**; en el caso de una sección circular, el valor límite de $\phi v(T) \sqrt{c_e(z)} = 6 \text{ m}^2/\text{s}$ definido en la **Figura 4.2-b**, se debe sustituir por $\phi v(T) = 0.4 \text{ m}^2/\text{s}$
- $A(T)$ área de la superficie del elemento proyectada sobre un plano perpendicular a la corriente correspondiente a la sección mojada de la avenida de periodo de retorno de T años [m^2]

07 Presentación de la IAP-11

Para *situaciones persistentes*, se adoptará un **periodo de retorno de 100 años**. Si se considera necesario evaluar este empuje *para periodos de retorno mayores de 100 años*, la acción se considerará como **accidental**.

En el caso de que exista alguna posibilidad razonable de que algunos elementos flotantes puedan quedar retenidos por las pilas o el tablero del puente, se considerará su influencia a efectos de determinar el valor del coeficiente de fuerza c_f y el área de la superficie proyectada.

4.5.2 OTRAS SOBRECARGAS EN SITUACIONES TRANSITORIAS

Se tendrán en cuenta todas las *acciones debidas a equipos, maquinaria, material almacenado*, etc., que sea previsible que actúen **durante la construcción** o durante algún periodo de la vida en servicio de la estructura, considerando siempre su actuación sobre el esquema resistente que corresponda en ese momento.

El valor de las sobrecargas de construcción consideradas en los cálculos **deberá figurar expresamente en los planos del proyecto**, así como la exigencia de que ese valor no sea superado.

07 Presentación de la IAP-11

5.1 IMPACTOS

5.2 ACCIÓN SÍSMICA (A_E)

5.3 OTRAS ACCIONES ACCIDENTALES

07 Presentación de la IAP-11

5.1 IMPACTOS

5.1.1 IMPACTO DE VEHÍCULOS DE CARRETERA CONTRA UN ELEMENTO ESTRUCTURAL DEL PUENTE O PASARELA

A efectos de aplicación de esta Instrucción, el **impacto** de un vehículo de carretera contra las **pilas** o **elementos de sustentación** del puente o pasarela se asimilará a la actuación de una **fuerza estática** cuya resultante se encuentra situada a la **altura** más desfavorable entre **0.5 m** y **1.5 m** sobre la superficie del pavimento. Esta carga podrá considerarse **aplicada** sobre una superficie o zona de choque de **0.5 m** de altura por **1.5 m** de anchura (*o la anchura del propio elemento si es menor*). El valor de la fuerza estática horizontal equivalente será:

▪ **En la dirección del tráfico** 1000 kN

▪ **En la dirección perpendicular a la del tráfico** 500 kN

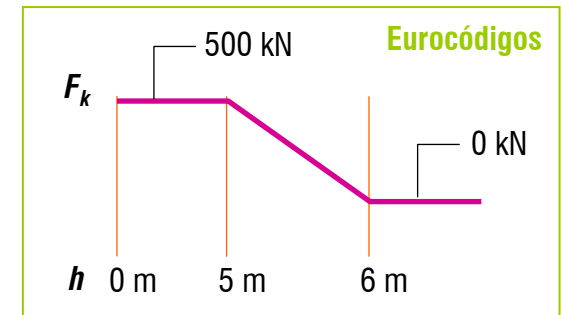
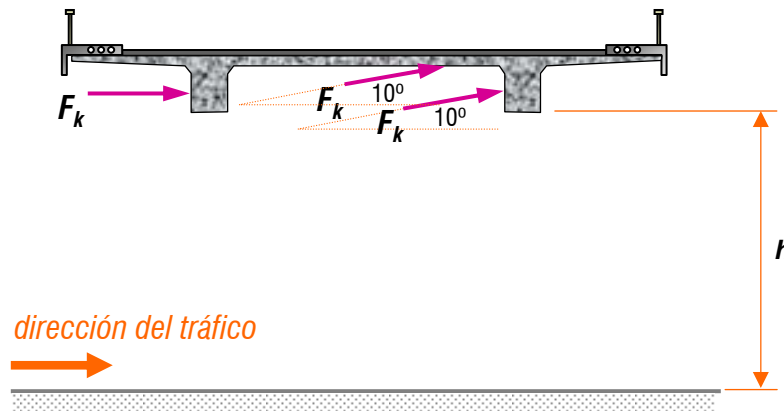
Se considerará que ambas acciones **no** actúan de forma simultánea.

No será necesario considerar la acción del impacto de vehículos contra un elemento de sustentación del puente cuando la **distancia** entre este y el borde de la calzada sea superior a lo indicado al respecto en la **reglamentación relativa a barreras de seguridad de la DGC**, o cuando, de acuerdo con esta misma reglamentación, se disponga la **protección** adecuada.

07 Presentación de la IAP-11

5.1.1 IMPACTO DE VEHÍCULOS DE CARRETERA CONTRA UN ELEMENTO ESTRUCTURAL DEL PUENTE O PASARELA (continuación)

El **impacto contra el tablero**, producido por **camiones** o las **cargas** por ellos transportadas, se asimilará a una **fuerza estática de 500 kN** aplicada sobre una superficie cuadrada de **0.25 m** de lado. Esta fuerza se considerará horizontal y paralela a la dirección del tráfico, si el impacto se produce sobre una superficie vertical. Sobre la cara inferior del tablero, se considerará la fuerza con el mismo valor y con una inclinación de **10°** sobre la superficie del pavimento en sentido ascendente.



No será necesario considerar el impacto de un vehículo contra el tablero si la altura libre bajo el mismo es mayor o igual que el **gálibo vertical mínimo reglamentario** o si se disponen **elementos de protección** dimensionados para soportar las cargas del párrafo anterior sin que se produzca afección al tablero.

07 Presentación de la IAP-11

5.1.2 IMPACTO CONTRA SISTEMAS DE CONTENCIÓN DE VEHÍCULOS

A efectos del proyecto estructural, el impacto de un vehículo contra el sistema de contención (*dispuesto conforme a la normativa vigente*) se **asimilará a una carga estática** compuesta por una **fuerza** horizontal transversal y un **momento** de eje longitudinal concomitantes, aplicados en la zona de conexión entre el elemento de contención y la estructura.

Las **fuerzas máximas** que el sistema de contención puede llegar a transferir a la estructura a través del sistema de anclaje serán las correspondientes al **fallo último del pretil** producido por cualquier impacto concebible y serán, normalmente, superiores a las medidas durante los ensayos de impacto de vehículo a escala real definidos por la normativa vigente (UNE-EN 1317).

Se tomará para esta acción el **valor nominal de las fuerzas y momentos máximos**, que facilitará a estos efectos el **fabricante** del sistema de contención, definidos según el párrafo anterior y determinados, mediante cálculos o mediante ensayos específicos, de acuerdo con la normativa correspondiente. Si **no** se conociera dicha información, se tomará el valor característico de la **resistencia del sistema de anclaje** del pretil.

Para el dimensionamiento transversal del tablero, se considerará que, **simultáneamente** con esta acción accidental, actúa una **fuerza vertical** debida a la presencia del vehículo de valor igual a $0.75Q_{1k}$, situada próxima a los anclajes del sistema de contención en la posición más desfavorable, siendo Q_{1k} la carga por eje del vehículo pesado correspondiente al **carril virtual 1**, indicada en la **Tabla 4.1-b**. Estas acciones **no** se combinarán con ninguna otra acción variable.

