acadèmica

Maquinaria y procedimientos de construcción: problemas resueltos

Víctor Yepes Piqueras

edUPV
Universitat Politècnica de València

Víctor Yepes Piqueras

Maquinaria y procedimientos de construcción

Problemas resueltos

edUPV
Universitat Politècnica de València

Colección Académica http://tiny.cc/edUPV_aca

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:
Yepes Piqueras, V. (2023). *Maquinaria y procedimientos de construcción*. *Problemas resueltos*. edUPV.

Venta: www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0376_07_01_01

ISBN: 978-84-1396-174-3
Depósito Legal: V-2835-2023

Maquetación: Enrique Mateo, *Triskelion Diseño Editorial*
Imprime: Byprint Percom, S. L.

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es

edUPV se compromete con la ecoimpresión y utiliza papeles de proveedores que cumplen con los estándares de sostenibilidad medioambiental, https://editorialupv.webs.upv.es/compromiso-medioambiental

Impreso en España

Agradecimientos

Un libro como éste no es posible realizarlo en un corto espacio de tiempo. Han tenido que pasar casi 30 años de docencia de la asignatura de Procedimientos de Construcción, en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Caminos, Canales y Puertos de Valencia, para recopilar una amplia colección de problemas resueltos. Estos problemas han sido expuestos en clase o propuestos en exámenes y tienen como objetivo ayudar a los estudiantes a comprender los principios básicos de la asignatura y también permitir a los profesionales resolver situaciones prácticas.

En este sentido, quiero expresar mi sincero agradecimiento a los profesores de la unidad docente de Procedimientos de Construcción y Organización de Obras por sus valiosos consejos e indicaciones a lo largo de todos estos años. Especialmente, quiero destacar la significativa contribución de Fernándo González Vidosa, José Vicente Martí Albiñana y Julián Alcalá González. Su apoyo ha sido fundamental en la realización de este libro de problemas resueltos. Asimismo, me gustaría extender mi agradecimiento al profesor Pedro Martínez Pagán, de la Universidad Politécnica de Cartagena, quien colaboró de manera destacada en la elaboración de un conjunto de nomogramas originales que permiten resolver una parte de los problemas de forma gráfica. Deseo también hacer pública mi gratitud a mis estudiantes, quienes a lo largo de todos estos años, con sus preguntas, correcciones y entusiasmo, han provocado en mí la voluntad de escribir lo aprendido con ellos en libros como éste. También agradezco al equipo de la Editorial de la Universitat Politècnica de València, y en especial a María Remedios Pérez García, su esmero y trabajo para hacer posible un libro de estas características.

Prólogo

En el prólogo de obras anteriores, mencioné que la enseñanza de “Procedimientos de Construcción” es complicada, ya que implica instruir a futuros ingenieros civiles sobre la realización de obras. Este proceso abarca no solo las fases constructivas, sino también aspectos de gran relevancia, como el manejo de maquinaria y medios auxiliares, la seguridad y salud, el impacto ambiental de las obras, y sobre todo, conocimientos fundamentales en geotecnia, resistencia de materiales, mecánica, cálculo de estructuras, gestión de empresas, planificación de obras y economía. Todo este conjunto de conocimientos es esencial para tomar decisiones acertadas al seleccionar el mejor proceso constructivo para un proyecto específico. Además, debemos abordar toda esta información considerando que la mayoría de los alumnos tienen poca o nula experiencia práctica en relación con el entorno físico de las obras.

Una dificultad adicional radica en la creación de un conjunto ordenado y coherente de problemas resueltos que no sean meramente teóricos, sino que se acerquen al mundo real de la profesión. Esta tarea resulta compleja en ocasiones, pues los procedimientos constructivos requieren conocimientos que abarcan casi todas las áreas de la ingeniería. En consecuencia, explicar esta asignatura en los primeros cursos de un grado universitario puede parecer arriesgado, debido a la amplia gama de conocimientos necesarios. Sin embargo, los planes de estudio a veces presentan estas incongruencias y desafíos en la enseñanza de esta materia.

Al final ha salido un volumen extenso, con una amplia variedad de problemas resueltos, que intenta abarcar todo el campo de conocimiento de los procedimientos de construcción, incluyendo la maquinaria y los medios auxiliares utilizados tanto en la ingeniería civil como en la edificación, e incluso en algunos casos, en la minería.

Esta colección forma parte del conjunto de materiales, libros y documentación que he elaborado como autor, complementando así el contenido teórico de la asignatura. Por esta razón, recomiendo al lector que acuda a manuales, libros o apuntes para reforzar la parte teórica de los problemas. No obstante, he incluido una extensa bibliografía que espero sea útil para este propósito. Además, me complace recomendar mi blog, que cuenta con una trayectoria de casi 12 años y ha recopilado cerca de 2.000 artículos relacionados con aspectos de la ingeniería de la construcción. Puedes encontrarlo en el siguiente enlace: https://victoryepes.blogs.upv.es/.

El libro ofrece una completa colección de 300 problemas resueltos, abarcando aspectos relacionados con la maquinaria, medios auxiliares y procedimientos de construcción. Su contenido se enfoca en la mecanización de las obras, costos, disponibilidad, fiabilidad y mantenimiento de equipos, estudio del trabajo, producción de maquinaria, sondeos y perforaciones, técnicas de mejora del terreno, control y abatimiento del nivel freático, movimiento de tierras, equipos de dragado, explosivos y voladuras, excavación de túneles, instalaciones de tratamiento de áridos, compactación de suelos, ejecución de firmes, maquinaria auxiliar como bombas, compresores o ventiladores, cables y equipos de elevación, cimentaciones y vaciados, encofrados y cimbras, fabricación y puesta en obra del hormigón, organización y planificación de obras.

Es un libro, por tanto, muy enfocado a los ámbitos de la ingeniería de la construcción, tanto en el ámbito de la edificación, de la minería o de la ingeniería civil. Además, se incluyen 27 nomogramas originales y 19 apéndices para apoyar tanto a estudiantes de ingeniería o arquitectura, como a profesionales que enfrentan desafíos similares en su práctica diaria en obra o proyecto. La colección se complementa con un listado de referencias bibliográficas que respaldan los aspectos teóricos y prácticos abordados en los problemas. Estos problemas son similares a los tratados durante las clases de resolución de casos prácticos en la asignatura de Procedimientos de Construcción del Grado en Ingeniería Civil de la Universitat Politècnica de València (España). Por tanto, el libro resulta adecuado tanto para estudiantes de grado como para cursos de máster relacionados con la ingeniería civil, la edificación y las obras públicas.

Por último, y a pesar de que he puesto todo el empeño en resolver y revisar cada uno de los problemas, es posible que existan erratas o errores. Por ello, agradezco de antemano cualquier sugerencia o mejora que pueda ser útil para futuras ediciones. Espero sinceramente que este libro que tiene en sus manos contribuya a mejorar la calidad de la enseñanza de este tipo de asignaturas y que se convierta en una herramienta valiosa tanto para estudiantes como para profesionales. Su éxito en el aprendizaje y aplicación de los procedimientos de construcción es mi mayor deseo.

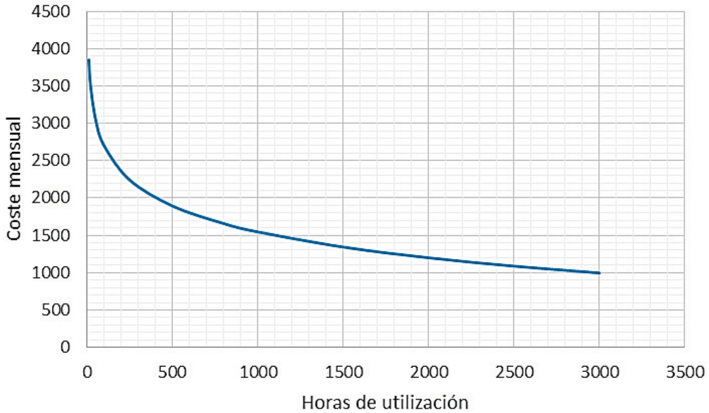
Valencia, a 25 de julio de 2023

Índice

1
Mecanización de las obras

PROBLEMA 1. Suponga, a efectos de este problema, que el coste mensual de una máquina (en unidades monetarias) se puede expresar como 500·(10 – ln *t*), siendo *t* el número de horas de utilización anuales. Sabiendo que se alquila la máquina por 1.500 u.m./mes, indique el número de horas donde es indiferente comprar o alquilar la máquina.

SOLUCIÓN. Se puede representar en una gráfica la relación entre las horas de utilización y el coste mensual. Como se puede ver, es una curva decreciente. Si intersectamos dicha curva con la horizontal del coste de alquiler, tendremos el punto de indiferencia solicitado.



Si se quiere, se puede despejar la siguiente expresión: 500·(10 – ln *t*) = 1.500, de donde se obtiene *t* = 1.097 horas. Es decir, por debajo de esas horas de utilización anuales conviene alquilar la máquina. Mientras que, por encima, lo que conviene es comprar.

