

Samuel Sánchez Caballero
Antonio Vicente Martínez Sanz
Rafael Pla Ferrando
Teodomiro Boronat Vitoria

Problemes resolts del disseny de màquines

**EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

Revisió lingüística: Àrea de Promoció i Normalització Lingüística de la UPV

“La publicació d’aquest llibre ha rebut una ajuda de l’Àrea de Promoció i Normalització Lingüística de la Universitat Politècnica de València per a la redacció de manuals universitaris en valencià”

Els continguts d'aquesta publicació han sigut aprovats pel Comité Editorial del Departament.

Primera edició, 2011 ▪ reimpressió, 2016

© Samuel Sánchez Caballero
Antonio Vicente Martínez Sanz
Rafael Pla Ferrando
Teodomiro Boronat Vitoria

© de les fotografies: l'autor/a

© de la present edició: Editorial Universitat Politècnica de València
Tel. 96 387 70 12 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 917_03_01_08

Imprimeix: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-8363-753-1
Imprés sota demanda

L'Editorial UPV autoritza la reproducció, traducció i difusió parcial de la present publicació amb fins científics, educatius i d'investigació que no siguen comercials ni de lucre, sempre que s'identifique i es reconega degudament a l'Editorial UPV, la publicació i els autors. L'autorització per a reproduir, difondre o traduir el present estudi o compilar o crear obres derivades del mateix en qualsevol forma, amb fins comercials/lucratius o sense ànim de lucre, haurà de sol·licitar-se per escrit al [correo edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

Imprés a Espanya

*A Noelia i Diego,
per ser el motor de la meua existència.*

*Al meu millor amic:
Miguel Ángel Chinarro.
“L'amistat és una ànima que habita en dos cossos,
un cor que batega en dues ànimes.”
Aristòtil.
In memoriam.*

Pròleg

Aquest llibre és el resultat de més de vint-i-cinc anys de docència dels autors en l'assignatura de Disseny de Màquines. Representa un compendi de problemes d'examen i d'aula desenvolupats durant aquest temps.

La idea del llibre sorgeix de la carència de problemes amb orientació professional relacionats amb el disseny de màquines. Sense arribar a ser tan complexos com els problemes de la vida real, superen l'orientació excessivament academicista de les col·leccions de problemes existents actualment.

L'assignatura de Disseny de Màquines és troncal, amb un temari prou estandarditzat dins de l'enginyeria mecànica arreu del món. El llibre aborda els temes capitals del disseny de màquines: el comportament sota càrregues estàtiques i dinàmiques, i deixa el càlcul de components de màquines pendent per a publicacions futures.

Està estructurat seguint l'esquema de desenvolupament típic per a aquests temes. S'inicia amb les teories de fallada sota condicions estàtiques, i continua amb la mecànica de la fractura. Tot seguit, es tracten les teories de la fatiga uniaxial sota càrregues exclusivament alternants, després s'afegeixen les mitjanes, i es finalitza amb la fatiga multiaxial, el dany acumulatiu i la fatiga des del punt de vista de la mecànica de la fractura. Al final del llibre, es pot trobar un formulari i el conjunt de taules més utilitzades, molt útils per a la resolució de problemes.

Esperem que el lector pugui gaudir del llibre tant com ho hem fet nosaltres durant l'elaboració.

ELS AUTORS

Índex

Pròleg	I
Índex general	III
Índex de figures	V
Índex de taules	IX
1 Càrregues estàtiques: Teories de fallada	1
P1: Obtenció de les tensions principals d'un estat tensional triaxial	3
P2: Càlcul d'un angle d'acer	5
P3: Càlcul d'un cilindre a la fluència.	12
P4: Barra de fosa.	14
P5: Expressió genèrica per al càlcul d'eixos sota càrregues estàtiques	18
P6: Depòsit de GLP.	21
2 Càrregues variables: Fatiga	25
P1: Barra d'acer a fatiga axial	27
P2: Càlcul d'una barra rectangular	30
P3: Barra d'acer a fatiga.	33
P4: Màxima tensió alternant per una barra d'acer.	36
P5: Càlcul de una barra rectangular	38
P6: Càlcul d'un eix a torsió.	43
P7: Càlcul d'un eix boig	51

P8: Càlcul de l'eix d'una roda de motocicleta	54
P9: Càlcul d'una ballesa	60
P10: Eix de l'hèlice d'un vaixell	63
P11: Càlcul de l'eix de una bomba	67
P12: Expressió genèrica per al càlcul d'eixos a la fatiga	72
P13: Caragol de potència	75
P14: Càlcul d'un cilindre a la fluència i a la fatiga.	79
P15: Càlcul d'un cigonyal	85
P16: Eix d'una transmissió automàtica	91
 3 Mecànica de la fractura	 95
P1: Clivella en unió soldada	97
P2: Barra rectangular clivellada	99
P3: Duració d'una placa clivellada	102
P4: Clivella en xapa	103
P5: Placa clivellada	105
 4 Problemes combinats	 107
P1: Càlcul d'un cilindre extractor.	109
P2: Càlcul de l'eix d'un reductor	128
P3: Càlcul d'una cadena	144
P4: Càlcul dels caragols de la culata d'una bomba.	149
 A Tensors	 153
 B Formulari de Disseny de Màquines	 163
 C Concentradors de tensions geomètriques	 185
 D Factors d'intensitat d'esforços	 203
 E Materials	 209
 Bibliografia	 227