07 Presentación de la IAP-11

5.1.2 IMPACTO CONTRA SISTEMAS DE CONTENCIÓN DE VEHÍCULOS (continuación)

Para el **dimensionamiento local** de los detalles constructivos en la zona del tablero en la que se conecta el elemento de contención, se considerará una acción accidental igual a **1.5 veces** el valor de la acción indicado más arriba, con el objeto de asegurar que, bajo el impacto de un vehículo contra el pretil, el tablero no resulta dañado. A efectos de este dimensionamiento local, dicha acción accidental **no** se combinará con ninguna acción variable.

Además, el **fabricante** del sistema de contención adoptado deberá garantizar que el sistema de fijación del pretil al tablero dispone de un **dispositivo fusible** que permita la sustitución o reparación del sistema de contención dañado durante el impacto sin afectar al tablero y que asegure que las fuerzas transmitidas al mismo por los anclajes no superan las indicadas en este artículo.

5.1.3 IMPACTO DE VEHÍCULOS FERROVIARIOS

En el caso de los puentes de carretera que **crucen sobre una vía de ferrocarril** será necesario tener en cuenta las acciones a que pueda dar lugar la **colisión** de un tren contra los elementos de la **subestructura del puente**. El valor de dichas acciones, así como los criterios para su consideración, serán los indicados en la **Instrucción sobre las acciones a considerar en puentes de ferrocarril (IAPF-07)** o normativa que la sustituya.

07 Presentación de la IAP-11

5.1.4 IMPACTO DE EMBARCACIONES

En el caso de los puentes que *crucen cursos de agua navegables*, será necesario tener en cuenta las acciones a que pueda dar lugar la *colisión* de una embarcación contra los *elementos estructurales*.

Estas acciones serán función de las *características geométricas* (*eslora, manga, calado*) y *másicas* de la *embarcación de cálculo*, de su deformabilidad, de su velocidad, de la velocidad de la corriente, de la deformabilidad de la estructura y de los sistemas de defensa que se adopten.

07 Presentación de la IAP-11

5.2 ACCIÓN SÍSMICA (A_E)

La acción sísmica se considerará en el proyecto de puentes de acuerdo con las prescripciones recogidas en la vigente **Norma de Construcción Sismorresistente de Puentes (NCSP-07)** o normativa que la sustituya.

Para la **clasificación** de los puentes por su importancia, exclusivamente a efectos de la aplicación de dicha norma, se distinguirán la siguientes categorías:

a) *Puentes de importancia moderada*

Se podrán incluir en esta categoría aquellos puentes o estructuras en los que la consideración de la acción sísmica ***no sea económicamente justificable***, siempre que no sean críticos para el mantenimiento de las comunicaciones. En general, los puentes de la RCE ***no*** se considerarán incluidos en esta categoría, salvo que se justifique adecuadamente y se autorice de forma expresa por la DGC.

Para los puentes de importancia moderada, se tomará un **factor de importancia** de valor $\gamma_I=0$

b) *Puentes de importancia normal*

Son aquellos cuya destrucción puede interrumpir un servicio necesario para la colectividad o producir importantes pérdidas económicas sin que, en ningún caso, se trate de un servicio imprescindible o pueda dar lugar a efectos catastróficos.

Se incluye en este grupo, en general, todos los puentes de la RCE que ***no*** estén incluidos en la categoría de ***puentes de importancia especial***. En concreto, son puentes de importancia normal los pasos superiores, los pasos inferiores (*marco, pórticos o bóvedas*), los falsos túneles, las pasarelas y las pequeñas obras de paso pertenecientes a la red de alta capacidad, salvo que concurra alguna de las circunstancias citadas en el apartado siguiente.

07 Presentación de la IAP-11

c) *Puentes de importancia especial*

Son aquellos cuya destrucción puede *interrumpir un servicio imprescindible* después de haber ocurrido un terremoto, o aumentar los daños del mismo por *efectos catastróficos*. Se considerarán incluidos en este grupo los que estime la autoridad competente y, al menos los siguientes:

- *Puentes situados en las calzadas principales de la red de alta capacidad* (autovías y autopistas) y en las carreteras convencionales y vías de servicio cuya **IMD** sea superior a **7000 vehículos/día**.
- *Puentes que soportan líneas de servicios básicos* (conducciones eléctricas, de agua, etc.)
- *Puentes situados en los accesos principales a núcleos urbanos* y puentes urbanos situados en arterias o vías principales.
- *Puentes situados en vías* (incluyendo los pasos superiores e inferiores sobre las mismas) que den **acceso** a los siguientes tipos de instalaciones:
 - *Hospitales y centros sanitarios*
 - *Edificios para personal y equipos de ayuda, como cuarteles de bomberos, policía, fuerzas armadas y parques de maquinaria*
 - *Instalaciones básicas de las poblaciones como depósitos de agua, gas, combustibles, estaciones de bombeo, redes de distribución, centrales eléctricas y centros d transformación*

07 Presentación de la IAP-11

- *Puertos y aeropuertos de interés general del Estado*
- *Edificios e instalaciones básicas de comunicación: radio, televisión, centrales telefónicas y telegráficas*
- *Edificaciones donde está previsto albergar los centros de organización y coordinación en caso de un terremoto destructivo*
- *Parques de maquinaria o almacenes que alojen instrumental o maquinaria imprescindible para la ayuda inmediata*
- *Grandes presas y sus instalaciones básicas*
- *Edificios donde existan acumuladas materias tóxicas, inflamables o explosivas*
- *Centrales nucleares o instalaciones donde se procesen materiales radioactivos*

5.3 OTRAS ACCIONES ACCIDENTALES

En los puentes contruidos por *voladizos sucesivos*, se considerarán dos hipótesis de *caída del carro de avance*:

- Durante la operación de *desplazamiento* del carro
- Durante el *hormigonado* o izado de una dovela

A falta de estudios más precisos, podrá considerarse que el efecto dinámico de esta acción queda cubierto añadiendo a la hipótesis de eliminación de carga (caída de material) una **fuerza ascendente de valor igual al peso de la carga eliminada**.

07 Presentación de la IAP-11

6.1 VALORES REPRESENTATIVOS DE LAS ACCIONES

6.2 VALOR DE CÁLCULO DE LAS ACCIONES

6.3 COMBINACIÓN DE ACCIONES

<7.6 BASES PARA LA COMBINACIÓN DE ACCIONES>

07 Presentación de la IAP-11

6.1 VALORES REPRESENTATIVOS DE LAS ACCIONES

El *valor representativo* de una acción es el valor de la misma para la verificación de los estados límite.

El *principal valor representativo* de las acciones es su *valor característico*, que figura en los **capítulos 3, 4 y 5** de esta Instrucción. Para las acciones variables, se considerarán, además, otros valores representativos, según se especifica en este apartado.

6.1.1 VALOR REPRESENTATIVO DE LAS ACCIONES PERMANENTES

Para las *acciones permanentes* se considerará un único valor representativo, coincidente con el valor característico G_k o G_k^* .

En el caso del peso del pavimento y de las tuberías u otros servicios situados en el puente, se tomarán dos valores característicos, $G_{k,sup}$ y $G_{k,inf}$, definidos en el **apartado 3.1.2**.