PROBLEMA 2. Sea un activo que se compró por 30.000 euros. Supongamos que existen unos ingresos anuales de 10.000 euros durante cuatro años, siendo sus gastos los siguientes: 4.000 euros para el primer y tercer año, y 6.000 euros, para el segundo y cuarto año. Se supone un tipo de interés del 0,2% libre de riesgo en el mercado de capitales. La máquina se vende tras cuatro años por 13.000 euros.

SOLUCIÓN. Para calcular el VAN, se calcula el valor actual y, por tanto, se calcula mediante un descuento.

$$VAN_0 = -30.000 + \frac{6.000}{(1+0{,}02)^1} + \frac{4.000}{(1+0{,}02)^2} + \frac{6.000}{(1+0{,}02)^3} + \frac{4.000}{(1+0{,}02)^4} + \frac{13.000}{(1+0{,}02)^4}$$

Con lo que el valor actual neto es de 1086,33 euros. Ello implica que la inversión planificada genera más beneficios que un depósito bancario al tipo de descuento elegido. Por tanto, es rentable.

PROBLEMA 3. Se tienen dos equipos, A y B, cuyo valor residual es nulo para ambos. Sabiendo que i=4%, calcular:

a) El VAN y la TIR de ambas alternativas

b) Elegir la posible alternativa

		Equipo A	Equipo B
	Valor de adquisición	100	130
Año 1	Ingreso	100	130
	Coste	130	165
Año 2	Ingreso	110	150
	Coste	120	145
Año 3	Ingreso	180	230
	Coste	100	110
Año 4	Ingreso	210	270
	Coste	90	100

SOLUCIÓN. Los VAN correspondientes se calculan de la siguiente forma:

$$VAN_A = -100 + \frac{-30}{(1+0{,}04)} + \frac{-10}{(1+0{,}04)^2} + \frac{80}{(1+0{,}04)^3} + \frac{120}{(1+0{,}04)^4} = 35{,}60$$

$$VAN_B = -130 + \frac{35}{(1+0{,}04)} + \frac{5}{(1+0{,}04)^2} + \frac{120}{(1+0{,}04)^3} + \frac{170}{(1+0{,}04)^4} = 92{,}97$$

Los TIR se calculan así:

$$100 = \frac{-30}{(1+i)} + \frac{-10}{(1+i)^2} + \frac{80}{(1+i)^3} + \frac{120}{(1+i)^4}; i = 11{,}60\%$$

$$130 = \frac{35}{(1+i)} + \frac{5}{(1+i)^2} + \frac{120}{(1+i)^3} + \frac{170}{(1+i)^4}; i = 19{,}02\%$$

Tanto con el criterio VAN como con el TIR, mejor alternativa es la B.

También podemos calcular la relación del VAN respecto a la inversión realizada.

$$\frac{VAN_A}{100} = \frac{35{,}60}{100} = 0{,}36$$

$$\frac{VAN_B}{130} = \frac{92{,}97}{130} = 0{,}72$$

Por tanto, según este criterio, el beneficio en relación con la inversión es mayor en el equipo B.

PROBLEMA 4. Calcular la duración óptima de un equipo sometido a una tasa de descuento *i*, siendo V_a el valor de adquisición y V_t el valor de residual en el momento del retiro en el periodo *t*, y e_j los ingresos netos que genera el equipo en el periodo *j*.

SOLUCIÓN. Se trata de determinar el valor de *t* para el cual es máximo el VAN, por tanto, se trata de maximizar la siguiente expresión:

$$-V_a + \sum_{j=1}^{t} \frac{e_j}{(1+i)^j} + \frac{V_t}{(1+i)^t}$$

Sea $n > t$ la vida técnica del equipo. El VAN del equipo correspondiente a su vida técnica sería el siguiente:

$$VAN_n = -V_a + \sum_{j=1}^{t} \frac{e_j}{(1+i)^j} + \sum_{j=j+1}^{n} \frac{e_j}{(1+i)^j} + \frac{V_n}{(1+i)^n}$$

Por tanto, lo que se trata de maximizar es lo siguiente:

$$VAN_n + \frac{V_t}{(1+i)^t} - \sum_{j=j+1}^{n} \frac{e_j}{(1+i)^j} - \frac{V_n}{(1+i)^n}$$

Como el VAN_n no depende de *t*, entonces el óptimo se consigue cuando es máximo lo siguiente:

$$\frac{V_t}{(1+i)^t} - \sum_{j=j+1}^{n} \frac{e_j}{(1+i)^j} - \frac{V_n}{(1+i)^n}$$

o lo que es lo mismo, siendo VAR el valor que tienen en el momento *t* los ingresos netos que podría continuar generando el equipo:

$$\frac{1}{(1+i)^t} \cdot \left[V_t - \left(\sum_{j=j+1}^{n} \frac{e_j}{(1+i)^{j-t}} - \frac{V_n}{(1+i)^{n-t}} \right) \right] = \frac{1}{(1+i)^t} \cdot \left(V_t - VAR_t \right)$$

Por tanto, la duración óptima de un bien de equipo es el momento para el cual es máximo el resultado de actualizar al momento 0 la diferencia entre el valor de retiro que tiene el equipo si se vende en ese momento y el valor que tienen en ese instante los flujos de caja que podría continuar generando ese equipo en la empresa.

PROBLEMA 5. Se quiere determinar el VAN y el TIR de una inversión realizada en un equipo empleado en la construcción en un entorno inflacionista. La tasa de actualización o coste del capital es *i*=0,05 y la elasticidad de los flujos netos de caja-índice general de precios E_f = 0,9. También se conocen los flujos de caja para los tres años de la inversión. También se quiere conocer cómo influye en el TIR la elasticidad E_f. Para ello, estudie dos casos adicionales, E_f = 0,85 y E_f = 0,95.

Desembolso inicial	Flujos netos de caja		
	Año 1	Año 2	Año 3
10.000	5.000	6.000	3.000

SOLUCIÓN. Los flujos de caja de la mayor parte de las inversiones productivas, entre las que se encuentran las máquinas empleadas en la construcción, se ven afectadas por la inflación. Evidentemente, la inflación provocará que la empresa incremente el precio de sus productos y, por tanto, los flujos netos de caja. Sin embargo, no se debe olvidar que la inflación también afectará a los precios de las materias prima, mano de obra, etc.

Si denominamos e_j los ingresos netos en el año *j*, *n* el número de periodos e *i* la tasa de actualización o coste del capital, *g* a la tasa de inflación y *f* al tanto por uno en que cada año incrementa el valor nominal de los flujos netos de caja a consecuencia de la inflación, el valor actual neto (VAN) se puede calcular de la siguiente forma:

$$VAN = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j \cdot (1+f)^j}{(1+i)^j \cdot (1+g)^j} - V_a$$

Por otra parte, el efecto de la inflación se puede introducir en términos de elasticidad. Así, la elasticidad de los flujos netos de caja-índice general de precios se puede expresar como:

$$E_f = \frac{1+f}{1+g}$$

De esta forma,

$$VAN = \sum_{j=1}^{n} \frac{e_j}{(1+i)^j} \cdot \left(E_f\right)^j - V_a$$

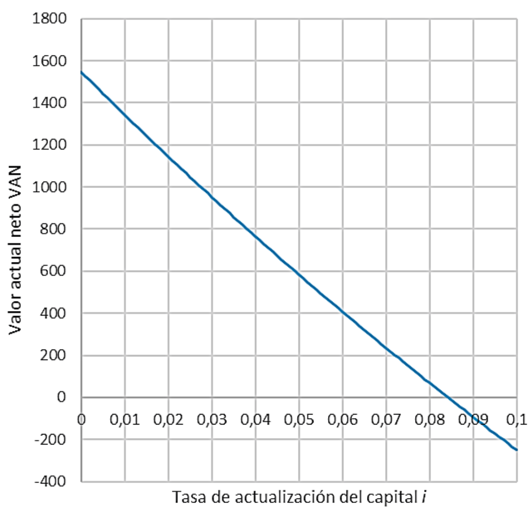
Se puede calcular la tasa interna de retorno (TIR) como el valor de *i* que anula el VAN.

Si E_f es mayor que uno, la inflación influye favorablemente sobre la inversión, pues eleva su valor capital y su tasa de retorno. En caso contrario, repercute negativamente. En caso de ser E_f igual a la unidad, no existe repercusión de la inflación en las decisiones de inversión.

