

# Sumario

<b>1</b>	<b>TEORÍA DE CONJUNTOS</b>	<b>13</b>
1.1	EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS . . . . .	13
1.1.1	Conjuntos . . . . .	13
1.1.2	Ejemplos . . . . .	14
1.1.3	Nota . . . . .	15
1.1.4	Representaciones gráficas . . . . .	15
1.1.5	Unión, intersección y complementación de conjuntos . . . . .	15
1.1.6	Ejemplos . . . . .	17
1.1.7	El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos . . . . .	18
1.2	PRODUCTOS CARTESIANOS . . . . .	19
1.2.1	Producto cartesiano . . . . .	19
1.2.2	Ejemplos . . . . .	19
1.2.3	Relación binaria de equivalencia . . . . .	20
1.3	APLICACIONES . . . . .	20
1.3.1	Correspondencias . . . . .	20
1.3.2	Ejemplo . . . . .	20
1.3.3	Nota . . . . .	21
1.3.4	Ejemplo . . . . .	21
1.3.5	Aplicaciones . . . . .	22
1.3.6	Ejemplos . . . . .	22
1.3.7	Clasificación de aplicaciones . . . . .	23
1.3.8	Ejemplo . . . . .	23
1.3.9	Sobre aplicaciones biyectivas . . . . .	24
1.3.10	Ejemplo . . . . .	25
1.3.11	Composición de aplicaciones . . . . .	25
1.3.12	Ejemplo . . . . .	26
1.4	GRUPOS, ANILLOS Y CUERPOS . . . . .	27
1.4.1	Grupos . . . . .	27
1.4.2	Anillos . . . . .	28
1.4.3	Cuerpos . . . . .	28

1.5	COMBINATORIA . . . . .	29
1.5.1	Variaciones con repetición . . . . .	29
1.5.2	Ejemplo . . . . .	29
1.5.3	Variaciones ordinarias . . . . .	29
1.5.4	Ejemplo . . . . .	29
1.5.5	Permutaciones . . . . .	30
1.5.6	Ejemplo . . . . .	30
1.5.7	Combinaciones . . . . .	30
1.5.8	Ejemplo . . . . .	30
1.5.9	Nota . . . . .	31
1.5.10	Combinaciones con repetición . . . . .	31
1.5.11	Ejemplos . . . . .	31
1.5.12	Permutaciones con repetición . . . . .	31
1.5.13	Ejemplo . . . . .	32
1.5.14	Números combinatorios. Propiedades . . . . .	32
1.5.15	Triángulo de Tartaglia . . . . .	32
1.5.16	Binomio de Newton . . . . .	33
1.5.17	Ejemplo . . . . .	34
1.6	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	34
1.7	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	39
1.8	PROYECTO 1.1: Estudio del anillo $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ . . . . .	40
1.9	PROYECTO 1.2: Funciones booleanas . . . . .	41
1.10	PROYECTO 1.3: El cuerpo de los números complejos . . . . .	42
<b>2</b>	<b>ESPACIOS VECTORIALES</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1	ESPACIOS VECTORIALES . . . . .	45
2.1.1	Espacio vectorial . . . . .	45
2.1.2	El espacio vectorial $\mathbb{R}^n$ . . . . .	46
2.1.3	Representaciones geométricas . . . . .	47
2.1.4	Subespacios vectoriales . . . . .	47
2.1.5	Teorema (caracterización de subespacios vectoriales) . . . . .	48
2.1.6	Ejemplos . . . . .	48
2.1.7	Proposición . . . . .	48
2.1.8	Nota . . . . .	48
2.2	COMBINACIONES LINEALES . . . . .	49
2.2.1	Combinaciones lineales. Espacios de dimensión finita . . . . .	49
2.2.2	Ecuación continua de la recta . . . . .	49
2.2.3	Ejemplo . . . . .	49
2.2.4	Nota . . . . .	50
2.2.5	Propiedades inmediatas . . . . .	51
2.2.6	Interpretaciones geométricas . . . . .	51