Para las *acciones permanentes de valor no constante*, definidas conforme al **apartado 3.2**, el valor característico será el correspondiente al instante t en el que se realiza la comprobación.

07 Presentación de la IAP-11

6.1.2 VALOR REPRESENTATIVO DE LAS ACCIONES VARIABLES

Para cada una de las *acciones variables*, **excepto el tren de carga de fatiga**, además de su valor característico, indicado en el **capítulo 4**, se considerarán los siguientes valores representativos, según la comprobación de que se trate:

▪ **Valor de combinación** $\psi_0 Q_k$: será el valor de la acción **cuando actúe con alguna otra acción variable**, para tener en cuenta la pequeña probabilidad de que actúen simultáneamente los valores más desfavorables de varias acciones independientes.

Este valor se utilizará en las comprobaciones de *estados límite últimos* en **situación persistente o transitoria** y de *estados límite de servicio irreversibles*.

▪ **Valor frecuente** $\psi_1 Q_k$: será el valor de la acción tal que **sea sobrepasado durante un periodo de corta duración** respecto a la vida útil del puente. Corresponde a un periodo de retorno de una semana.

Este valor se utilizará en las comprobaciones de *estados límite últimos* en **situación accidental** y de *estados límite de servicio reversibles*.

▪ **Valor casi-permanente** $\psi_2 Q_k$: será el valor de la acción tal que **sea sobrepasado durante una parte de la vida útil** del puente.

Este valor se utilizará también en las comprobaciones de *estados límite últimos* en **situación accidental** y de *estados límite de servicio reversibles*, además de en la evaluación de los efectos diferidos.

<7.6 BASES PARA LA COMBINACIÓN DE ACCIONES>

07 Presentación de la IAP-11

6.1.2 VALOR REPRESENTATIVO DE LAS ACCIONES VARIABLES (continuación)

El valor de los *factores de simultaneidad* ψ será *diferente según la acción* de que se trate. Sus valores quedan recogidos en la **Tabla 6.1-a**. El *tren de carga de fatiga* tendrá un único valor representativo coincidente con el indicado en el **apartado 4.1.5**.

ACCIÓN		ψ_0	ψ_1	ψ_2	
Sobrecarga de uso	gr 1, Cargas verticales	Vehículos pesados	0.75	0.75	0
		Sobrecarga uniforme	0.4	0.4	0/0.2 ⁽¹⁾
		Carga en aceras	0.4	0.4	0
	gr 2, Fuerzas Horizontales	0	0	0	
	gr 3, Peatones	0	0	0	
	gr 4, Aglomeraciones	0	0	0	
	Sobrecarga de uso en pasarelas		0.4	0.4	0

(1) El factor de simultaneidad ψ_2 correspondiente a la sobrecarga uniforme se tomará igual a **0**, salvo en el caso de la combinación de acciones en situación sísmica (**apartado 6.3.1.3**), para el cual se tomará igual a **0.2**

Tabla 6.1-a

07 Presentación de la IAP-11

ACCIÓN			ψ_0	ψ_1	ψ_2
Viento	F_{wk}	En situación persistente	0.6	0.2	0
		En construcción	0.8	0	0
		En pasarelas	0.3	0.2	0
Acción térmica	T_k		0.6	0.6	0.5
Nieve	$Q_{sn,k}$	En construcción	0.8	0	0
Acción del agua	W_k	Empuje hidrostático	1.0	1.0	1.0
		Empuje hidrodinámico	1.0	1.0	1.0
Sobrecarga en construcción	Q_c		1.0	0	1.0

Tabla 6.1-a (continuación)

6.1.3 VALOR REPRESENTATIVO DE LAS ACCIONES ACCIDENTALES

Para las acciones accidentales se considerará un **único valor representativo**, coincidente con el **valor nominal** definido en el **capítulo 5**. En el caso de la **acción sísmica**, se considerará lo que se indica sobre el particular en la **NCSP-07** o normativa que la sustituya.

<7.6 BASES PARA LA COMBINACIÓN DE ACCIONES>

07 Presentación de la IAP-11

6.2 VALORES DE CÁLCULO DE LAS ACCIONES

El *valor de cálculo* de una acción se obtiene multiplicando su valor representativo por el correspondiente *coeficiente parcial* γ_F .

Los coeficientes γ_F tendrán valores diferentes según la *situación* de proyecto de que se trate (*bien persistente o transitoria, bien accidental o sísmica*) y según el *estado límite* objeto de comprobación (*equilibrio de la estructura o comprobaciones resistentes*).

Los valores de coeficientes dados en los apartados siguientes, tienen en cuenta las incertidumbres tanto en la estimación del valor representativo de las acciones como en la modelización del efecto de las acciones.

6.2.1 VALOR DE CÁLCULO PARA COMPROBACIONES EN ELU

6.2.1.1 En situación persistente o transitoria

6.2.1.1.1 Comprobaciones de equilibrio (EQU)

Se adoptarán los valores de los coeficientes parciales γ_F indicados en la **Tabla 6.2-a**.

6.2.1.1.2 Comprobaciones de resistencia (STR)

Se adoptarán los valore de los coeficientes parciales γ_F indicados en la **Tabla 6.2-b**.

07 Presentación de la IAP-11

ACCIÓN		EFECTO	
		ESTABILIZADOR	DESESTABILIZADOR
Permanente (G y G^*)	Peso propio	0.9 ⁽¹⁾	1.1 ⁽¹⁾
	Carga muerta	0.9 ⁽¹⁾	1.1 ⁽¹⁾
	Empuje del terreno	1.0	1.5
Variable (Q)	Sobrecarga de uso	0	1.35
	Sobrecarga de uso en terraplenes	0	1.5
	Acciones climáticas ⁽²⁾	0	1.5
	Empuje hidrostático	0	1.5
	Empuje hidrodinámico	0	1.5
	Sobrecargas de construcción	0	1.35

COEFICIENTES PARCIALES PARA LAS ACCIONES γ_F (PARA LAS COMPROBACIONES DE EQUILIBRIO)

Tabla 6.2-a

<7.6 BASES PARA LA COMBINACIÓN DE ACCIONES>

07 Presentación de la IAP-11

	ACCIÓN	EFECTO	
		FAVORABLE	DESFAVORABLE
Permanente de valor constante (G)	Peso propio	1.0	1.35
	Carga muerta	1.0	1.35
Permanente de valor no constante (G^*)	Pretensado P_1	1.0	1.0/1.2 ⁽³⁾ /1.3 ⁽⁴⁾
	Pretensado P_2	1.0	1.35
	Otras presolicitaciones	1.0	1.0
	Reológicas	1.0	1.35
	Empuje del terreno	1.0	1.5
	Asientos	0	1.2/1.35 ⁽⁵⁾
	Rozam. de apoyos desliz.	1.0	1.35

COEFICIENTES PARCIALES PARA LAS ACCIONES γ_F (PARA LAS COMPROBACIONES DE RESISTENCIA)

Tabla 6.2-b

<7.6 BASES PARA LA COMBINACIÓN DE ACCIONES>

07 Presentación de la IAP-11

ACCIÓN		EFECTO	
		FAVORABLE	DESFAVORABLE
Variable (Q)	Sobrecarga de uso	0	1.35
	Sobrecarga de uso en terraplenes	0	1.5
	Acciones climáticas	0	1.5
	Empuje hidrostático	0	1.35
	Empuje hidrodinámico	0	1.5
	Sobrecargas de construcción	0	1.35