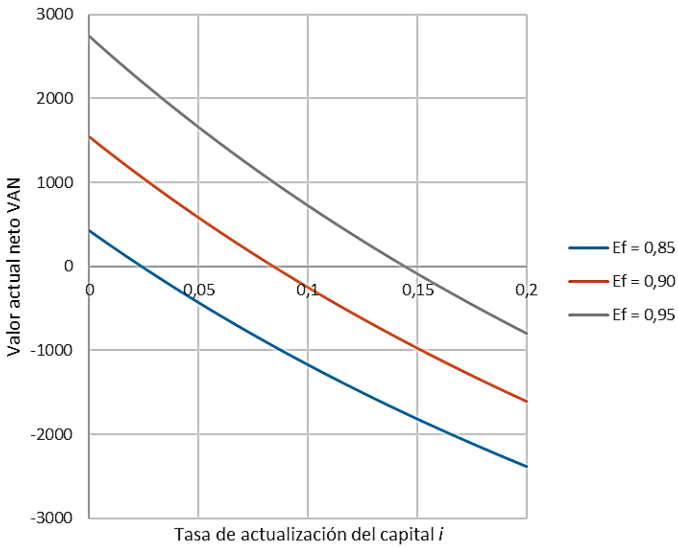
En el caso propuesto, el VAN se calcula de la siguiente forma:

$$VAN = -\,10.000 + \frac{5.000}{1{,}05} \cdot 0{,}9 + \frac{6.000}{1{,}05^2} \cdot 0{,}9^2 + \frac{3.000}{1{,}05^3} \cdot 0{,}9^3 = 583{,}09$$

Para calcular el TIR, debemos averiguar el valor de *i* que anula el VAN. Podemos representar ambas variables en el siguiente gráfico. Se comprueba que el TIR en este caso es del 8,42 %.



Veamos ahora cómo influye en el TIR la elasticidad de los flujos netos de caja-índice general de precios. Tenemos los casos para E_f = 0,85; E_f = 0,90 y E_f = 0,95. En la figura se puede ver que cuanto mayor es la elasticidad, mayor TIR se consigue para un mismo equipo.



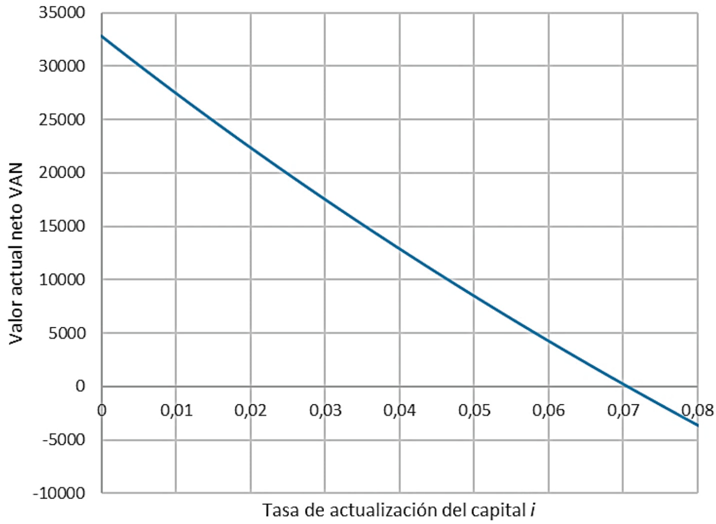
PROBLEMA 6. Calcular el VAN y el TIR de una inversión realizada en un equipo empleado en la construcción en un entorno inflacionista. La tasa de actualización o coste del capital es *i*=0,04 y la elasticidad de los flujos netos de caja-índice general de precios E_f = 0,95. También se conocen los flujos de caja para los seis años de la inversión.

Desembolso inicial	**Flujos netos de caja**					
	Año 1	**Año 2**	**Año 3**	**Año 4**	**Año 5**	**Año 6**
150.000	**45.000**	**52.000**	**35.000**	**20.000**	**32.000**	**30.000**

SOLUCIÓN. En el caso propuesto, el VAN se calcula de la siguiente forma:

$$VA\,N = -\,150.000 + \frac{45.000}{1{,}04}\cdot 0{,}95 + \frac{52.000}{1{,}04^2}\cdot 0{,}95^2 + \frac{35.000}{1{,}04^3}\cdot 0{,}95^3 + \frac{20.000}{1{,}04^4}\cdot 0{,}95^4$$
$$+\frac{32.000}{1{,}04^5}\cdot 0{,}95^5 + \frac{30.000}{1{,}04^6}\cdot 0{,}95^6 = 12.887{,}52$$

Para calcular el TIR, debemos averiguar el valor de *i* que anula el VAN. Podemos representar ambas variables en el siguiente gráfico. Se comprueba que el TIR en este caso es del 7,05 %.



PROBLEMA 7. Calcular el VAN y el TIR de una inversión realizada en un equipo empleado en la construcción en un entorno inflacionista. La tasa de inflación es *g* = 8,5 % y la empresa incrementa cada año el valor nominal de los flujos netos de caja en un *f* = 6,0 %. La actualización o coste del capital es *i*=0,063. Los flujos de caja para los seis años de la inversión son los que figuran en la siguiente tabla:

Desembolso inicial	Flujos netos de caja					
	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4	Año 5	Año 6
165.000	42.000	50.000	45.000	25.000	30.000	20.000

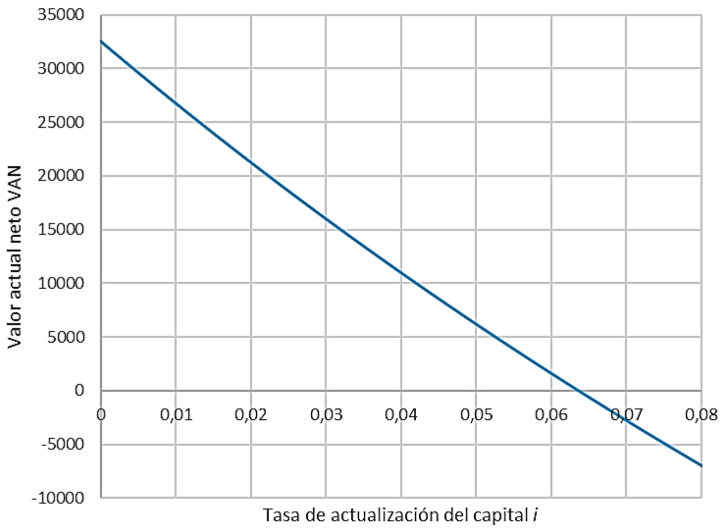
SOLUCIÓN. En primer lugar, calculemos la elasticidad de los flujos netos de caja-índice general de precios. Esta elasticidad es la siguiente:

$$E_f = \frac{1+f}{1+g} = \frac{1+0{,}060}{1+0{,}085} = 0{,}9770 = 97{,}70\,\%$$

De esta forma, el VAN se calcula como sigue:

$$VAN = -165.000 + \frac{42.000}{1{,}063} \cdot 0{,}9770 + \frac{50.000}{1{,}063^2} \cdot 0{,}9770^2 + \frac{45.000}{1{,}063^3} \cdot 0{,}9770^3 +$$
$$+ \frac{25.000}{1{,}063^4} \cdot 0{,}9770^4 + \frac{30.000}{1{,}063^5} \cdot 0{,}9770^5 + \frac{20.000}{1{,}063^6} \cdot 0{,}9770^6 = 327{,}99$$

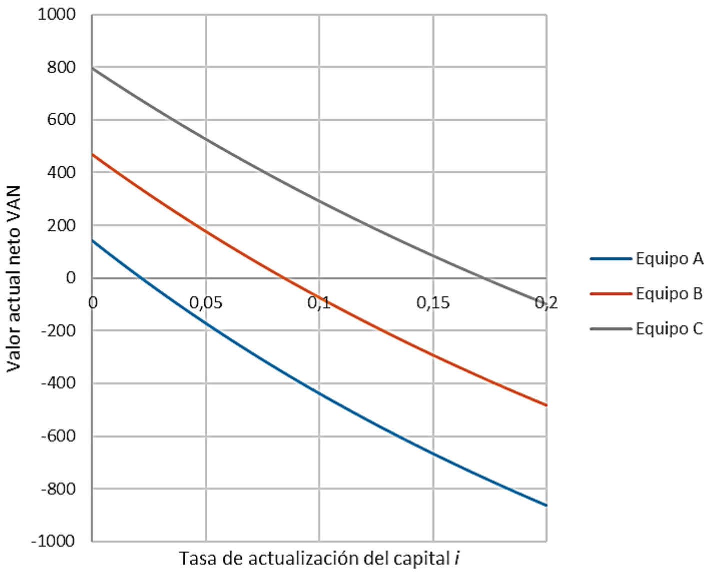
Para calcular el TIR, debemos averiguar el valor de *i* que anula el VAN. Podemos representar ambas variables en el siguiente gráfico. Se comprueba que el TIR en este caso es del 6,37 %.



PROBLEMA 8. Se quiere seleccionar entre los equipos A, B y C. Los flujos netos de caja son los que figuran en el cuadro siguiente. Se observa que la suma de los flujos de los tres años es la misma, pero se distribuyen de forma diferente. También el desembolso inicial es el mismo. Analizar cómo influye en el TIR los flujos netos de caja sabiendo que la elasticidad de los flujos netos de caja-índice general de precios $E_f = 0{,}75$.