Índex de figures

1.1	Angle d'acer	5
1.2	Barra de fosa	14
1.3	Teoría de Coulomb-Mohr modificada	16
1.4	Depòsit de GLP	21
2.1	Barra d'acer a fatiga axial	27
2.2	Components de la tensió	27
2.3	Càlcul d'una barra rectangular a fatiga axial	30
2.4	Components de la tensió	33
2.5	Diagrama de Whöler	37
2.6	Barra rectangular	38
2.7	Distribució temporal de la força	41
2.8	Diagrama de Whöler	41
2.9	Eix a torsió	43
2.10	Evolució temporal dels parells flector i torsor en els tres casos . . .	44
2.11	Eix boig	51
2.12	Diagrama de moments	52
2.13	Eix d'una roda de motocicleta	54
2.14	Evolució temporal de la tensió de flexió en les seccions 1, 2 i 3 . . .	56

2.15 Ballesta	60
2.16 Distribució temporal de la força	61
2.17 Evolució temporal del parell torsor i moment flector	64
2.18 Eix de una bomba	67
2.19 Força Radial	68
2.20 Força Tang.	68
2.21 Força Axial	68
2.22 Components de la tensió	69
2.23 Caragol de potència	75
2.24 Cicle de treball d'un cilindre. Tensions en la camisa	81
3.1 Clivella en unió soldada	97
3.2 Barra rectangular clivellada	99
3.3 Fleix infinit amb clivella a l'extrem sotmès a tensió	99
3.4 Fleix infinit amb clivella a l'extrem sotmès a flexió	100
3.5 Placa clivellada	105
4.1 Cilindre extractor	109
4.2 Cicle de treball d'un cilindre. Tensions en la camisa	115
4.3 Integració numèrica	127
4.4 Cadena cinemàtica	129
4.5 Transmissió per corretges	129
4.6 Reductor	130
4.7 Forces en les corretges	132
4.8 Forces i moments resultants en l'eix d'entrada	135
4.9 Forces resultants en el pla XY	136
4.10 Forces resultants en el pla XZ	137

4.11	Distribució temporal dels esforços	140
4.12	Cadena per a cinta transportadora	144
4.13	Distribució temporal de la força sobre cada caragol	151
A.1	Tensions principals projectades sobre un plànol octaèdric normal l'eix hidrostàtic	157
B.1	Coeficients de vinclament	169
B.2	Bigues en volada	181
B.3	Bigues amb doble suport simple	182
B.4	Bigues amb encastrament i suport simple	183
C.1	Eix amb un canvi de secció sota càrrega axial	187
C.2	Eix amb un canvi de secció sota flexió	188
C.3	Eix amb un canvi de secció sota càrrega torsió	189
C.4	Eix amb una ranura semicircular sota càrrega axial	190
C.5	Eix amb una ranura semicircular sota flexió	191
C.6	Eix amb una ranura semicircular sota torsió	192
C.7	Eix amb un forat sotmès a flexió	193
C.8	Eix amb un forat sotmès a torsió	194
C.9	Xapa amb canvi de secció sotmesa a càrrega axial	195
C.10	Xapa amb canvi de secció sotmesa a flexió	196
C.11	Xapa amb una ranura semicircular sota càrrega axial	197
C.12	Xapa amb una ranura semicircular sota flexió	198
C.13	Xapa amb forat sota càrrega axial	199
C.14	Xapa amb forat sota flexió	200
C.15	Xaveter sota torsió	201
C.16	Xaveter sota flexió	202

Índex de taules

B.2	Propietats geomètriques de les seccions més comunes	166
B.3	Propietats geomètriques de les seccions més comunes	167
B.4	Propietats geomètriques de les seccions més comunes	168
B.5	Tensió crítica de vinclament	169
B.6	Factors a i b per al factor d'acabat	172
B.7	Diàmetre equivalent per a diferents geometries	173
B.8	Factors α i β per al factor de càrrega	173
B.9	Factors de confiabilitat	174
B.10	Coeficients de l'equació de Paris	176
D.1	Factors d'intensitat d'esforços	205
E.1	Acers estructurals laminats en calent. Característiques mecàniques EN 10025-2: 2006	211
E.2	Acers estructurals laminats en calent. Característiques mecàniques EN 10025-2: 2006	212
E.3	Acers estructurals laminats en calent. Equivalència entre designa- cions antigues	213
E.4	Acers estructurals laminats en calent. Equivalència entre designa- cions antigues	214
E.5	Acers trempables. Característiques mecàniques a temperatura am- bient en estat de tremp i reveniment	215