COEFICIENTES PARCIALES PARA LAS ACCIONES γ_f (PARA LAS COMPROBACIONES DE RESISTENCIA)

Tabla 6.2-b (continuación)

07 Presentación de la IAP-11

- (1) Los valores de **0.9** y **1.1** podrán sustituirse por **0.95** y **1.05** respectivamente, si se prevé la colocación de sistemas de control que permitan conocer, durante la ejecución de la obra, el valor de las fuerzas de desequilibrio y si se pueden adoptar las medidas correctoras necesarias para mantener este valor dentro de los límites que garanticen la seguridad de todos los elementos de la estructura afectados por esta acción. Los equipos y sistemas de control deberán ser definidos y valorados en los diferentes documentos del proyecto, de forma que sea preceptiva su instalación en la obra, incluyéndose una descripción detallada de las medidas correctoras que deberán adoptarse caso de ser necesarias.
- (2) Por acciones climáticas se entiende la acción térmica, el viento y la nieve.
- (3) El coeficiente $\gamma_{G^*}=1.2$ será de aplicación al pretensado P_1 en el caso de verificaciones locales como la transmisión de la fuerza de pretensado al hormigón en zonas de anclajes, cuando se toma como valor de la acción el que corresponde a la carga máxima (*tensión de rotura*) del elemento a tesar
- (4) El coeficiente $\gamma_{G^*}=1.3$ se aplicará al pretensado P_1 en casos de inestabilidad (*pandeo*) cuando esta pueda ser inducida por el axil debido a un pretensado exterior.
- (5) El coeficiente $\gamma_{G^*}=1.35$ corresponde a una evaluación de los efectos de los asientos mediante un cálculo elasto-plástico, mientras que el valor $\gamma_{G^*}=1.2$ corresponde a un cálculo elástico de esfuerzos.

Para aplicar los diferentes valores de los coeficientes γ_F se tendrán en cuenta las prescripciones siguientes:

- Para las **acciones permanentes de valor constante G** , los coeficientes $\gamma_F=1.0$ y $\gamma_F=1.35$ se aplicarán a la **totalidad** de la acción del mismo origen, según su efecto total sea favorable o desfavorable, respectivamente.
- En el caso de la carga de pavimento, se considerará para la totalidad de la sección:
 - **El valor representativo inferior $G_{k,inf}$** ponderado por $\gamma_G=1.0$ cuando su efecto sea favorable.
 - **El valor representativo superior $G_{k,sup}$** ponderado por $\gamma_G=1.35$ cuando su efecto sea desfavorable.

07 Presentación de la IAP-11

■ Cuando la comprobación resistente pueda ser muy *sensible* a variaciones de las acciones permanentes de una a otra parte de la estructura (como por ejemplo, en un puente en construcción mediante voladizos sucesivos), se considerará además el criterio complementario siguiente:

■ **Para la parte favorable de la acción:** $\gamma_{G,inf} G_{k,inf}$ con $\gamma_{G,inf}=0.9$

■ **Para la parte desfavorable de la acción:** $\gamma_{G,sup} G_{k,sup}$ con $\gamma_{G,sup}=1.1$

■ Se considerará la acción hiperestática producida por el pretensado P_1 , teniendo en cuenta el valor de la fuerza de pretensado $P_{k,t}$ en el instante t en que se realiza la comprobación, aplicando los coeficientes parciales aquí especificados.

■ Para la acción del pretensado P_2 que, según el **apartado 3.2.1.1**, se trata como acción asociada a las cargas permanentes, además del criterio de mayoración de la **Tabla 6.2-b** (según el cual se aplica a la acción del pretensado los mismos coeficientes que a las acciones permanentes que se quieren contrarrestar), se considerarán los siguientes criterios complementarios:

■ **Criterio complementario 1:** $\gamma_{G^*}=0.95$ para la acción del pretensado P_2
 $\gamma_G=1.05$ para las acciones permanentes contrarrestadas por P_2

■ **Criterio complementario 2:** $\gamma_{G^*}=1.05$ para la acción del pretensado P_2
 $\gamma_G=0.95$ para las acciones permanentes contrarrestadas por P_2

Se adoptará para el cálculo el resultado más desfavorable de los obtenidos aplicando los **tres** criterios aquí definidos.

07 Presentación de la IAP-11

Los *dos últimos criterios complementarios no serán aplicables* para aquellos casos en que la *flexibilidad del tablero* sea tal que un desequilibrio entre las acciones mencionadas produzca deformaciones apreciables que puedan ser detectadas y corregidas mediante un adecuado control. Este hecho deberá ser debidamente justificado en el proyecto.

- Para todas las acciones debidas a *movimientos impuestos* (*retracción, fluencia, asientos, efectos térmicos...*) se deberá considerar, al evaluar los esfuerzos producidos por las mismas, su *posible reducción* debido a la pérdida de rigidez de la estructura.

- El efecto de las acciones debidas a movimientos impuestos podrá ignorarse en *ELU* cuando, de acuerdo con la normativa específica correspondiente a cada material, la estructura tenga suficiente ductilidad y así se acredite en el proyecto.

6.2.1.1.3 Comprobaciones de fatiga (FAT)

Teniendo en cuenta que las *comprobaciones de fatiga* están profundamente vinculadas al material estructural, los *coeficientes parciales* serán los recogidos por la normativa específica que corresponda.

07 Presentación de la IAP-11

6.2.1.2 En situación accidental

Tanto para las comprobaciones de *equilibrio* (*EQU*) como *resistentes* (*STR*), se considerarán directamente como *valores de cálculo* los definidos, para las acciones debidas a impactos y para otras acciones accidentales, en los **apartados 5.1** y **5.3**, respectivamente.

6.2.1.3 En situación sísmica

Tanto para las comprobaciones de equilibrio (*EQU*) como resistentes (*STR*), se considerará como *valor de cálculo de la acción sísmica* el definidos por la vigente **Norma de Construcción Sismorresistente de Puentes (NCSP-07)** o normativa que la sustituya.

6.2.2 VALOR DE CÁLCULO PARA COMPROBACIONES EN ELS

Para las comprobaciones en *estado límite de servicio*, se adoptarán los valores de los coeficientes parciales γ_F indicados en la **Tabla 6.2-c**.

07 Presentación de la IAP-11

	ACCIÓN	EFECTO	
		FAVORABLE	DESFAVORABLE
Permanente de valor constante (G)	Peso propio	1.0	1.0
	Carga muerta	1.0	1.0
Permanente de valor no constante (G*)	Pretensado P₁	0.9 ⁽¹⁾	1.1 ⁽¹⁾
	Pretensado P₂	1.0	1.0
	Otras presolicitaciones	1.0	1.0
	Reológicas	1.0	1.0
	Empuje del terreno	1.0	1.0
	Asientos	0	1.0
	Rozam. de apoyos desliz.	1.0	1.0

COEFICIENTES PARCIALES PARA LAS ACCIONES γ_f (**ELS**)

Tabla 6.2-c

(1) Para la acción del pretensado se tomarán los coeficientes de la **EHE-08** o normativa que la sustituya. En la tabla figuran los valores que la **EHE-08** recoge para el caso de estructuras postesas. En el caso de estructuras pretesas, los coeficientes parciales son **0.95** y **1.05** para efecto favorable y desfavorable respectivamente.