Equipos	Desembolso inicial	Flujos netos de caja		
		Año 1	Año 2	Año 3
A	3.000	1.000	2.000	3.000
B	3.000	2.000	2.000	2.000
C	3.000	3.000	2.000	1.000

SOLUCIÓN. En la gráfica se puede observar que el mayor TIR se obtiene con el equipo C, es decir, aquel que ha conseguido el flujo neto de caja lo antes posible. Esta sería la opción elegida de las tres posibles.



2
Costes de los equipos

PROBLEMA 9. Una máquina de obras públicas se adquirió por un importe de 15 millones de unidades monetarias (u.m.). Durante los tres primeros años se anotó, siempre referido a origen, el número de horas acumuladas de trabajo *H*, el valor de reventa de la máquina V_n, y los costes acumulados a origen en concepto de reparación y mantenimiento R_h. Dichas anotaciones, referidas al final de cada año, figuran en la tabla siguiente:

n (años)	*H* (horas)	V_n (u.m.)	R_h (u.m.)
1	1.600	9.200.000	850.000
2	3.500	5.500.000	2.380.000
3	5.000	3.700.000	4.190.000

Se supone que el resto de gastos (mano de obra, consumos, lubricantes, intereses y otros) son constantes en cada año e iguales a 4.000.000 u.m. Se considera que a partir del tercer año se van a trabajar 1.700 horas anuales. A falta de otros datos se pide, utilizando la información empírica proporcionada:

a) Estimación del ejercicio en el que la suma de costes en dicho año sea mínima y su valor de reventa

b) Valor de reventa estimado al final del quinto año

c) Coste horario de la máquina en el cuarto año

SOLUCIÓN

a) Se precisa conocer los costes que se tienen al final de cada año. Estos corresponderán al valor de la depreciación en dicho año, el coste de las reparaciones y mantenimiento y el resto de costes constantes.

La estimación de la expresión que establece la relación entre el precio de reventa V_n, el valor de adquisición V_o, los años transcurridos n, y las horas trabajadas H a origen es del tipo:

$$\frac{V_n}{V_0} = k \cdot \alpha^n \cdot \beta^H$$

a falta de otro tipo de datos estadísticos se toman los datos conocidos como válidos. Se forma un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Caso de disponer de más datos que incógnitas, hubiésemos procedido a establecer la curva por ajuste por mínimos cuadrados.

$$\frac{9.200.000}{15.000.000} = k \cdot \alpha^1 \cdot \beta^{1.600}$$

$$\frac{5.500.000}{15.000.000} = k \cdot \alpha^2 \cdot \beta^{3.500}$$

$$\frac{3.700.000}{15.000.000} = k \cdot \alpha^3 \cdot \beta^{5.000}$$

de cuya resolución se obtiene: $k=0{,}9390$; $a=1{,}0473$; $b=0{,}9997$.

De modo análogo, se procede con los costes a origen debidos a reparaciones y mantenimiento R_H respecto a las horas trabajadas H. En este caso la expresión adquiere la forma parabólica:

$$\frac{R_H}{H} = \gamma \cdot H^2 + \mu \cdot H + \rho$$

resolviendo el sistema:

$$\frac{850.000}{1.600} = \gamma \cdot 1.600^2 + \mu \cdot 1.600 + \rho$$

$$\frac{2.380.000}{3.500} = \gamma \cdot 3.500^2 + \mu \cdot 3.500 + \rho$$

$$\frac{4.190.000}{5.000} = \gamma \cdot 5.000^2 + \mu \cdot 5.000 + \rho$$

se obtiene $\lambda=7{,}9541\cdot10^{-6}$; $m=37{,}7237\cdot10^{-3}$; $r=450{,}5297$

Con dichas expresiones calculadas, podemos estimar hasta el 5° año, por ejemplo, los costes por reparación y mantenimiento y los valores de reventa. Ello nos proporcionará los datos de depreciación anual y costes de reparación y mantenimiento anual.

n	H	V_H	R_H	Depreciación anual	Coste anual mantenimiento y reparaciones	Mantenimiento, reparaciones y depreciación anual
1	1.600	9.200.000	850.000	5.800.000	850.000	6.650.000
2	3.500	5.500.000	2.380.000	3.700.000	1.530.000	5.230.000
3	5.000	3.700.000	4.190.000	1.800.000	1.810.000	3.610.000
4	6.700	2.269.752	7.104.265	1.430.248	2.914.265	4.344.513
5	8.400	1.427.336	11.160.660	842.416	4.056.395	4.898.811

El resto de gastos se consideran como constantes en el año. Por consiguiente, es a final del tercer año cuando los gastos anuales son mínimos. Al final del tercer año, el valor de reventa es de 3.700.000 u.m.

b) El valor de reventa estimado para el final del quinto año, tal y como se ha calculado para la tabla es de 1.427.336 u.m.

c) El coste horario de la máquina en el cuarto ejercicio es el cociente entre el coste en dicho año (4.344.513 u.m. + 4.000.000 u.m.) entre las 1.700 horas, lo cual son 4.909 u.m./h.

Si se pretende el cálculo del coste horario medio a origen, se tendría:

$$(6.650.000+5.230.000+3.610.000+4.344.513+4 \cdot 4.000.000)/6.700=$$
$$=35.834.513/6.700=5.348 \text{ u.m./h.}$$

PROBLEMA 10. Una empresa de mantenimiento de maquinaria de obras públicas tiene un contrato de 750 euros semanales con el parque de una empresa constructora de tamaño medio. En el caso de que se firme el contrato, se estima, a partir de ese momento, una media de 2,75 averías semanales. El coste de reparación estimado es de 1250 euros en cada fallo. Se trata de determinar si al parque de maquinaria le conviene renovar el contrato de mantenimiento con este proveedor. Las averías semanales que ha tenido la empresa antes de la firma de la firma del nuevo contrato son las siguientes:

Averías	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
Semanas que hubo este número de averías	**8**	**11**	**13**	**14**	**13**	**19**	**10**	**9**	**8**

SOLUCIÓN. En primer lugar se asignan probabilidades a priori para cada uno de los estados. La probabilidad (frecuencia relativa) de cada estado se puede calcular como el cociente entre la frecuencia absoluta y el número de casos.

El total de casos estudiados son los siguientes:

$$8 + 11 + 13 + 14 + 13 + 19 + + 10 + 9 + 8 = 105 \text{ semanas}$$

De esta forma se puede estimar la probabilidad de que se produzcan un número de averías determinado. Por ejemplo, la probabilidad de tener 3 averías en una semana cualquiera sería la siguiente:

$$\text{Frecuencia relativa} = \frac{\text{Frecuencia absoluta}}{\text{Número de casos}} = \frac{14}{105} = 0{,}133$$

La tabla para todos casos sería la siguiente:

Averías	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Semanas que hubo este número de averías	8	11	13	14	13	19	10	9	8
Probabilidad	0,076	0,105	0,124	0,133	0,124	0.181	0,095	0,067	0,076

En segundo lugar, vamos a calcular el coste del mantenimiento antes y después de la firma del contrato. Para ello aplicamos el criterio de la esperanza matemática. Así, el número de averías esperadas antes de la firma sería el siguiente:

$$\begin{gathered}(0 \cdot 0{,}076) + (1 \cdot 0{,}105) + (2 \cdot 0{,}124) + (3 \cdot 0{,}133) + (4 \cdot 0{,}124) + (5 \cdot 0{,}181) + \\ + (6 \cdot 0{,}095) + (7 \cdot 0{,}067) + (8 \cdot 0{,}076) = 3{,}8 \text{ averías /semana}\end{gathered}$$

Por otra parte, el coste de las reparaciones antes de la firma del contrato son las siguientes:

$$3{,}8 \frac{\text{averías}}{\text{semana}} \cdot 1250 \frac{\text{euros}}{\text{avería}} = 4750 \frac{\text{euros}}{\text{semana}}$$

Sabiendo que el coste del mantenimiento actual tras la firma del contrato es:

$$\begin{gathered}\text{Coste del servicio} + \text{Coste de las reparaciones} = \\ = 750 \frac{\text{euros}}{\text{semana}} + \left(2{,}75 \frac{\text{averías}}{\text{semana}} \cdot 1250 \frac{\text{euros}}{\text{avería}}\right) = 4187{,}5 \frac{\text{euros}}{\text{semana}}\end{gathered}$$

Por tanto, resulta rentable renovar el contrato de mantenimiento con el proveedor, pues supone un ahorro de:

$$4750 - 4187{,}5 = 562{,}5 \frac{\text{euros}}{\text{semana}}$$

PROBLEMA 11. Una máquina, cuyo valor de adquisición fue de 5.000 unidades monetarias (u.m.), tiene unos gastos anuales fijos de 150 u.m., debidos a seguros, impuestos, almacenaje y otros. Al final de cada año se han anotado los costes anuales en consumos, reparaciones y mantenimiento. Se supone que los datos están en unidades monetarias constantes. Se pide determinar la vida económica.