E.6	Acers trempables. Característiques mecàniques a temperatura ambient en estat normalitzat	216
E.7	Acers trempables. Equivalència entre designacions antigues	217
E.8	Acers trempables aliats de qualitat. Característiques mecàniques a temperatura ambient en estat de tremp i reveniment	218
E.9	Acers trempables aliats de qualitat. Equivalència entre designacions antigues	219
E.10	Foses grises. Característiques mecàniques EN 1561:1997	220
E.11	Acers d'alt límit elàstic i baix aliatge (HSLA) laminats en calent. Característiques mecàniques EN 10149/2	221
E.12	Acers d'alt límit elàstic i baix aliatge (HSLA) laminats en calent. Equivalència entre les diferents normes	221
E.13	Acers d'alt límit elàstic i baix aliatge (HSLA) laminats en fred. Característiques mecàniques EN 10268	221
E.14	Acers d'alt límit elàstic i baix aliatge (HSLA) laminats en fred. Equivalència entre les diferents normes	222
E.15	Acers per a embotició i conformació en fred laminats en calent. Característiques mecàniques EN 10111	222
E.16	Acers per a embotició i conformació en fred laminats en calent. Equivalència entre les diferents normes	222
E.17	Tenacitat dels metalls	223
E.18	Tenacitat dels polímers	224
E.19	Tenacitat dels materials ceràmics	224
E.20	Tenacitat dels materials compostos	224
E.21	Materials sintètics	225

Capítol 1

Càrregues estàtiques: Teories de fallada

P1: Obtenció de les tensions principals d'un estat tensional triaxial

Determineu les tensions principals de l'estat tensional següent: $\sigma_x = 40$ MPa, $\sigma_y = 30$ MPa, $\sigma_z = 30$ MPa, $\tau_{xy} = 10$ MPa, $\tau_{xz} = 10$ MPa, $\tau_{yz} = 0$.

Resolució

En primer lloc es formula el tensor de tensions:

$$\mathbf{T} = [T] = \begin{pmatrix} 40 & 10 & 10 \\ 10 & 30 & 0 \\ 10 & 0 & 30 \end{pmatrix}$$

Seguidament calculem els invariants del tensor de tensions:

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 40 + 30 + 30 = 100 \\ I_2 &= \sigma_y \sigma_x + \sigma_z \sigma_x + \sigma_y \sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 = \\ &= 40 \cdot 30 + 40 \cdot 30 + 30 \cdot 30 - 10^2 - 10^2 - 0 = 3100 \\ I_3 &= |\mathbf{T}| = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 40 & 10 & 10 \\ 10 & 30 & 0 \\ 10 & 0 & 30 \end{vmatrix} = 30000 \end{aligned}$$

El càlcul de les tensions principals requereix la resolució de l'equació de tercer grau: $\sigma^3 - I_1 \sigma^2 + I_2 \sigma - I_3 = 0$

Per a evitar aquesta resolució es procedeix a referenciar l'espai de tensions de Haigh-Westergaard de forma diferent.

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{I_1}{3} + 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \theta \\ \sigma_2 &= \frac{I_1}{3} + 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) \\ \sigma_3 &= \frac{I_1}{3} + 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

Els invariants del tensor de distorsió són:

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{I_1^2}{3} - I_2 = \frac{100^2}{3} - 3100 = 233,33 \\ J_3 &= 2 \left(\frac{I_1}{3} \right)^3 - \frac{I_1 I_2}{3} + I_3 = 2 \cdot \left(\frac{100}{3} \right)^3 - \frac{100 \cdot 3100}{3} + 30000 = 740,74 \end{aligned}$$

La posició del punt P en coordenades polars respecte al sistema de referència sobre el plànel π :

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) = \frac{1}{3} \cdot \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{740,74}{233,33^{3/2}} \right) = 0,3335$$

Finalment obtenim les tensions principals:

$$\sigma_1 = \frac{I_1}{3} + 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \theta = \frac{100}{3} + 2\sqrt{\frac{233,33}{3}} \cdot \cos 0,3335 = 50 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} \sigma_2 &= \frac{I_1}{3} + 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \left(\theta - \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{100}{3} + 2\sqrt{\frac{233,33}{3}} \cdot \cos \left(0,3335 - \frac{2\pi}{3} \right) = 30 \text{ MPa} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_3 &= \frac{I_1}{3} + 2\sqrt{\frac{J_2}{3}} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) = \\ &= \frac{100}{3} + 2\sqrt{\frac{233,33}{3}} \cdot \cos \left(0,3335 + \frac{2\pi}{3} \right) = 20 \text{ MPa} \end{aligned}$$

Aleshores, el vector de tensions principals és: $\sigma = (50, 30, 20)$

P2: Càlcul d'un angle d'acer

L'angle de la figura està fabricat d'un acer de construcció de baix contingut en carboni: S-225-JR ($S_y = 225$ MPa). Les dades geomètriques son: $L_1 = 140$ mm, $L_2 = 150$ mm, $d_2 = 10$ mm i $n_y = 2$. Suposant que s'hi aplica una força vertical F , es vol determinar el següent:

1. Les tensions generades en els punts A i B.
2. Les tensions principals en els punts A i B.
3. La força màxima aplicable F a l'extrem de l'angle, segons la teoria de l'esforç tallant màxim, perquè la peça no falle en el segon tram.
4. La força màxima aplicable F a l'extrem de l'angle, segons la teoria de Von Mises.
5. La relació de seccions necessària d_1/d_2 , perquè la tensió màxima en el primer tram siga, aproximadament, igual a la del segon tram. Substituïu numèricament per al cas anterior.
6. Per a la força màxima calculada en l'apartat anterior, determineu la idoneïtat del disseny anterior a través de l'avaluació del coeficient de seguretat, en el cas que s'empren una fosa grisa EN-GJL-300 (GG-30) amb les següents característiques mecàniques: $S_{uc} = 960$ MPa, $S_{ut} = 300$ MPa.