<7.6 BASES PARA LA COMBINACIÓN DE ACCIONES>

07 Presentación de la IAP-11

ACCIÓN		EFECTO	
		FAVORABLE	DESFAVORABLE
Variable (Q)	Sobrecarga de uso	0	1.0
	Sobrecarga de uso en terraplenes	0	1.0
	Acciones climáticas	0	1.0
	Empuje hidrostático	0	1.0
	Empuje hidrodinámico	0	1.0
	Sobrecargas de construcción	0	1.0

COEFICIENTES PARCIALES PARA LAS ACCIONES γ_f (ELS)

Tabla 6.2-c (continuación)

07 Presentación de la IAP-11

■ Para la acción del pretensado P_2 que, según el **apartado 3.2.1.1**, se trata como acción asociada a las cargas permanentes, además del criterio de ponderación de la **Tabla 6.2-c** (*según el cual se aplica a la acción del pretensado los mismos coeficientes que a las acciones permanentes que se quieren contrarrestar*), se considerarán los siguientes criterios complementarios:

- **Criterio complementario 1:** $\gamma_{G^*}=0.95$ para la acción del pretensado P_2
 $\gamma_G=1.05$ para las acciones permanentes contrarrestadas por P_2
- **Criterio complementario 2:** $\gamma_{G^*}=1.05$ para la acción del pretensado P_2
 $\gamma_G=0.95$ para las acciones permanentes contrarrestadas por P_2

Se adoptará para el cálculo el resultado más desfavorable de los obtenidos aplicando los **tres** criterios aquí definidos.

■ Los **dos últimos criterios complementarios no serán aplicables** para aquellos casos en que la **flexibilidad del tablero** sea tal que un desequilibrio entre las acciones mencionadas produzca deformaciones apreciables que puedan ser detectadas y corregidas mediante un adecuado control. Este hecho deberá ser debidamente justificado en el proyecto.

07 Presentación de la IAP-11

6.3 COMBINACIÓN DE ACCIONES

Para cada situación de proyecto se identificarán las hipótesis de carga críticas y, para cada una de ellas, el valor de cálculo del efecto de las acciones (ver **apartado 2.3.3**) se obtendrá combinando las acciones que puedan actuar simultáneamente, según los criterios generales que se indican en este apartado.

Las combinaciones de acciones para las comprobaciones de **fatiga** serán las indicadas en la **normativa específica** correspondiente a cada material estructural.

6.3.1 COMBINACIONES PARA COMPROBACIONES EN *ELU*

Las combinaciones de acciones a tener en cuenta para las verificaciones en ***ELU***, excluida la fatiga, serán las indicadas a continuación.

6.3.1.1 En situación persistente o transitoria

La combinación de acciones se hará de acuerdo con la expresión siguiente (*combinación fundamental*):

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} \gamma_{G^*,m} G_{k,m}^* + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

07 Presentación de la IAP-11

donde:

$G_{k,j}$	valor característico de cada acción permanente
$G_{k,m}^*$	valor característico de cada acción permanente de valor no constante
$Q_{k,1}$	valor característico de la acción variable dominante
$\psi_{0,i} Q_{k,i}$	valor de combinación de las acciones variables concomitantes con la acción variable dominante
γ_G, γ_Q	coeficientes parciales

Deberán realizarse ***tantas*** hipótesis o combinaciones *como sea necesario*, considerando, en cada una de ellas, ***una de las acciones variables*** como ***dominante*** y el resto como concomitantes.

Al combinar las diferentes acciones variables, se tendrán en cuenta las prescripciones siguientes:

- La sobrecarga de uso estará representada, para su combinación con el resto de acciones, mediante los grupos de cargas definidos en la **Tabla 4.1-c**, que son excluyentes entre sí.

- Cuando se considere la **sobrecarga de uso** como **predominante**, se considerará el **viento concomitante** correspondiente, con las indicaciones que figuran en el **apartado 4.2.3**.

<7.6 BASES PARA LA COMBINACIÓN DE ACCIONES>

07 Presentación de la IAP-11

▪ Cuando se considere el **grupo de cargas de tráfico gr 2** (*fuerzas horizontales con su valor característico*), **no** se considerará la actuación del **viento** ni de la **nieve**.

▪ Cuando se considere el **viento transversal** sobre el tablero, **se considerará** la actuación simultánea de la componente vertical del viento y el momento de vuelco correspondiente, definidos en el **apartado 4.2.5.1**.

▪ Cuando se considere el **viento longitudinal** sobre el tablero, según el **apartado 4.2.5.2**, **no** se considerará la actuación simultánea del viento transversal, ni el empuje vertical, ni el momento de vuelco correspondiente.

▪ Cuando se considere la **acción del viento** como **predominante**, **no** se tendrá en cuenta la actuación de la **sobrecarga de uso**.

▪ **No** se considerará la **acción simultánea** del **viento** y de la **acción térmica**.

▪ La **concomitancia** de la componente **uniforme** de temperatura y de la componente de **diferencia** de temperatura se regirá por lo expuesto en el **apartado 4.3.1.3**.

▪ En general, **no** se considerará la **acción simultánea** de la **carga de nieve** y de la **sobrecarga de uso** salvo en zonas de alta montaña, en cuyo caso se estudiará para el proyecto concreto la distribución espacial y la concomitancia de ambas acciones.

07 Presentación de la IAP-11

6.3.1.2 En situación accidental

La combinación de acciones en situación accidental se hará de acuerdo con la expresión siguiente:

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} G_{k,m}^* + \psi_{1,1} Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \psi_{2,i} Q_{k,i} + A_d$$

donde:

$G_{k,j}$	valor representativo de cada acción permanente
$G_{k,m}^*$	valor representativo de cada acción permanente de valor no constante
$\psi_{1,1} Q_{k,1}$	valor frecuente de la principal acción variable concomitante con la acción accidental
$\psi_{2,i} Q_{k,i}$	valor casi-permanente del resto de las acciones variables concomitantes
A_d	valor de cálculo de la acción accidental

- En general, en **situación accidental**, **no** se considerará la actuación del **viento** ni de la **nieve**.
- Cuando la **situación accidental** esté provocada por un **impacto contra el sistema de contención de vehículos**, se tendrá en cuenta lo expuesto en el **apartado 5.1.2**, respecto a la **combinación con otras acciones**.

07 Presentación de la IAP-11

6.3.1.3 En situación sísmica

La combinación de acciones en situación sísmica se hará de acuerdo con la expresión siguiente:

$$\sum_{j \geq 1} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} G_{k,m}^* + \psi_{2,1} Q_{k,1} + A_{Ed}$$

donde:

$G_{k,j}$	valor representativo de cada acción permanente
$G_{k,m}^*$	valor representativo de cada acción permanente de valor no constante
$\psi_{2,i} Q_{k,i}$	valor casi-permanente de la sobrecarga de uso (<i>según</i> Tabla 6.1-a)
A_{Ed}	valor de cálculo de la acción sísmica

07 Presentación de la IAP-11

6.3.2 COMBINACIONES PARA COMPROBACIONES EN ELS

Según el estado límite de servicio que se vaya a verificar, se adoptará uno de los **tres** tipos de combinación de acciones indicados a continuación.