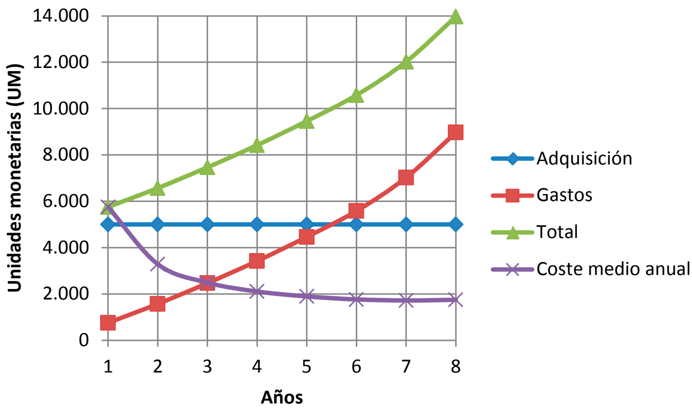
Año	Consumos	Reparaciones y mantenimiento
1	450	150
2	465	205
3	500	245
4	505	300
5	515	375
6	520	450
7	530	765
8	540	1250

SOLUCIÓN. Elaboremos en un cuadro los gastos al final de cada uno de los años y los acumulados a origen, incluyendo la adquisición, para evaluar el coste medio a origen al final de cada año. La vida económica será aquella que haga mínimo dicho coste medio.

Gastos en cada año				
Año	Consumos	Rep. y Mant.	Otros	Suma
1	450	150	150	750
2	465	205	150	820
3	500	245	150	895
4	505	300	150	955
5	515	375	150	1.040
6	520	450	150	1.120
7	530	765	150	1.445
8	540	1.250	150	1.940

Gastos totales a origen				
Año	Adquisición	Gastos	Total	Coste medio anual
1	5.000	750	5.750	5.750
2	5.000	1.570	6.570	3.285
3	5.000	2.465	7.465	2.488
4	5.000	3.420	8.420	2.105
5	5.000	4.460	9.460	1.892
6	5.000	5.580	10.580	1.763
7	5.000	7.025	12.025	1.718
8	5.000	8.965	13.965	1.746

Expresado en forma de gráfico, quedaría como sigue:



Por tanto, es el séptimo año en el que los costes medios anuales resultan mínimos. Es 7 el número de años de vida económica de la máquina.

PROBLEMA 12. Calcular el coste intrínseco, como porcentaje del valor de depreciación, de un compactador de pata de cabra autopropulsado de 33 t de peso y 253 kW de potencia según el "Manual de costes de maquinaria", editado por el SEOPAN, sabiendo que en los últimos 200 días ha trabajado un total de 1.500 horas y que el valor de adquisición ha sido 545.634 €.

SOLUCIÓN. Este coste, para un período de D días, durante los cuales se ha trabajado H horas, será:

$$C_{int} = \left(C_d \cdot D + C_h \cdot H\right) \cdot \frac{V_d}{100}$$

La ficha técnica para esta maquinaria, atendiendo a la publicación citada es la siguiente:

E=150 (días/año)	Promedio anual estadístico de días de puesta a disposición de la máquina.
H_{ut}=12.000 (horas totales)	Promedio de horas de funcionamiento económico, característico de cada máquina.
H_{ua}=1.200 (horas/año)	Promedio anual estadístico de horas de funcionamiento de la máquina.
M+C=75%	Porcentaje del valor de reposición debido a reparaciones generales y conservación ordinaria de la máquina.
A_d=50 %	Porcentaje de la amortización de la máquina que pesa sobre el coste de puesta a disposición.

(Tabla. Continúa en la página siguiente)

(Tabla. Continúa de la página anterior)

C_d=0,0674 %	Coeficiente unitario del día de puesta a disposición de la máquina expresado en porcentaje del valor de reposición de la máquina. Este coeficiente se refiere a días laborables en los cuales esté presente la máquina en la obra, independientemente de que trabaje o no.
C_h=0,0100 %	Coeficiente unitario de la hora de funcionamiento de la máquina, expresado en porcentaje del valor de reposición de la máquina. Este coeficiente se refiere a las horas de funcionamiento real de la máquina.
C_{hm}=0,0229 (%)	Coste horario medio.
C_{dm}=0,1479 (%)	Coste día medio. Solamente utilizable para cálculos aproximados

con todo lo cual el coste intrínseco sería:

$$C_{int} = \left(0{,}0674 \cdot \frac{200}{100} + 0{,}0100 \cdot \frac{1.500}{100}\right) \cdot 545.634 = 155.397\ €$$

Para cálculos aproximados, el coste horario medio es de 100,40 €, mientras que el coste diario medio es de 804,26 €.

PROBLEMA 13. La velocidad de desvalorización de un equipo por el uso del mismo es proporcional, en cada momento dado, a su coste real. Siendo el coste inicial V_0, decir cuál será el valor del equipo después de *t* años.

SOLUCIÓN. Se plantea la siguiente expresión diferencial

$$\frac{d\left(V_0 - V\right)}{dt} = k \cdot V$$

Esta expresión se puede integrar por variables separadas del siguiente modo:

$$\frac{dV}{V} = -k \cdot dt$$

$$\int \frac{dV}{V} = -\int k \cdot dt$$

$$\ln V = -k \cdot t + \gamma$$

$$V = e^{(-k \cdot t + \gamma)} = \vartheta \cdot e^{-k \cdot t}$$

Con la condición que el coste de adquisición es V_0, la expresión queda:

$$V = V_0 \cdot e^{-k \cdot t}$$

PROBLEMA 14. Se desea conocer el término amortizativo anual mediante el método de las cuotas fijas de una máquina cuyo capital de amortización es de 15.000 u.m., 12 de vida útil y a un interés compuesto anual del 5,5 %. Determinar el interés medio y el total de intereses.

SOLUCIÓN. El método de las cuotas fijas, también llamado método francés, consiste en determinar la cuota de amortización (suma de la amortización más los intereses) a interés compuesto por medio de la siguiente expresión:

$$a = \frac{V \cdot r}{1 - (1 + r)^{-N}}$$

donde:

- a = término amortizativo anual
- V = capital a amortizar
- r = tanto por uno de interés compuesto anual
- N = años de vida útil

Con los datos del problema,

$$a = \frac{15.000 \cdot 0{,}055}{1 - \left(1 + 0{,}055\right)^{-12}} = 1.740{,}44 \text{ u.m.}$$

Con un interés r para un capital invertido V amortizado mediante anualidades constantes a, durante N años, estas anualidades tienen que cubrir el capital V más los intereses I.

$$a \cdot N = V + I$$

Es decir, el total de intereses será:

$$I = a \cdot N - V = 1.740{,}44 \cdot 12 - 15.000 = 5.885{,}26 \text{ u.m.}$$

El total de los intereses se puede calcular mediante un interés r_m medio aplicándolo al capital a amortizar V durante N años.

$$I = r_m \cdot N \cdot V$$

Por tanto, el interés medio, r_m, será:

$$r_m = \frac{I}{N \cdot V} = \frac{5.885{,}26}{12 \cdot 15.000} = 3{,}27\ \%$$

Que también se podría haber calculado como:

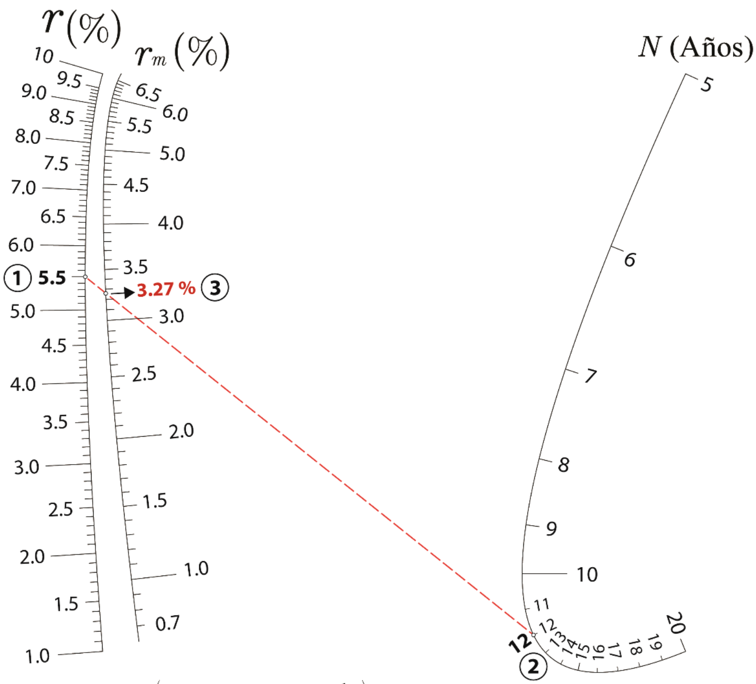
$$r_m = \frac{a}{V} - \frac{1}{N} = \frac{1.740,44}{15.000} - \frac{1}{12} = 3,27\ \%$$

Como conocemos la cuota constante anual, *a*, entonces también podemos usar la siguiente expresión:

$$r_m = \frac{r}{1-(1+r)^{-N}} - \frac{1}{N} = \frac{0,055}{1-\left(1+0,055\right)^{-12}} - \frac{1}{12} = 3,27\ \%$$

A continuación, se presenta un nomograma que facilita el cálculo del interés medio de manera gráfica.