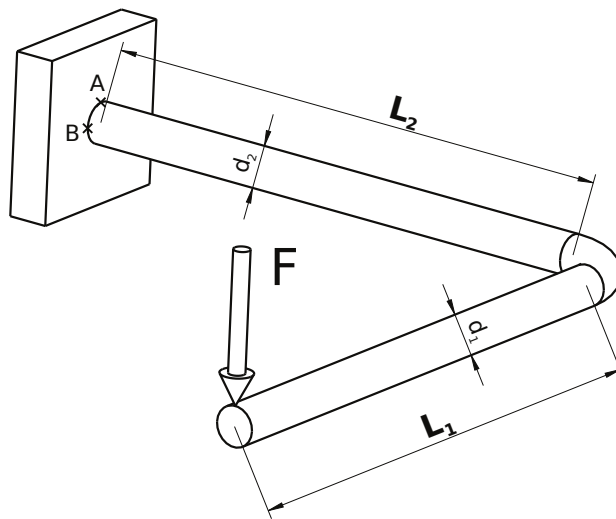


Figura 1.1: Angle d'acer

Resolució

1. Les tensions generades en els punts A i B

(a) Tensions en el punt A

En aquest punt, la peça suporta tensions normals de tracció degudes a la flexió, junt amb tensions tallants degudes a la torsió generada pel descentrament de la càrrega respecte de la fibra neutra:

$$\sigma_{A_x} = \frac{M}{W_x} = \frac{F \cdot L_2}{I_{zz}/r} = \frac{F \cdot L_2}{\frac{\pi \cdot d_2^4}{64} \cdot \frac{2}{d_2}} = \frac{32 \cdot F \cdot L_2}{\pi \cdot d_2^3}$$

$$\tau_{A_{xz}} = \frac{T}{W_o} = \frac{F \cdot L_1}{I_o/r} = \frac{F \cdot L_1}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d_2^4}{64} \cdot \frac{2}{d_2}} = \frac{16 \cdot F \cdot L_1}{\pi \cdot d_2^3}$$

Substituint numèricament, tenim el següent:

$$\sigma_{A_x} = \frac{32 \cdot F \cdot 150}{\pi \cdot 10^3} = 1,5279 \cdot F$$

$$\tau_{A_{xz}} = \frac{16 \cdot F \cdot 140}{\pi \cdot 10^3} = 0,7130 \cdot F$$

(b) Tensions en el punt B

En aquest punt, com que es troba localitzat en el pla neutre, no hi ha tensions de tipus normal, únicament hi ha tensions de tipus tallant:

- Tensió tallant de torsió:

$$\tau_{tB_{xy}} = \frac{T}{W_o} = \frac{F \cdot L_1}{I_o/r} = \frac{F \cdot L_1}{2 \cdot \frac{\pi \cdot d_2^4}{64} \cdot \frac{2}{d_2}} = \frac{16 \cdot F \cdot L_1}{\pi \cdot d_2^3}$$

- Tensió tallant de flexió (Collignon):

$$\tau_{fB_{xy}} = \frac{4 \cdot F}{3 \cdot A} = \frac{16 \cdot F}{3 \cdot \pi \cdot d_2^3}$$

- Tensió tallant resultant:

$$\tau_{B_{xy}} = \tau_{fB_{xy}} + \tau_{tB_{xy}} = \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \left(L_1 + \frac{1}{3} \right)$$

Substituint numèricament, tenim el següent:

$$\tau_{B_{xy}} = \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot 10^3} \left(140 + \frac{1}{3} \right) = 0,730 \cdot F$$

2. Les tensions principals en els punts A i B.

(a) Tensions principals en el punt A

A partir de les tensions normals i tallants, substituint en les equacions de Mohr, tenim el següent:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{A_{1,2}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} \\
 &= \frac{\frac{32 \cdot F \cdot L_2}{\pi \cdot d_2^3} + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{32 \cdot F \cdot L_2}{\pi \cdot d_2^3} - 0}{2}\right)^2 + \left(\frac{16 \cdot F \cdot L_1}{\pi \cdot d_2^3}\right)^2} \\
 &= \frac{16 \cdot F \cdot L_2}{\pi \cdot d_2^3} \pm \sqrt{\left(\frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3}\right)^2 \cdot (L_1^2 + L_2^2)} \\
 &= \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \left[L_2 \pm \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right]
 \end{aligned}$$

Substituint numèricament, tenim el següent:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{A_{1,2}} &= \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot 10^3} \cdot \left[150 \pm \sqrt{140^2 + 150^2} \right] \\
 \sigma_{A_1} &= 1,8090 \cdot F \\
 \sigma_{A_2} &= -0,2810 \cdot F
 \end{aligned}$$

(b) Tensions principals en el punt B

A partir de les tensions tallants, substituint en les equacions de Mohr, tenim el següent:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{B_{1,2}} &= \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\
 &= \frac{0 + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{0 - 0}{2}\right)^2 + \left(\frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \left(L_1 + \frac{1}{3}\right)\right)^2} \\
 &= \pm \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \left(L_1 + \frac{1}{3}\right)
 \end{aligned}$$

Substituint numèricament, tenim el següent:

$$\sigma_{B_{1,2}} = \pm \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot 10^3} \left(140 + \frac{1}{3}\right) = 0,730 \cdot F$$

3. La força màxima aplicable F a l'extrem de l'angle, segons la teoria de l'esforç tallant màxim, perquè la peça no falle en el segon tram.