▪ **Combinación característica** (*poco probable o rara*):

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} \gamma_{G^*,m} G_{k,m}^* + \gamma_{Q,1} Q_{k,1} + \sum_{i > 1} \gamma_{Q,i} \psi_{0,i} Q_{k,i}$$

Esta combinación, que coincide formalmente con la **combinación fundamental de ELU**, se utiliza en general para la verificación de **ELS irreversibles**.

▪ **Combinación frecuente:**

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} G_{k,j} + \sum_{m \geq 1} \gamma_{G^*,m} G_{k,m}^* + \gamma_{Q,1} \psi_{1,1} Q_{k,1} + \sum_{j > 1} \gamma_{Q,j} \psi_{2,i} G_{k,j}$$

Esta combinación se utiliza en general para la verificación de **ELS reversibles**.

07 Presentación de la IAP-11

■ Combinación casi-permanente:

$$\sum_{j \geq 1} \gamma_{G,j} \mathbf{G}_{k,j} + \sum_{m \geq 1} \gamma_{G^*,m} \mathbf{G}_{k,m}^* + \sum_{j > 1} \gamma_{Q,j} \psi_{2,i} \mathbf{G}_{k,j}$$

Esta combinación se utiliza también para la verificación de algunos *ELS reversibles* y para la evaluación de los *efectos diferidos*.

■ Serán también de aplicación las prescripciones recogidas en el **apartado 6.3.1.1**.

07 Presentación de la IAP-11

7.1 CRITERIOS FUNCIONALES RELATIVOS A FLECHAS

7.2 CRITERIOS FUNCIONALES RELATIVOS A VIBRACIONES

**<7.7 CRITERIOS PARA LA COMPROBACIÓN DE LOS
ESTADOS LÍMITE DE SERVICIO>**

07 Presentación de la IAP-11

7.1 CRITERIOS FUNCIONALES RELATIVOS A FLECHAS

7.1.1 ESTADOS LÍMITE DE DEFORMACIONES

Se deberá verificar que la *flecha vertical máxima* correspondiente al *valor frecuente de la sobrecarga de uso* no supera los valores siguientes:

- $L/1000$ en *puentes de carretera*
- $L/1200$ en *pasarelas* o en *puentes con zonas peatonales*

Siendo L la *luz del vano*.

Podrán admitirse valores ligeramente superiores a los valores límite anteriores si, mediante un estudio de comportamiento dinámico de la estructura, se comprueba que la amplificación de las deformaciones estáticas y el nivel de vibraciones del tablero, bajo el paso de sobrecargas móviles, se mantienen dentro de los valores admisibles (ver *apartado 7.2*)

En tableros con *voladizos laterales importantes*, o con *flexibilidad transversal en secciones coincidentes con junta de dilatación*, se deberá comprobar que la flecha *vertical máxima* en la sección transversal de junta, bajo la acción de la *sobrecarga de uso frecuente*, es menor que **5 mm** o que el valor especificado por el fabricante de la junta.

07 Presentación de la IAP-11

7.1.2 CONTRAFLECHAS DE EJECUCIÓN

En puentes metálicos y mixtos, y en puentes de hormigón con luces importantes o montajes evolutivos, así como en aquellos en los que se produzcan deformaciones instantáneas o diferidas que puedan afectar a la apariencia o a la funcionalidad de la estructura, el proyecto deberá definir unas **contraflechas de ejecución** tales que, para la **totalidad de la carga permanente** y la **mitad de los efectos reológicos**, la geometría de la estructura se **ajuste al máximo a la rasante** teórica de proyecto.

Las contraflechas de ejecución serán en general verticales aunque en ciertos casos puede ser necesario definir, además, contraflechas horizontales o contragiros transversales de la sección (en puentes curvos por ejemplo).

En las **secciones de apoyo** y en las **secciones de unión entre tramos de montaje evolutivos**, el proyecto deberá definir los **contragiros** de ejecución que permitan garantizar, respectivamente, la adecuada **nivelación de los aparatos de apoyo y sus cuñas** y la **correcta ejecución de las uniones**, soldadas o atornilladas, entre tramos.

El proyecto definirá las distintas fases de montaje y puesta en carga de la estructura para las que se han obtenido las **contraflechas** y **contragiros de ejecución**. **Cualquier variación** del proceso o secuencia de montaje respecto de lo establecido en proyecto, exigirá una **nueva evaluación** de las citadas contraflechas y contragiros.

07 Presentación de la IAP-11

7.1.2 CONTRAFLECHAS DE EJECUCIÓN (continuación)

Las deformaciones parásitas debidas al soldeo, en puentes metálicos y mixtos, o las condiciones reales de ejecución del puente, deberán **contrarrestarse** mediante el **seguimiento** y adopción de **medidas correctoras**, durante las diferentes fases de ejecución, para minimizar las desviaciones de la geometría final (longitudinal y transversal) de la estructura respecto de la rasante teórica de proyecto.

Se comprobará que, bajo la actuación de la **totalidad de las cargas permanentes y de las deformaciones diferidas**, la geometría final del puente será tal que **no se producen zonas de acumulación de agua**, teniendo en cuenta el sistema de drenaje proyectado para la plataforma.

07 Presentación de la IAP-11

7.2 CRITERIOS FUNCIONALES RELATIVOS A VIBRACIONES

En este apartado se recogen los *criterios de confort* a tener en cuenta en el proyecto de *pasarelas* y *puentes con zonas peatonales*, en relación con las *vibraciones producidas por el tráfico*.

Queda fuera del ámbito de este apartado el estudio de los *efectos dinámicos inducidos por el viento* en tableros, cables, péndolas. Etc. En el caso de *elementos* cuya *seguridad* resistente o a fatiga pueda ser *sensible a estos efectos*, su comprobación se efectuará en el marco de la verificación de los **estados límite últimos**.

En general, se considerará *verificado el estado límite de servicio de vibraciones* cuando las **aceleraciones máximas** que puedan producirse en cualquier zona transitable por peatones *no superen ciertos valores límite*.

En tableros con *voladizos laterales esbeltos*, además del *comportamiento dinámico general* de la estructura, será necesario tener también en cuenta el *comportamiento local de los voladizos* y la posible interacción entre ambos.

Para los *análisis dinámicos de puentes y pasarelas* en condiciones de servicio, se adoptarán, salvo justificación específica alternativa, los valores medios del *índice de amortiguamiento* que figuran en la **Tabla 4.2-g**.

07 Presentación de la IAP-11

7.2.1 ESTADO LÍMITE DE VIBRACIONES EN PUENTES CON ZONAS PEATONALES

En general, con las salvedades indicadas en este apartado, se **considerará verificado** el estado límite de servicio de vibraciones si se **cumple el criterio de limitación de las flechas verticales** establecido en el **apartado 7.1.1**.

Será necesario comprobar mediante estudios dinámicos el nivel de vibraciones en puentes de carretera con zonas peatonales, en los siguientes casos:

- Cuando se proyecten tableros en los que **no se satisface** el estado límite de deformaciones según el **apartado 7.1.1**
- Aunque se **cumpla** el estado límite de deformaciones según el **apartado 7.1.1**:
 - en puentes urbanos con condiciones de tráfico peatonal intenso
 - En puentes con voladizos laterales transitables esbeltos
 - En puentes de tipologías estructurales singulares o nuevos materiales

En estos casos se **comprobará**, mediante un **análisis dinámico**, que la **aceleración vertical** máxima bajo el paso de un camión de **400 kN** de peso sobre la plataforma, a distintas velocidades: de **20 a 80 km/h** con incrementos de 10 en 10 km/h, **no supere los valores límite**, función del nivel de confort exigido, que se establecen para el caso de pasarelas.