Nomograma para el cálculo del interés medio (r_m).



$$r_m = \left(\frac{r}{1-(1+r)^{-N}} - \frac{1}{N}\right)$$

r_m = Interés medio (tanto por uno)

r = Ratio bancario (tanto por uno)

N = Amortización (nº años)

Creado con Nomogen (Trevor Blight) Trevor Blight/Pedro Martínez-Pagán/Víctor Yepes (2023)

Nomograma 1. Cálculo del interés medio.

PROBLEMA 15. Se desea conocer el término amortizativo anual mediante el método de las cuotas fijas de una máquina cuyo capital de amortización es de 10.000 u.m., 2 años de vida útil y un interés compuesto anual del 6,5 %. Determinar el interés medio y el total de intereses.

SOLUCIÓN. En primer lugar se determina la cuota de amortización (suma de la amortización más los intereses) a interés compuesto por medio de la siguiente expresión:

$$a = \frac{V \cdot r}{1 - (1 + r)^{-N}}$$

donde:

- a = término amortizativo anual
- V = capital a amortizar
- r = tanto por uno de interés compuesto anual
- N = años de vida útil

Con los datos del problema,

$$a = \frac{10.000 \cdot 0{,}065}{1 - \left(1 + 0{,}065\right)^{-2}} = 5.492,61 \ \text{ u.m.}$$

El total de intereses será:

$$I = a \cdot N - V = 5.492,61 \cdot 2 - 10.000 = 985{,}23 \ \text{ u.m.}$$

Por tanto, el interés medio, r_m, será:

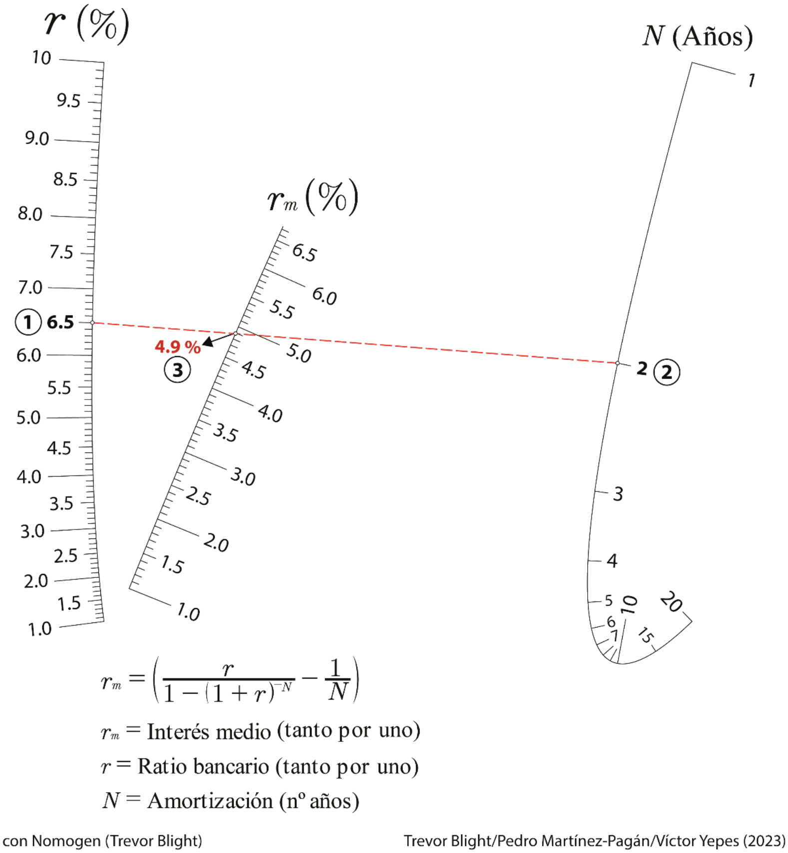
$$r_m = \frac{I}{N \cdot V} = \frac{985{,}23}{2 \cdot 10.000} = 4{,}93 \ \%$$

Que también se podría haber calculado como:

$$r_m = \frac{r}{1 - (1 + r)^{-N}} - \frac{1}{N} = \frac{0{,}065}{1 - \left(1 + 0{,}065\right)^{-2}} - \frac{1}{2} = 4{,}93 \ \%$$

A continuación dejo un nomograma que permite, también, realizar el cálculo del interés medio de forma gráfica.

Nomograma para el cálculo del interés medio (r_m).



Nomograma 2. Cálculo del interés medio.

PROBLEMA 16. Se considera una máquina cuyo coste de adquisición ha sido de 10.000.000 unidades monetarias (u.m.), con una vida útil óptima de 5 años. Se pide calcular el valor medio de la inversión, la depreciación anual y el valor en cada uno de los años de esta máquina por los métodos de depreciación lineal, suma de los años dígitos y de los costos decrecientes. Se supone, para los tres casos, un valor residual de la máquina cuyo valor sea el calculado por el método de los costos decrecientes.

SOLUCIÓN. El valor residual V_r de la inversión, calculado por el método de los costos decrecientes es:

$$V_r = V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{N}\right)^N = 10.000.000 \cdot \left(1 - \frac{2}{5}\right)^5 = 777.600 \text{ u.m.}$$

El valor de depreciación neta V_d de la inversión será, por consiguiente

$$V_d = V_a - V_r = 10.000.000 - 777.600 = 9.222.400 \ \text{u.m.}$$

Depreciación lineal

La depreciación anual *D*, va a ser

$$D = \frac{V_d}{N} = \frac{9.222.400 \ \text{u.m.}}{5 \ \text{años}} = 1.844.480 \ \text{u.m./año}$$

La depreciación anual y el valor que va adquiriendo el equipo cada año se puede ver en la siguiente tabla:

Años	Coeficiente de depreciación	Valor de cálculo	Cuota de amortización	Capital amortizado	Capital vivo
0	-			0	10.000.000
1	0,20	9.222.400	1.844.480	1.844.480	8.155.520
2	0,20	9.222.400	1.844.480	3.688.960	6.311.040
3	0,20	9.222.400	1.844.480	5.533.440	4.466.560
4	0,20	9.222.400	1.844.480	7.377.920	2.622.080
5	0,20	9.222.400	1.844.480	9.222.400	777.600

El valor medio de la inversión V_m al iniciar cada año, será igual a

$$V_m = \frac{1}{5} \cdot \left(9.222.400 + 7.377.920 + 5.533.440 + 3.688.960 + 1.844.480\right) =$$
$$= 5.533.440 \ \text{u.m.}$$

o lo que es lo mismo,

$$V_m = \frac{1}{2 \cdot 5} \cdot \left(5 + 1\right) \cdot 9.222.400 = 5.533.440 \, \text{u.m.}$$

Método de la suma de los años dígitos

Suma de los años dígitos = 1+2+3+4+5 = 15

La depreciación anual y el valor que va adquiriendo el equipo cada año se puede ver en la siguiente tabla:

Años	Coeficiente de depreciación	Valor de cálculo	Cuota de amortización	Capital amortizado	Capital vivo
0	-			0	10.000.000
1	5/15	9.222.400	3.074.133	3.074.133	6.925.867
2	4/15	9.222.400	2.459.307	5.533.440	4.466.560
3	3/15	9.222.400	1.844.480	7.377.920	2.622.080
4	2/15	9.222.400	1.229.653	8.607.573	1.392.427
5	1/15	9.222.400	614.827	9.222.400	777.600

El valor medio de la inversión V_m al iniciar cada año, será igual a

$$V_m = \frac{1}{5} \cdot \left(9.222.400 + 6.148.267 + 3.688.960 + 1.844.480 + 614.827\right) =$$

$$= 4.303.787 \ \text{u.m.}$$

es decir,

$$V_m = \frac{5+2}{3 \cdot 5} \cdot 9.222.400 = 4.303.787 \ \text{u.m.}$$

Método de los costos decrecientes

Porcentaje de depreciación anual = 100/5 = 20%

Depreciación anual = 2 · 20% = 40%

La depreciación anual y el valor que va adquiriendo el equipo cada año se puede ver en la siguiente tabla:

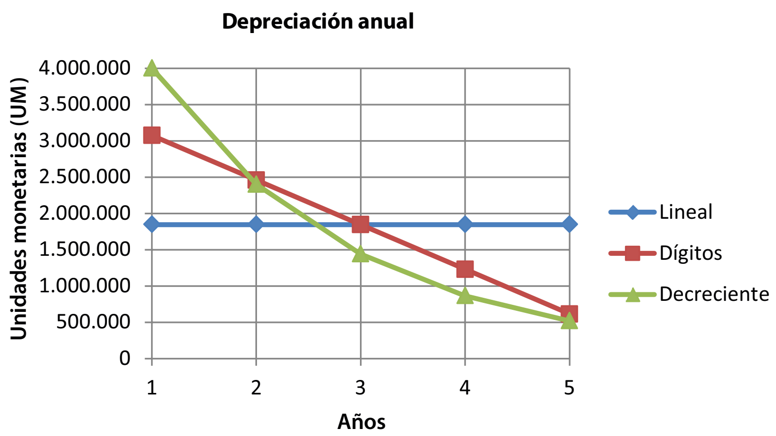
Años	Coeficiente de depreciación	Valor de cálculo	Cuota de amortización	Capital amortizado	Capital vivo
0	-			0	10.000.000
1	0,40	10.000.000	4.000.000	4.000.000	6.000.000
2	0,40	6.000.000	2.400.000	6.400.000	3.600.000
3	0,40	3.600.000	1.440.000	7.840.000	2.160.000
4	0,40	2.160.000	864.000	8.704.000	1.296.000
5	0,40	1.296.000	518.400	9.222.400	777.600

El valor medio de la inversión V_m al iniciar cada año, será igual a

$$V_m = \frac{1}{5} \cdot \left(10 + 6 + 3{,}6 + 2{,}16 + 1{,}296\right) \cdot 10^6 - 777.600 = 3.833.600 \ \text{u.m.}$$

o lo que es lo mismo,

$$V_m = \frac{10.000.000}{2} \cdot \left[1 - 3 \cdot \left(1 - \frac{2}{3}\right)^5\right] = 3.833.600 \text{ u.m.}$$



PROBLEMA 17. De entre las siguientes máquinas de obras públicas se desea averiguar aquella cuyo coste horario por amortización, calculado por el método de depreciación lineal, sea menor.

Máquina	Coste de adquisición (u.m.)	Valor residual (u.m.)	Valor rodaje (u.m.)	Vida económica (horas)	Trabajo anual (horas)
A	25.000.000	2.000.000	1.500.000	12.000	1.800
B	35.000.000	500.000	-	18.000	1.900
C	27.000.000	-	-	15.000	2.000
D	50.000.000	7.000.000	3.000.000	25.000	2.500

Para dicha máquina se pide, aplicando el método de amortización de la suma de los años dígitos, lo siguiente:

a) Calcular el valor de reventa de la máquina al final del tercer año

b) Importe total amortizado en dichos tres años

c) Coste horario de amortización medio para dichos tres años. ¿Es dicho valor superior o inferior al calculado por el método lineal?

Se supondrá excluido el coste de las ruedas para el cálculo del valor de reventa y en las amortizaciones.

SOLUCIÓN

- Cálculo de la amortización horaria:

$$Mq_A \rightarrow \frac{25.000.000 - 2.000.000 - 1.500.000}{12.000} = 1.792 \text{ u.m./h}$$

$$Mq_B \rightarrow \frac{35.000.000 - 500.000}{18.000} = 1.917 \text{ u.m. /h}$$

$$Mq_C \rightarrow \frac{27.000.000}{15.000} = 1.800 \text{ u.m./h}$$

$$Mq_D \rightarrow \frac{50.000.000 - 7.000.000 - 3.00.000}{25.000} = 1.600 \text{ u.m./h}$$

La máquina de menor coste horario por amortización es la D.

- Método de la suma de los años dígitos.

La vida económica será la siguiente:

$$\frac{25.000\ h}{2.500\ h/año} = 10\ años$$

Suma de los años dígitos = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10 = 55

La depreciación anual y el valor que va adquiriendo el equipo cada año se puede ver en la siguiente tabla (se excluye el valor del rodaje):

Años	Coeficiente	Valor de cálculo	Cuota de amortización	Capital amortizado	Capital vivo (sin ruedas)
0	-	-		0	47.000.000
1	10/55	40.000.000	7.272.727	7.272.727	39.727.272
2	9/55	40.000.000	6.545.455	13.818.182	33.181.817
3	8/15	40.000.000	5.818.182	19.636.364	27.363.635

a) Valor de reventa al final del tercer año 27.363.635 u.m. (se excluye el valor residual de las ruedas)

b) Importe amortizado en los tres años = 7.272.727 + 6.545.455 + 5.818.182 = 19.636.364 u.m.

c) Coste de amortización medio en dichos tres años

$$\frac{19.636.364 \text{ u.m.}}{3 \cdot 2.500 \text{ h}} = 2.618 \text{ u.m./h}$$

Este valor es superior a las 1.600 u.m./h calculadas por el método lineal.

PROBLEMA 18. Deducir la expresión del valor medio de inversión de una máquina aplicando el método de la amortización lineal, suponiendo que su valor residual es nulo.

SOLUCIÓN. Sea V_a el valor de adquisición de la máquina y n el número de años en los que se debe de amortizar. El cuadro de amortización va a ser el siguiente:

Años	Depreciación en el año	Valor en el año
0	-	V_a
1	$\frac{V_a}{n}$	$V_a - \frac{V_a}{n} = V_a\left(1 - \frac{1}{n}\right)$
2	$\frac{V_a}{n}$	$V_a\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{V_a}{n} = V_a\left(1 - \frac{2}{n}\right)$
…	…	…
i	$\frac{V_a}{n}$	$V_a\left(1 - \frac{i-1}{n}\right) - \frac{V_a}{n} = V_a\left(1 - \frac{i}{n}\right)$
…	…	…
n	$\frac{V_a}{n}$	$V_a\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) - \frac{V_a}{n} = V_a\left(1 - \frac{n}{n}\right) = 0$

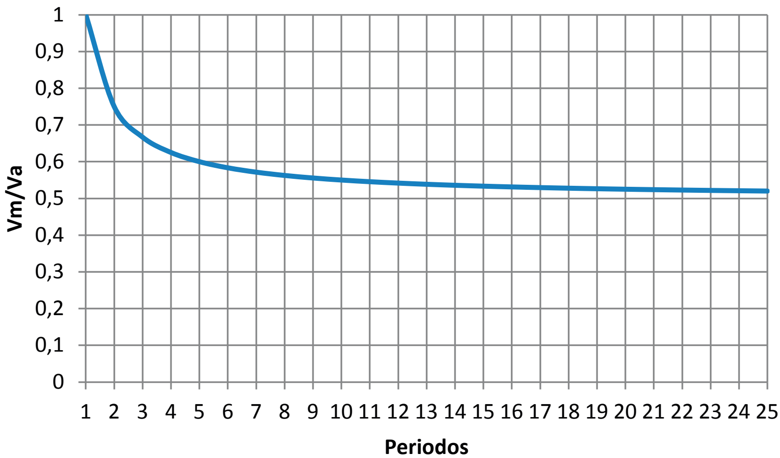
El valor medio de la inversión se calculará como sigue:

$$V_m = \frac{V_a}{n}\left[1 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{n}\right) + \ldots + \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)\right] =$$

$$= \frac{V_a}{n}\left[n - \left(\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \ldots + \frac{i}{n} + \ldots + \frac{n-1}{n}\right)\right] = \frac{V_a}{n}\left[n - (n-1)\frac{\frac{1}{n} + \frac{n-1}{n}}{2}\right] =$$

$$= \frac{V_\mathrm{a}}{n}\left[n - \frac{(n-1)}{2}\right] = \frac{n+1}{2n} V_a$$

Expresada esta relación en forma de gráfica, queda como sigue:



PROBLEMA 19. Deducir la expresión del valor medio de inversión y el valor residual de una máquina amortizada con el método de los costos decrecientes. Para el cálculo del valor medio de la inversión no se restará al valor de adquisición el valor residual.

SOLUCIÓN. Sea V_a el valor de adquisición de la máquina y *n* el número de años en los que se debe de amortizar. El cuadro de amortización va a ser el que se muestra a continuación.