Per a resoldre aquest apartat, hem de plantejar-nos quin dels punts, A o B, és el més carregat. Lògicament, el punt A correspon al punt d'esforç màxim, mentre que el punt B està suportant un esforç inferior. Si ens centrem en el punt A, tenim que, en aquest punt, la peça està sotmesa a un estat de tracció/compressió, i, per tant, queda emmarcat en el segon quadrant de la teoria de l'esforç tallant màxim. Per a aquest quadrant, la recta que delimita el rang de treball de la peça ve definida per l'equació següent: $\sigma_1 - \sigma_2 \leq \frac{S_y}{n}$. Substituint els valors de tensions principals calculats anteriorment, tenim el següent:

$$\begin{aligned} \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \left[L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right] - \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \left[L_2 - \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right] &\leq \frac{S_y}{n} \\ \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \left[L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} - L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right] &\leq \frac{S_y}{n} \\ \frac{32 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2} &\leq \frac{S_y}{n} \end{aligned}$$

Aïllant el valor de la força, tenim el següent:

$$F \leq \frac{S_y \cdot \pi \cdot d_2^3}{32 \cdot n \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2}}$$

Substituint numèricament, tenim la següent força màxima:

$$F \leq \frac{225 \cdot \pi \cdot 10^3}{32 \cdot 2 \cdot \sqrt{140^2 + 150^2}} \approx 53,8 \text{ N}$$

4. La força màxima aplicable F a l'extrem de l'angle, segons la teoria de Von Mises.

Seguint un raonament anàleg a l'anterior, calculem la tensió equivalent de Von Mises per al punt A:

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \cdot \sigma_2} \\ &= \sqrt{\left[\frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \left[L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right] \right]^2 + \left[\frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \left[L_2 - \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right] \right]^2 -} \\ &\quad - \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \left[L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right] \cdot \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \left[L_2 - \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \sqrt{\left[L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right]^2 + \left[L_2 - \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right]^2 -} \\
 &\quad - \left[L_2 + \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right] \cdot \left[L_2 - \sqrt{L_1^2 + L_2^2} \right] \\
 &= \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \sqrt{L_2^2 + L_1^2 + L_2^2 + 2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2} + L_2^2 + L_1^2 + L_2^2 -} \\
 &\quad - 2 \cdot L_2 \cdot \sqrt{L_1^2 + L_2^2} - (L_2^2 - (L_1^2 + L_2^2)) \\
 \sigma_{eq} &= \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \sqrt{3 \cdot L_1^2 + 4 \cdot L_2^2}
 \end{aligned}$$

La tensió equivalent no pot superar el límit de fluència, amb la qual cosa tenim el següent:

$$\sigma_{eq} \leq \frac{S_y}{n} \rightarrow \frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \sqrt{3 \cdot L_1^2 + 4 \cdot L_2^2} \leq \frac{S_y}{n}$$

Aïllant el valor de la força, tenim el següent:

$$F \leq \frac{S_y \cdot \pi \cdot d_2^3}{32 \cdot n \cdot \sqrt{3 \cdot L_1^2 + 4 \cdot L_2^2}}$$

Substituint numèricament, tenim el següent:

$$F \leq \frac{225 \cdot \pi \cdot 10^3}{32 \cdot 2 \cdot \sqrt{3 \cdot 140^2 + 4 \cdot 150^2}} \approx 57,26 \text{ N}$$

5. La relació de seccions necessària d_1/d_2 , perquè la tensió màxima en el primer tram siga, aproximadament, igual a la del segon tram. Substituïu numèricament per al cas anterior.

En el primer tram, l'únic esforç que hi ha és el de flexió, que només genera forces normals i, per tant, el podem suposar com a principal i equivalent. La tensió de flexió generada és la següent:

$$\sigma_{eq} = \sigma_x = \frac{M}{W_x} = \frac{F \cdot L_1}{I_{zz}/r} = \frac{F \cdot L_1}{\frac{\pi \cdot d_1^4}{64} \cdot \frac{2}{d_1}} = \frac{32 \cdot F \cdot L_1}{\pi \cdot d_1^3}$$

Perquè hi haja igualtat de tensió en ambdues seccions, el quocient de tensions ha de ser igual a la unitat:

$$\frac{\sigma_{eq_{tramo2}}}{\sigma_{eq_{tramo1}}} = \frac{\frac{16 \cdot F}{\pi \cdot d_2^3} \cdot \sqrt{3 \cdot L_1^2 + 4 \cdot L_2^2}}{\frac{32 \cdot F \cdot L_1}{\pi \cdot d_1^3}} = 1$$

Aïllant la relació de seccions, tenim el següent:

$$\frac{d_2^3}{d_1^3} = \frac{\sqrt{3 \cdot L_1^2 + 4 \cdot L_2^2}}{2 \cdot L_1} \rightarrow \frac{d_2}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3 \cdot L_1^2 + 4 \cdot L_2^2}}{2 \cdot L_1}}$$