07 Presentación de la IAP-11

En el caso de tableros de puentes con *voladizos laterales esbeltos* sometidos a *tráfico peatonal intenso*, se deberán asimismo cumplir los **límites de confort** establecidos para las **pasarelas** bajo los efectos inducidos por el tráfico peatonal según el **apartado 7.2.2**.

7.2.2 ESTADO LÍMITE DE VIBRACIONES EN PASARELAS PEATONALES

En general, con las salvedades indicadas en este apartado, se *considerará verificado* el estado límite de servicio de vibraciones si sus *frecuencias naturales* se sitúan *fuera* de los rangos que figuran a continuación:

- Rango crítico para vibraciones verticales y longitudinales: **1.2 a 4.60 Hz**
- Rango crítico para vibraciones laterales: **0.50 a 1.20 Hz**

En aquellas pasarelas cuyas *frecuencias naturales* se encuentren *dentro* de estos rangos, será necesario efectuar **estudios dinámicos específicos** para asegurar los requisitos de confort de los peatones.

07 Presentación de la IAP-11

En cualquier caso, *con independencia del valor de las frecuencias naturales*, también será necesario comprobar mediante **estudios dinámicos** la adecuada respuesta vibratoria de las pasarelas cuando se produzca alguna de las circunstancias siguientes:

- **Luz superior a 50 m**
- **Anchura útil superior a 3 m**
- **Tipología estructural singular o nuevos materiales**
- **Ubicación en zona urbana donde sea previsible un tráfico intenso de peatones o exista riesgo de concentración de personas sobre la propia pasarela**

Los **requisitos de confort** se establecerán en el proyecto de forma razonada en función de la **categoría** de la pasarela (*zona urbana con tráfico peatonal intenso, uso medio, baja utilización en zona rural, etc.*) y de la **situación de proyecto** considerada (*tipo de tráfico peatonal asociado a probabilidad de ocurrencia*). Como referencia, podrán adoptarse los valores límite de aceleraciones que figuran en la tabla siguiente.

Los **modelos de carga dinámica** considerados deberán ser representativos de las **condiciones de tráfico** previstas para las distintas **situaciones de proyecto** analizadas, contemplando la densidad de los **flujos** peatonales, el **ritmo** de sus movimientos, la **sincronización** entre peatones, etc.

07 Presentación de la IAP-11

GRADO DE CONFORT	RANGO DE ACELERACIONES	
	VERTICALES	LATERALES
Máximo	$<0.50 \text{ m/s}^2$	$<0.10 \text{ m/s}^2$
Medio	$0.50 \text{ m/s}^2 \text{ a } 1.00 \text{ m/s}^2$	$0.10 \text{ m/s}^2 \text{ a } 0.30 \text{ m/s}^2$
Mínimo	$1.00 \text{ m/s}^2 \text{ a } 2.50 \text{ m/s}^2$	$0.30 \text{ m/s}^2 \text{ a } 0.80 \text{ m/s}^2$
No aceptable	$>2.50 \text{ m/s}^2$	$>0.80 \text{ m/s}^2$

Tabla 7.2-a

07 Presentación de la IAP-11

- ❑ Todo puente proyectado de acuerdo con esta Instrucción deberá ser sometido a pruebas de carga antes de su puesta en servicio, según lo indicado en el **preceptivo anejo** que sobre la materia incluirá todo proyecto aprobado por la DGC.
- ❑ Tales pruebas de carga podrán ser **estáticas** o **dinámicas**. Las primeras serán **obligatorias** para aquellas obras en que alguno de sus vanos tenga una **luz igual o superior a 12 m**. Para luces inferiores, se podrá decidir la realización de la prueba de carga en función de las circunstancias específicas de la estructura.
- ❑ En caso de ser necesario, el proyecto de la prueba de carga será **revisado y adaptado** una vez finalizada la construcción del puente, para tener en cuenta los **medios de carga** realmente disponibles, así como para recoger en la modelización de la estructura las **variaciones** que se hayan podido producir con respecto a lo inicialmente considerado en el proyecto.
- ❑ Las **pruebas de carga dinámicas** serán preceptivas, y así quedará recogido en el proyecto, en puentes de **luces superiores a 60 m** o en aquellos cuyo **diseño sea inusual**, se utilicen **nuevos materiales** o contengan zonas de tránsito peatonal en las que se prevea que las vibraciones puedan causar **molestias** a los usuarios. En estos casos, en el proyecto se determinarán los parámetros dinámicos estructurales (*modos principales de vibración y sus frecuencias correspondientes*).
- ❑ En **pasarelas**, las **pruebas de carga dinámicas serán preceptivas** cuando, de acuerdo con lo indicado en el **apartado 7.2.2** de esta Instrucción, sea necesario efectuar en el proyecto un estudio específico que contemple las **solicitaciones dinámicas** ejercidas por los peatones. En estos casos, además de dicho estudio, el proyecto de la pasarela incluirá el proyecto de prueba de carga dinámica (*parámetros dinámicos estructurales, casos de carga, puntos de medida y valores esperados*).

1. ACHE, "Manual de Tirantes", Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos (2007)
2. Balas, J. y Hanuska, A., "Influence surfaces of skew plates", Vydavatel'stvo Slovenskej akademie vied, Bratislava (1964)
3. Bares, R. y Massonnet, C., "Le calcul des grillages de poutres et dalles orthotropes", Dunod (1966)
4. Billington, D.P., "Thin shell concrete structures", Mc Graw-Hill, 2nd Ed. (1982)
5. Calgaro, J.A. y Virlogeux, M., "Projet et construction des ponts. Analyse structurale des tabliers de ponts.", Presses d'E.N.P.C. (1988)
6. Clark, L.A., "Comparisons of various methods of calculating the torsional inertia of right voided slab bridges", C & CA (1975)
7. Clark, L.A. y White, I., "Test to determinate the torsional stiffness of flexurally cracked slab elements", C & CA Tech. Rep. 42.517 (1978)
8. Clark, L.A., "Concrete bridge design to BS5400", Construction Press (1983)
9. Cheung, Y.K., "Finite strip method in structural analysis", Pergamon Press (1976)
10. Collings, D., "Steel-concrete composite bridges", Thomas Telford (2005)
11. Cusens, A.R. y Pama, R.P., "Bridge deck analysis", Wiley (1975)
12. Dhatt, G. y Touzot, G., "Une présentation de la méthode des éléments finis", Maloine (1981)
13. Elliott, G., "Partial loading on orthotropic plates", C & CA Tech. Rep. 42.519 (1978)
14. Gimsing, N.J., "Cable supported bridges", John Wiley (1983)
15. Hambly, E.C., "Bridge deck behaviour", Chapman and Hall (1976)
16. Hendry, A.W. y Jaeger, L.G., "The analysis of grid frameworks and related structures", Chatto and Windus (1958)
17. Henrych, J., "The dynamics of arches and frames", Elsevier (1981)
18. Homberg, H., "Dalles d'épaisseur variable", Dunod (1972)
19. ICE, "Manual of bridge engineering", 2nd Ed., Edited by Gerard Parke and Nigel Hewson, Thomas Telford (2008)
20. Irvine, H.M., "Cable structures", MIT Press (1981)