Años	Coeficiente de depreciación	Depreciación en el año	Valor en el año
0	-	-	V_a
1	$\frac{2}{n}$	$\frac{2}{n} \cdot V_a$	$V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$
2	$\frac{2}{n}$	$\frac{2}{n} \cdot V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)$	$V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2$
…	…	…	…
i	$\frac{2}{n}$	$\frac{2}{n} \cdot V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{i-1}$	$V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^i$
…	…	…	…
n	$\frac{2}{n}$	$\frac{2}{n} \cdot V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-1}$	$V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$

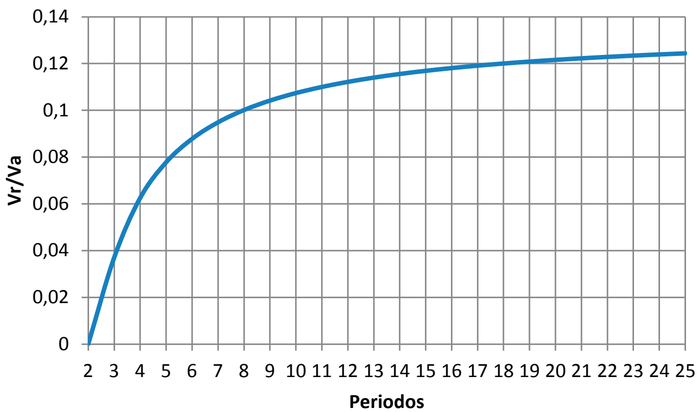
El valor residual, por tanto, va a ser:

$$V_r = V_a \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n$$

Si se calcula el límite de este valor, para *n* crecientes, se obtiene lo siguiente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n = \lim_{k\to 0} (1+k)^{\frac{-2}{k}} = \lim_{k\to 0} \left[\frac{1}{(1+k)^{\frac{1}{k}}}\right]^2 = \frac{1}{e^2} = 0{,}1353$$

El valor residual se puede representar en la gráfica que sigue:



El valor medio de la inversión será:

$$V_m = \frac{V_a}{n} \cdot \left[1 + \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^i + \ldots + \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-1}\right]$$

La suma de esta serie será:

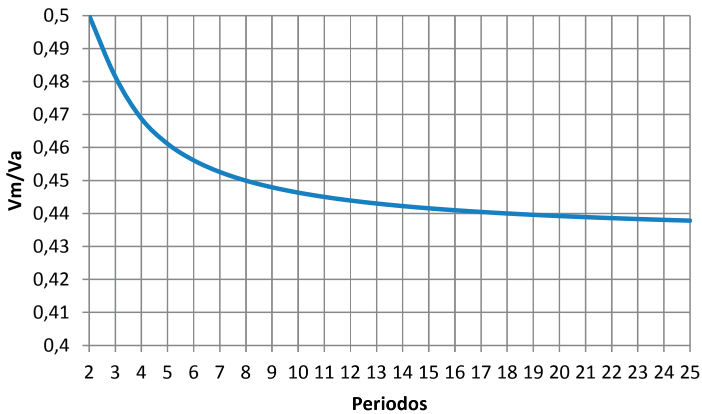
$$V_m = \frac{V_a}{n} \cdot \frac{1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n}{1 - 1 + \frac{2}{n}} = \frac{V_a}{2} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right]$$

Calculando el límite de dicha expresión cuando *n* tiende a infinito:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{V_a}{2} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{2}{n}\right)^n\right] = \lim_{k\to 0} \frac{V_a}{2} \cdot \left[1 - (1 + k)^{\frac{-2}{k}}\right] =$$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{V_a}{2} \cdot \left\{1 - \left[\frac{1}{(1 + k)^{\frac{1}{k}}}\right]^2\right\} = \frac{V_a}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{e^2}\right) = 0{,}4333 \cdot V_a$$

Si se refleja la expresión del valor medio de la inversión en una curva:



En el supuesto de considerar el valor de depreciación como la diferencia entre el valor de adquisición y el valor residual, el valor medio de la inversión sería el siguiente:

$$V_m = \frac{V_d}{2}\left[1-\left(1-\frac{2}{N}\right)^N\right] = \frac{\left(V_a - V_r\right)}{2}\left[1-\left(1-\frac{2}{N}\right)^N\right] = \frac{V_a}{2}\left[1-3\cdot\left(1-\frac{2}{N}\right)^N\right]$$

PROBLEMA 20. Una máquina cuya vida económica es de 3 años, se desea amortizar por el método de la suma de los años dígitos. Su valor de adquisición es de 30.000 u.m. y el valor residual se cifra en el 10% del valor de adquisición. Se supone un interés anual del 9% para el primer año y del 10% para los dos siguientes. Se pide construir el cuadro de amortización de la máquina, suponiendo cuotas de amortización anuales.

SOLUCIÓN. El valor de depreciación será

$$V_d = V_a - V_r = 30.000 - 3.000 = 27.000 \text{ u.m.}$$

La suma de los años dígitos es 1 + 2 + 3 = 6

Las cuantías de las cuotas de amortización son:

$$A_1 = \frac{3}{6}\cdot 27.000 = 13.500$$

$$A_2 = \frac{2}{6}\cdot 27.000 = 9.000$$

$$A_3 = \frac{13}{6}\cdot 27.000 = 4.500$$

La estructura del cuadro de amortización y sus resultados se exponen a continuación:

Fin de período s	Réditos i_s	Términos amortizativos a_s	Cuotas de interés I_s	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado M_s	Capital vivo C_s
Origen	-	-	-	-	-	30.000
1	0,09	16.200	2.700	13.500	13.500	16.500
2	0,10	10.650	1.650	9.000	22.500	7.500
3	0,10	5.250	750	4.500	27.000	3.000

donde los términos amortizativos se calculan como la suma de las cuotas por intereses y por amortización, y donde la cuota de intereses para un período se calcula aplicando los intereses de dicho período al capital vivo al final del período anterior.

PROBLEMA 21. Calcular por el método de la suma de los años dígitos las cuotas de amortización anuales –suma de amortización e intereses– de una máquina cuyo valor de adquisición es de 35.000 u.m., tiene una vida útil de 4 años, un valor residual de 1.000 u.m., y el tipo de interés es del 9% anual durante los dos primeros años y del 12% en el resto. ¿Cuál es el valor medio de la inversión? ¿Cuál sería el interés medio anual a aplicar al valor de adquisición de forma que la suma total por intereses fuese igual a la calculada mediante el cuadro de amortización?

SOLUCIÓN. El valor de depreciación será:

$$V_d = V_a - V_r = 35.000 - 1.000 = 34.000 \ \text{ u.m.}$$

La suma de los años dígitos es 1 + 2 + 3 + 4 = 10, y por tanto, as cuantías de las cuotas de amortización son:

$$A_1 = \frac{4}{10} \cdot 34.000 = 13.600$$

$$A_2 = \frac{3}{10} \cdot 34.000 = 10.200$$

$$A_3 = \frac{2}{10} \cdot 34.000 = 6.800$$

$$A_4 = \frac{1}{10} \cdot 34.000 = 3.400$$

La estructura del cuadro de amortización y sus resultados se exponen a continuación:

Fin de período s	Réditos i_s	Términos amortizativos a_s	Cuotas de interés I_s	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado M_s	Capital vivo C_s
Origen	-	-	-	-	-	35.000
1	0,09	16.750	3.150	13.600	13.600	21.400
2	0,09	12.126	1.926	10.200	23.800	11.200
3	0,12	8.144	1.344	6.800	30.600	4.400
4	0,12	3.928	528	3.400	34.000	1.000

donde los términos amortizativos se calculan como la suma de las cuotas por intereses por amortización, y donde la cuota de intereses para un período se calcula aplicando los intereses de dicho período al capital vivo al final del período anterior.

El valor medio de la inversión será:

$$V_m = \frac{34 + 21{,}4 + 11{,}2 + 4{,}4}{4} \cdot 10^3 = 18.000 \, \text{u.m.}$$

El valor anual medio de los intereses es de 1.737 u.m. El interés medio anual aplicable al valor de adquisición para que el coste por intereses fuera igual al calculado sería:

$$i_m = \frac{1.737}{35.000} = 4{,}9629\ \%$$

PROBLEMA 22. Construir el cuadro de amortización anual para una máquina de obras públicas cuyo coste de adquisición fue de 50.000.000 u.m. y cuyo valor residual se supone nulo. Se supone una vida útil de 3 años y unos réditos anuales del 9% para los dos primeros años y del 11% para el tercero. Se pretende que todos los términos amortizativos sean iguales para todos los períodos, excepto para el primer año, que se supondrá el doble.

SOLUCIÓN. El capital a amortizar C_0 es de 50.000.000 u.m. Las cuantías de los términos amortizativos (suma de las cuotas de amortización y de interés) se denominarán *a*, excepto para el primer año que será 2*a*.

En el origen se cumplirá que

$$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot \prod_{h=1}^{r} \left(1 + i_h\right)^{-1}$$

por consiguiente, se puede despejar de dicha ecuación para la obtención de *a*:

$$50.000\,.\,000 = (1 + 0{,}09)^{-1} \cdot 2a + (1 + 0{,}09)^{-1} \cdot (1 + 0{,}09)^{-1} \cdot a + (1 + 0{,}09)^{-1}$$
$$\cdot\, (1 + 0{,}09)^{-1} \cdot (1 + 0{,}11)^{-1} \cdot a$$

implicando que $a = 14.556.835$ u.m.

La estructura del cuadro de amortización y sus resultados se exponen a continuación:

Fin de período s	Réditos i_s	Términos amortizativos a_s	Cuotas de interés I_s	Cuotas de amortización A_s	Capital total amortizado M_s	Capital vivo C_s
Origen	-	-	-	-	-	50.000.000
1	0,09	29.113.669	4.500.000	24.613.669	24.613.669	25.386.331
2	0,09	14.556.835	2.284.770	12.272.065	36.885.734	13.114.266
3	0,11	14.556.835	1.442.569	13.114.266	50.000.000	0

Para seguir leyendo, inicie el proceso de compra, click aquí