Substituint numèricament per al cas plantejat, obtenim la relació entre seccions:

$$\frac{d_2}{d_1} = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{3 \cdot 140^2 + 4 \cdot 150^2}}{2 \cdot 140}} \approx 1,11$$

6. Per a la força màxima calculada en l'apartat anterior, determineu la idoneïtat del disseny anterior a través de l'avaluació del coeficient de seguretat, en el cas que s'empren una fosa grisa EN-GJL-300 (GG-30) amb les següents característiques mecàniques: $S_{uc} = 960$ MPa, $S_{ut} = 300$ MPa. Per a la resolució de l'apartat, procedim a aplicar les equacions de Dowling substituint els valors de tensions principals calculats en els apartats anteriors:

$$\sigma_{A_1} = 1,8090 \cdot 57,26 \approx 103,59 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{A_2} = -0,2810 \cdot 57,26 \approx -16,09 \text{ MPa}$$

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{1}{2} \cdot \left[|\sigma_1 - \sigma_2| + \left(1 - \frac{2 \cdot S_{ut}}{S_{uc}} \right) \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[|103,59 + 16,09| + \left(1 - \frac{2 \cdot 300}{960} \right) \cdot (103,59 - 16,09) \right] \\ &\approx 76,245 \text{ MPa} \\ C_2 &= \frac{1}{2} \cdot \left[|\sigma_2 - \sigma_3| + \left(1 - \frac{2 \cdot S_{ut}}{S_{uc}} \right) \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[|16,09 + 0| + \left(1 - \frac{2 \cdot 300}{960} \right) \cdot (-16,09 + 0) \right] \approx 5,03 \text{ MPa} \\ C_3 &= \frac{1}{2} \cdot \left[|\sigma_3 - \sigma_1| + \left(1 - \frac{2 \cdot S_{ut}}{S_{uc}} \right) \cdot (\sigma_3 + \sigma_1) \right] \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[|0 + 103,59| + \left(1 - \frac{2 \cdot 300}{960} \right) \cdot (0 + 103,59) \right] \approx 71,2 \text{ MPa} \end{aligned}$$

La tensió equivalent es calcula a través dels sis valors anteriors:

$$\hat{\sigma} = MAX(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, C_1, C_2, C_3) = 103,59 \text{ MPa}$$

El coeficient de seguretat es calcula comparant la tensió equivalent amb la tensió de ruptura a tracció:

$$n = \frac{S_{ut}}{\hat{\sigma}} = \frac{300}{103,59} = 2,9$$

Atès que, per al disseny amb un material dúctil, s'ha triat un coeficient de seguretat mínim de dos, per a un material fràgil com ara la fosa, haurem d'emprar un coeficient de seguretat mínim de quatre (el doble), i, per tant, el disseny de la peça no és correcte per a l'ús de materials fràgils.

P3: Càlcul d'un cilindre a la fluència

Determineu el gruix i la resta de mesures d'un cilindre hidràulic, per a exercir una força de 50 kN amb un coeficient de seguretat a la fluència $n = 2,5$ emprant un acer S-275-JR ($S_y = 300$ MPa) i treballant a una pressió $p = 30$ MPa. Dades:

$$\sigma_x = \frac{pR}{2e} ; \sigma_y = \frac{pR}{e}$$

Resolució

1. Determinació del diàmetre necessari:

$$A = \frac{F}{p} = \frac{50000}{30} \frac{\cancel{\text{N}}}{\frac{\cancel{\text{N}}}{\text{mm}^2}} = 1666,67 \text{ mm}^2$$

$$A = \frac{\pi d^2}{4} \rightarrow d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 1666,67 \text{ mm}^2}{\pi}} \approx 46,07 \text{ mm} \rightarrow d = 50 \text{ mm}$$

2. Aplicació de les teories de fallada:

Ambdues tensions són normals i perpendiculars entre si, i per tant, podem prendre-les com a tensions principals.

- (a) Aplicació de la teoria de l'esforç tallant màxim: Ambdues tensions principals son

$$\sigma_1 = \sigma_x = \frac{pR}{2e}$$

$$\sigma_2 = \sigma_y = \frac{pR}{e}$$

Aplicant la teoria:

$$\begin{aligned} \sigma_{eq} &\leq \frac{|\sigma_1 - \sigma_2| + |\sigma_2 - \sigma_3| + |\sigma_3 - \sigma_1|}{2} = \\ &= \frac{\left| \frac{pR}{2e} - \frac{pR}{e} \right| + \left| \frac{pR}{e} - 0 \right| + \left| 0 - \frac{pR}{2e} \right|}{2} = \\ &= \frac{\left| \frac{pR}{2e} - \frac{2pR}{2e} \right| + \left| \frac{2pR}{2e} - 0 \right| + \left| 0 - \frac{pR}{2e} \right|}{2} = \\ &= \frac{\frac{pR}{2e} + \frac{2pR}{2e} + \frac{pR}{2e}}{2} = \frac{pR}{e} \end{aligned}$$

Aplicant la condició de resistència i aïllant el gruix, tenim el següent:

$$\sigma_{eq} = \frac{pR}{e} \leq \frac{S_y}{n}$$

$$\boxed{e \geq \frac{pRn}{S_y}}$$

$$e \geq \frac{30 \text{ MPa} \cdot 25 \text{ mm} \cdot 2,5}{300 \text{ MPa}} = 6,25 \text{ mm}$$