21. Kollbrunner, C.F. y Basler, K., *"Torsion in structures. An engineering approach"* Springer (1969)
22. Krístek, V., *"Theory of box girders"*, Wiley (1979)
23. Larsen, A., Editor, *"Aerodynamics of large bridges"*, A.A. Balkema (1992)
24. Livesley, R.K., *"Matrix methods of structural analysis"*, 2nd Ed., Pergamon Press (1975)
25. Loo, Y.C. y Cusens, A.R., *"The finite strip method in bridge engineering"*, Viewpoint (1978)
26. Maisel, B.I. y Roll, F., *"Methods of analysis and design of concrete box beams with side cantilevers"*, C & CA Tech. Rep. 42.494 (1974)
27. Manterola, J., *"La sección abierta y cerrada bajo solicitación excéntrica"*, Puentes II, monografía N° 15 de la A.F.C.E. (1976)
28. Manterola, J., *"Cálculo de tableros por el método del emparrillado"*, Hormigón y acero, N° 122 (1977)
29. Manterola, J., *"Análisis de tableros rectos de puentes por métodos armónicos"*, I.E.T.C.C., Monografía 343 (1977)
30. Manterola, J., *"Estudio sobre tableros de puentes. Parte I.-Tableros de vigas"*, Hormigón y acero, N° 138 (1981)
31. Manterola, J., *"Estudio sobre tableros de puentes. Parte II.-La sección en cajón"*, Hormigón y acero, N° 139 (1981)
32. Manterola, J., *"Estudio sobre tableros de puentes. Parte III.-El puente curvo"*, Hormigón y acero, N° 140 (1981)
33. Manterola, J., *"Estudio sobre tableros de puentes. Parte IV.-El puente oblicuo"*, Hormigón y acero, N° 141 (1981)
34. Manterola, J., *"Puentes. Apuntes para su diseño, cálculo y construcción"*, Vol. I y II, Colegio de I.C.C.P. (2006)
35. Menn, C., *"Prestressed concrete bridges"*, Birkhäuser (1990)
36. Meseguer, J., Sanz, A., Perales, J.M. y Pindado, S., *"Aerodinámica civil"*, Mc Graw-Hill (2001)
37. Ministerio de Fomento, *"Recomendaciones para el proyecto de puentes metálicos para carreteras, RPM-95"*, CPMF (1996)
38. Ministerio de Fomento, *"Recomendaciones para el proyecto de puentes mixtos para carreteras, RPX-95"*, CPMF (1996)
39. Ministerio de Fomento, *"Instrucción de acciones a considerar en puentes de ferrocarril (IAPF-07)"*, CPMF (2010)
40. Ministerio de Fomento, *"Instrucción de acero estructural (EAE)"*, CPMF (2011)

41. Ministerio de Fomento, "*Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera (IAP-11)*", CPMF (2011)
42. **Monleón, S.**, "*Ingeniería de puentes: análisis estructural*", SPUPV-97-067, Universidad Politécnica de Valencia (1997)
43. **Monleón, S.**, "*Análisis de vigas, arcos, placas y láminas: una presentación unificada*", Editorial de la UPV (2001)
44. Morice, P.B. y Little, G., "*The analysis of right bridge decks subjected to normal loading*", C. & C.A., Pub. 46.002 (1956)
45. **O'Connor, C.**, "*Design of bridge superstructures*", John Wiley (1971)
46. Oden, J.T. y Ripperger, E.A., "*Mechanics of elastic structures*", Mc Graw-Hill, 2nd Ed. (1981)
47. Oñate, E., "*Cálculo de estructuras por el método de los elementos finitos. Análisis elástico lineal*", CIMNE (1992)
48. Podolny Jr., W. y Muller, J., "*Construction and design of prestressed concrete segmental bridges*", John Wiley (1982)
49. Podolny Jr., W. y Scalzy, J.B., "*Construction and design of cable-stayed bridges*", 2nd Ed., John Wiley (1986)
50. Przemieniecki, J.S., "*Theory of matrix structural analysis*", Mc Graw-Hill (1968)
51. Pücher, A., "*Influence surfaces of elastic plates*", Springer Verlag (1977)
52. Robinson, K., "*The behavior of simply supported skewbridge slabs under concentrated loads*", Res. Rep. N° 8, C.A.C.A., London (1959)
53. Rowe, R.E., "*Concrete bridge design*", Applied Science (1962)
54. Rüsç, H. y Hergenroder, A., "*Influence surfaces for moments in skew slabs*", Tech. University of Munich (1961)
55. **Samartín, A.F.**, "*Cálculo de estructuras de puentes de hormigón*", Editorial Rueda (1983)
56. SETRA, "*Appareils d'appui en élastomère fretté*", Ministère de l'équipement, Direction des routes et de la circulation routière (1974)
57. SETRA, "*Conseils por l'utilisation des programmes de réseaux de poutres*", Division des Ouvrages d'Art du S.E.T.R.A. (1975)
58. SETRA, "*Ponts en béton précontraint construits par encorbellements successifs: guide de concéption*", M.E.T.L.T.M. (2003)
59. SETRA, "*Ponts mixtes acier-béton: guide de concéption durable*", M.E.E.D.M. (2010)
60. **Strasky, J.**, "*Stress ribbon and cable-supported pedestrian bridges*", Thomas Telford (2005)

61. **Svensson, H.**, "*Cable-stayed bridges, 40 years of experience worldwide*", Ernst & Sohn (2011)
62. Thenoz, M., "*Calcul des hourdis de ponts*", S.E.T.R.A., Bulletin technique N° 1 (1972)
63. Thenoz, M., "*Complément au bulletin technique N° 1*", S.E.T.R.A. (1976)
64. Timoshenko, S. y Woinowsky-Krieger, S., "*Theory of plates and shells*", 2nd Ed., Mc Graw-Hill (1959)
65. Troitsky, M.S., "*Cable-stayed bridges*", Crosby Lockwood Staples (1977)
66. Ugural, A.C., "*Stresses in plates and shells*", Mc Graw-Hill (1981)
67. Vlassov, B.Z., "*Pièces longues en voiles minces*", Eyrolles (1962)
68. **Viñuela Rueda, L. y Martínez Salcedo, J.**, "*Proyecto y construcción de puentes metálicos y mixtos*", Publicaciones APTA (2009)
69. **Walther, R.**, "*Ponts Haubanés*", Presses Polytechniques Romandes (1985)
70. West, R., "*Recommendations on the use of grillage analysis for slab and pseudo-slab bridge decks*", C & CA/CIRIA pub. 46.017 (1973)
71. West, R., "*The use of grillage analogy for the analysis of slab and pseudo-slab bridge decks*", C & CA r. rep. 21 (1973)
72. Westergaard, H.M., "*Computations of stresses in bridges slabs due to wheel loads*", Public Roads, Vol. 2, pp. 1-23 (1930)
73. **Zienkiewicz, O.C. y Taylor, R.L.**, "*El método de los elementos finitos*", 4ª Ed. Vol. 1 y 2, CIMNE Mc Graw-Hill (1994)