2.2.7	Dependencia e independencia lineal . . . . .	51
2.2.8	Ejemplos . . . . .	52
2.2.9	Consecuencias . . . . .	52
2.2.10	Proposición . . . . .	53
2.2.11	Ejemplo . . . . .	53
2.3	BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL . . . . .	53
2.3.1	Base de un espacio vectorial . . . . .	53
2.3.2	Ejemplo . . . . .	53
2.3.3	Bases canónicas . . . . .	54
2.3.4	Teorema de la dimensión . . . . .	54
2.3.5	Nota . . . . .	55
2.3.6	Teorema (existencia de bases) . . . . .	55
2.3.7	Teorema de la base incompleta . . . . .	55
2.3.8	Ejemplo . . . . .	55
2.3.9	Teorema . . . . .	56
2.3.10	Interpretaciones geométricas . . . . .	56
2.4	PROCESO DE REDUCCIÓN DE GAUSS . . . . .	56
2.4.1	Lema . . . . .	57
2.4.2	Lema . . . . .	57
2.4.3	Ejemplo . . . . .	57
2.4.4	Nota . . . . .	57
2.4.5	Ejemplo . . . . .	58
2.4.6	Proceso de reducción de Gauss . . . . .	58
2.4.7	Nota . . . . .	59
2.4.8	Ejemplo . . . . .	59
2.4.9	Nota . . . . .	60
2.5	SUMAS DE SUBESPACIOS VECTORIALES . . . . .	60
2.5.1	Suma de dos subespacios vectoriales . . . . .	60
2.5.2	Nota . . . . .	60
2.5.3	Teorema . . . . .	61
2.5.4	Ejemplo . . . . .	61
2.5.5	Suma directa . . . . .	61
2.5.6	Teorema de caracterización de sumas directas . . . . .	61
2.5.7	Nota . . . . .	62
2.5.8	Ejemplo . . . . .	62
2.5.9	Suma (directa) de $n$ subespacios vectoriales . . . . .	62
2.5.10	Teorema . . . . .	62
2.6	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	62
2.7	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	69
2.8	PROYECTO 2.1: El espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ . . . . .	70

<b>3</b>	<b>MATRICES</b>	<b>73</b>
3.1	EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES . . . . .	73
3.1.1	Matriz . . . . .	73
3.1.2	Ejemplos . . . . .	74
3.1.3	El grupo abeliano $(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$ . . . . .	74
3.1.4	El espacio vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}$ . . . . .	75
3.1.5	Ejemplos . . . . .	75
3.1.6	Base de $\mathcal{M}_{m \times n}$ . . . . .	75
3.1.7	Ejemplo . . . . .	75
3.2	EL ANILLO DE LAS MATRICES CUADRADAS . . . . .	76
3.2.1	El producto de matrices . . . . .	76
3.2.2	Ejemplo . . . . .	76
3.2.3	El anillo de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$ . . . . .	77
3.3	TIPOS ESPECIALES DE MATRICES . . . . .	77
3.3.1	Matriz inversible . . . . .	77
3.3.2	Ejemplos . . . . .	78
3.3.3	Matrices triangulares . . . . .	78
3.3.4	Ejemplo . . . . .	79
3.3.5	Traspuesta de una matriz . . . . .	79
3.3.6	Ejemplos . . . . .	79
3.3.7	Nota . . . . .	79
3.3.8	Propiedades de la matriz traspuesta . . . . .	80
3.3.9	Otros tipos de matrices . . . . .	80
3.4	RANGO DE UNA MATRIZ . . . . .	80
3.4.1	Definición . . . . .	80
3.4.2	Teorema . . . . .	80
3.4.3	Ejemplo . . . . .	81
3.5	MATRICES ELEMENTALES . . . . .	81
3.5.1	Matrices elementales . . . . .	81
3.5.2	Ejemplos . . . . .	82
3.5.3	Inversibilidad de las matrices elementales . . . . .	82
3.5.4	Nota . . . . .	83
3.5.5	La inversa de una matriz por matrices elementales . . . . .	83
3.5.6	Ejemplo . . . . .	83
3.5.7	Teorema . . . . .	84
3.5.8	Inversas de matrices triangulares . . . . .	84
3.5.9	Ejemplo . . . . .	85
3.5.10	Descomposición $LU$ . . . . .	85
3.5.11	Nota . . . . .	85
3.5.12	Matrices escalonadas. Descomposición $LS$ . . . . .	85
3.5.13	Ejemplo . . . . .	86