(b) Aplicació de la teoria de Von Mises:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2} = \sqrt{\left(\frac{pR}{2e}\right)^2 + \left(\frac{pR}{e}\right)^2 - \frac{pR}{2e} \cdot \frac{pR}{e}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(pR)^2}{4e^2} + \frac{4(pR)^2}{4e^2} - \frac{2(pR)^2}{2e^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{e}$$

Aplicant la condició de resistència i aïllant el gruix, tenim el següent:

$$\sigma \leq \frac{S_y}{n} \rightarrow \frac{pR}{2e} \sqrt{3} \leq \frac{S_y}{n}$$

$$\boxed{e \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pRn}{S_y}}$$

$$e \geq \frac{\sqrt{3} \cdot 30 \text{ MPa} \cdot 25 \text{ mm} \cdot 2,5}{2 \cdot 300 \text{ MPa}} = 5,41 \text{ mm}$$

P4: Barra de fosa

La barra de la figura, fabricada d'una fosa EN-GJL-150 (GG-15), amb $S_{uc} = 600$ MPa, $S_{ut} = 150$ MPa, està sotmesa als esforços següents: $F = 0,55$ kN, $P = 8$ kN i $T = 30$ N·m, $L = 100$ mm, $d = 20$ mm. Es demana determinar-hi el coeficient de seguretat a la ruptura.

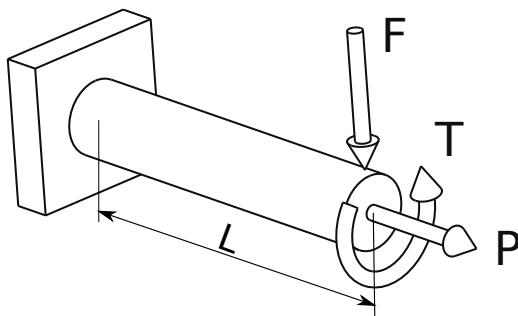


Figura 1.2: Barra de fosa

Resolució

1. Determinació del coeficient de seguretat a la ruptura.

(a) Determinació de la secció crítica:

El punt més desfavorable es troba localitzat a l'encast, on apareixen tres esforços davant del punt d'aplicació, on només n'apareixen dos.

(b) Càlcul dels esforços generats:

Els esforços generats per les càrregues sobre l'eix, a l'encast, són els següents:

- La força F (flexió): $M = F \cdot l = 550 \cdot 0,1 = 55$ N·m = 55000 N·mm.
- La força P (tracció): $P = 8000$ N
- El moment T (torsió): $T = 30$ N·m = 30000 N·mm.

Considerem únicament l'esforç de flexió pura, ja que, segons es va demostrar, les tensions tallants de Collignon que actuen a l'ànima generen una tensió molt inferior a les tensions de flexió, que són màximes a les fibres exteriors.

(c) Càlcul de les tensions associades als esforços:

Els esforços generats per les càrregues externes produeixen les tensions següents:

- Flexió: $\sigma_{x1} = \frac{M}{W} = \frac{M \cdot c}{I_{yy}} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot d^3} = \frac{32 \cdot 55000}{\pi \cdot 20^3} \approx 70$ MPa

- Tracció: $\sigma_{x_2} = \frac{P}{A} = \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} = \frac{4 \cdot 8000}{\pi \cdot 20^2} = 25,5 \text{ MPa}$
- Torsió: $\tau_{xz} = \frac{T}{W_0} = \frac{T}{2 \cdot W} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} = \frac{16 \cdot 30000}{\pi \cdot 20^3} \approx 19,1 \text{ MPa}$

Amb la qual cosa, les tensions resultants són les següents:

$$\sigma_x = \sigma_{x_1} + \sigma_{x_2} = \frac{32 \cdot M}{\pi \cdot d^3} + \frac{4 \cdot P}{\pi \cdot d^2} = \frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(M + \frac{P \cdot d}{8} \right) \approx 95,5 \text{ MPa}$$

$$\tau_{xz} = \frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \approx 19,1 \text{ MPa}$$

Una vegada calculades les tensions resultants, procedim a calcular les tensions principals.

(d) Càlcul de les tensions principals:

Atès que les tensions principals només contenen un component normal i un de tallant, podem assimilar l'estat tridimensional a un estat tensional pla.

Aplicant les equacions de Mohr, calculem els tensions principals.

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{\sigma_x + 0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - 0}{2} \right)^2 + \tau_{xz}^2}$$

$$= \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xz}^2}$$

Operant numèricament, tenim el següent:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\sigma_x^2 + 4 \cdot \tau_{xz}^2} = \frac{95,5}{2} \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{95,5^2 + 4 \cdot 19,1^2}$$

$$= \begin{cases} \sigma_1 = 99,2 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = -3,7 \text{ MPa} \end{cases}$$

Operant algebraicament, tenim el següent:

$$\sigma_{1,2} = \frac{\frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(M + \frac{P \cdot d}{8} \right)}{2}$$

$$\pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\left(\frac{32}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(M + \frac{P \cdot d}{8} \right) \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{16 \cdot T}{\pi \cdot d^3} \right)^2}$$

$$= \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \left(M + \frac{P \cdot d}{8} \right) \pm \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \sqrt{\left(M + \frac{P \cdot d}{8} \right)^2 + T^2}$$

$$= \frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \left[M + \frac{P \cdot d}{8} \pm \sqrt{\left(M + \frac{P \cdot d}{8} \right)^2 + T^2} \right]$$

Una vegada calculades les tensions principals, apliquem la teoria de fallada corresponent; en aquest cas, com que es tracta d'un material fràgil, la teoria de Mohr modificada.