3.6	MATRICES POR BLOQUES . . . . .	87
3.6.1	Matrices por bloques . . . . .	87
3.6.2	Ejemplo . . . . .	89
3.7	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	89
3.8	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	99
3.9	PROYECTO 3.1: Introducción a la teoría de grafos . . . . .	101
3.10	PROYECTO 3.2: Descomposición en valores singulares (DVS) . . . . .	103
3.11	PROYECTO 3.3: Cadenas de Markov . . . . .	107
<b>4</b>	<b>APLICACIONES LINEALES</b> . . . . .	<b>111</b>
4.1	APLICACIONES LINEALES . . . . .	111
4.1.1	Aplicaciones lineales . . . . .	111
4.1.2	Propiedades . . . . .	112
4.1.3	Ejemplos . . . . .	112
4.1.4	Giro . . . . .	112
4.1.5	Ejemplo . . . . .	112
4.1.6	Núcleo . . . . .	113
4.1.7	Teorema (caracterización de aplicaciones inyectivas) . . . . .	113
4.1.8	Nota . . . . .	113
4.1.9	Ejemplo . . . . .	113
4.1.10	Proposición . . . . .	114
4.1.11	Proposición . . . . .	114
4.1.12	Teorema de la dimensión (de aplicaciones lineales) . . . . .	114
4.1.13	Nota . . . . .	115
4.1.14	Corolario (idoneidad de las aplicaciones lineales) . . . . .	115
4.2	MATRICES Y APLICACIONES LINEALES . . . . .	115
4.2.1	Matriz asociada a una aplicación lineal . . . . .	115
4.2.2	Ejemplo . . . . .	116
4.2.3	Rango de una aplicación lineal . . . . .	117
4.2.4	Ejemplo . . . . .	117
4.2.5	Matriz de la aplicación identidad $I$ . . . . .	118
4.2.6	Isomorfismo entre aplicaciones lineales y matrices . . . . .	119
4.2.7	Nota . . . . .	119
4.2.8	Proposición . . . . .	120
4.3	APLICACIONES LINEALES Y MATRICES INVERSIBLES . . . . .	120
4.3.1	Proposición . . . . .	120
4.3.2	Nota . . . . .	120
4.3.3	Proposición . . . . .	120
4.3.4	Composición de aplicaciones lineales . . . . .	120
4.3.5	Ejemplo . . . . .	121
4.3.6	Proposición . . . . .	121

4.3.7	Teorema . . . . .	121
4.3.8	Corolario . . . . .	121
4.4	CAMBIOS DE BASE . . . . .	121
4.4.1	Expresión matricial del cambio de base en un espacio vectorial . . . . .	121
4.4.2	Ejemplo . . . . .	122
4.4.3	Matrices asociadas a una aplicación lineal . . . . .	124
4.4.4	Nota . . . . .	125
4.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	125
4.6	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	131
4.7	PROYECTO 4.1: Códigos lineales . . . . .	132
4.8	PROYECTO 4.2: Las transformaciones afines y la compresión fractal de imágenes . . . . .	133
4.9	PROYECTO 4.3: Transformada de Fourier y de Laplace . . . . .	136
<b>5</b>	<b>DETERMINANTES</b> . . . . .	<b>139</b>
5.1	DETERMINANTE DE ORDEN $n$ . . . . .	139
5.1.1	Signatura de una permutación . . . . .	139
5.1.2	Determinante de orden $n$ . . . . .	140
5.1.3	Determinante de orden 3 y de orden 2 . . . . .	141
5.1.4	Ejemplos . . . . .	141
5.1.5	Propiedades de los determinantes de orden $n$ . . . . .	142
5.1.6	Ejemplos . . . . .	143
5.2	DESARROLLO DE UN DETERMINANTE . . . . .	144
5.2.1	Menor complementario y adjunto . . . . .	144
5.2.2	Ejemplo . . . . .	145
5.2.3	Proposición . . . . .	145
5.2.4	Proposición (desarrollo de un determinante) . . . . .	145
5.2.5	Proposición (determinante de una matriz triangular) . . . . .	146
5.2.6	Cálculo práctico de determinantes . . . . .	146
5.2.7	Ejemplo . . . . .	146
5.3	MATRIZ INVERSIBLE . . . . .	147
5.3.1	Determinante de las matrices elementales . . . . .	147
5.3.2	Proposición . . . . .	148
5.3.3	Nota . . . . .	148
5.3.4	Proposición . . . . .	148
5.3.5	Teorema . . . . .	148
5.3.6	Corolario . . . . .	149
5.3.7	Nota . . . . .	149
5.3.8	Proposición . . . . .	149
5.3.9	Cálculo de la matriz inversa . . . . .	149
5.3.10	Ejemplo . . . . .	150

5.3.11	Aplicación al cálculo del rango de una matriz . . . . .	150
5.3.12	Ejemplo . . . . .	151
5.3.13	Expresiones con determinantes . . . . .	151
5.4	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	152
5.5	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	160
5.6	PROYECTO 5.1: Aplicación de los determinantes a la Geometría Euclídea . . . . .	161
<b>6</b>	<b>SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES</b> . . . . .	<b>165</b>
6.1	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	165
6.1.1	Sistemas de ecuaciones lineales . . . . .	165
6.1.2	Solución de un sistema de ecuaciones lineales . . . . .	166
6.1.3	Matriz ampliada . . . . .	167
6.1.4	Proposición . . . . .	167
6.1.5	Ejemplo . . . . .	167
6.1.6	Clasificación de sistemas . . . . .	168
6.1.7	Teorema de Rouché-Fröbenius . . . . .	168
6.1.8	Ejemplos . . . . .	169
6.2	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	172
6.2.1	Regla de Cramer . . . . .	172
6.2.2	Ejemplos . . . . .	173
6.2.3	Método de reducción de Gauss . . . . .	174
6.2.4	Ejemplo . . . . .	175
6.2.5	Sistema homogéneo . . . . .	176
6.2.6	Ejemplo . . . . .	176
6.2.7	Resolución de un sistema de Cramer por descomposición $LU$ . . . . .	177
6.2.8	Resolución de un sistema por descomposición $LS$ . . . . .	177
6.2.9	Interpolación polinómica . . . . .	178
6.2.10	Sistemas sobredeterminados . . . . .	179
6.3	ECUACIONES DE LOS SUBESPACIOS DE $\mathbb{R}^n$ . . . . .	179
6.3.1	Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial . . . . .	179
6.3.2	Nota . . . . .	180
6.3.3	Ecuaciones de un subespacio vectorial . . . . .	180
6.3.4	Nota . . . . .	181
6.3.5	Eliminación de parámetros . . . . .	182
6.3.6	Ejemplo . . . . .	183
6.4	RESOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES . . . . .	184
6.4.1	Aproximaciones sucesivas . . . . .	184
6.4.2	Métodos iterativos. Convergencia . . . . .	185
6.4.3	Método de Jacobi . . . . .	186
6.4.4	Método de Gauss-Seidel . . . . .	187

6.4.5	Nota . . . . .	187
6.5	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	187
6.6	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	202
6.7	PROYECTO 6.1: Programación lineal (optimización) . . . . .	203
6.8	PROYECTO 6.2: Sistemas mal condicionados y pivoteo . . . . .	208
<b>7</b>	<b>DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES</b> . . . . .	<b>211</b>
7.1	SUBESPACIOS PROPIOS . . . . .	211
7.1.1	Introducción . . . . .	211
7.1.2	Vectores propios . . . . .	212
7.1.3	Nota . . . . .	212
7.1.4	Subespacio propio . . . . .	212
7.1.5	Ejemplo . . . . .	212
7.1.6	El polinomio característico . . . . .	212
7.1.7	Unicidad del polinomio característico . . . . .	213
7.1.8	Ejemplo . . . . .	214
7.2	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES . . . . .	214
7.2.1	Definición . . . . .	214
7.2.2	Proposición . . . . .	214
7.2.3	Nota . . . . .	214
7.2.4	Proposición . . . . .	215
7.2.5	Corolario . . . . .	215
7.2.6	Ejemplo . . . . .	215
7.2.7	Teorema (caracterización de los endomorfismos diagonalizables) . . . . .	216
7.2.8	Nota . . . . .	216
7.2.9	Ejemplo . . . . .	216
7.2.10	Corolario . . . . .	216
7.2.11	Nota . . . . .	216
7.2.12	Matriz de paso . . . . .	217
7.2.13	Potencia de una matriz . . . . .	217
7.2.14	Matrices simétricas . . . . .	217
7.2.15	Nota . . . . .	217
7.3	EJERCICIOS RESUELTOS . . . . .	217
7.4	EJERCICIOS PROPUESTOS . . . . .	226
7.5	PROYECTO 7.1: Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes . . . . .	227
7.6	PROYECTO 7.2: Estudio de la ecuación general de cónicas y cuádricas . . . . .	229
	<b>Bibliografía</b> . . . . .	<b>233</b>