- (e) Aplicació de la teoria de Mohr modificada:
Per a l'aplicació d'aquesta teoria, hem de conèixer el quadrant en què ens trobem.

- Operant numèricament:

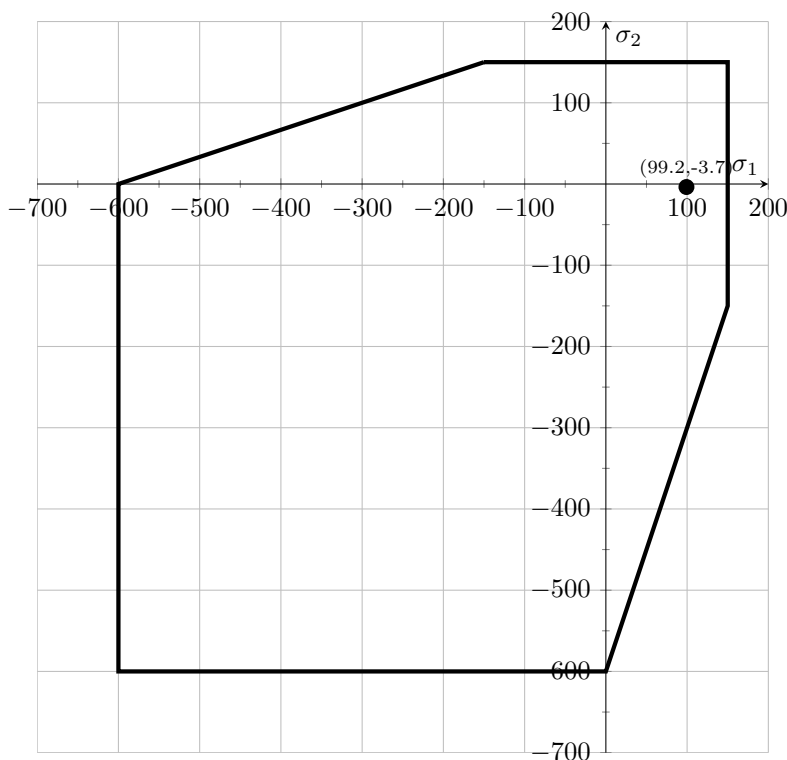


Figura 1.3: Teoria de Coulomb-Mohr modificada

Atès que σ_1 és positiu i σ_2 és negatiu, ens trobem en el quart quadrant. Tenint en compte, a més, que $|\sigma_1| > |\sigma_2|$, ens trobem en el primer tram del quart quadrant, on la condició de resistència és $\sigma_1 \leq S_{ut}/n$. Aïllant el coeficient de seguretat, es resol el problema:

$$n \leq \frac{S_{ut}}{\sigma_1} = \frac{150}{99,2} \approx 1,5$$

- Operant algebraicament:

Per a continuar operant algebraicament, farem un poc d'abstracció per a determinar en quin quadrant ens trobem. L'equació anterior podem reescriure-la com:

$$\sigma_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + b^2}}{c} = \begin{cases} \sigma_1 = \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{c} \\ \sigma_2 = \frac{a - \sqrt{a^2 + b^2}}{c} \end{cases}$$

Revisant l'equació, podem veure que σ_1 ha de ser positiva, i, per tant, la primera tensió principal és de tracció.

D'altra banda, $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$, després $a - \sqrt{a^2 + b^2} < 0$, i, per tant, la segona tensió principal σ_2 ha de ser negativa i, doncs, de compressió. Una tensió principal positiva i una altra negativa ens enquadra dins del quart quadrant de la teoria de Coulomb-Mohr. Addicionalment, del raonament anterior podem determinar fàcilment que $|\sigma_1| > |\sigma_2|$, amb la qual cosa, ens situem en la primera zona de la teoria, on la tensió límit ve definida per l'equació següent:

$$\sigma_1 \leq S_{ut}/n.$$

Substituint la primera tensió principal i aïllant el gruix, tenim el següent:

$$\frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \left[M + \frac{P \cdot d}{8} + \sqrt{\left(M + \frac{P \cdot d}{8} \right)^2 + T^2} \right] \leq \frac{S_{ut}}{n}$$

$$n \leq \frac{S_{ut}}{\frac{16}{\pi \cdot d^3} \cdot \left[M + \frac{P \cdot d}{8} + \sqrt{\left(M + \frac{P \cdot d}{8} \right)^2 + T^2} \right]}$$

L'equació anterior és una solució genèrica als problemes de flexió, tracció i torsió de materials fràgils. Substituint numèricament:

$$n \leq \frac{150}{\frac{16}{\pi \cdot 20^3} \cdot \left[55000 + \frac{8000 \cdot 20}{8} + \sqrt{\left(55000 + \frac{8000 \cdot 20}{8} \right)^2 + 30000^2} \right]}$$

$$\approx 1,5$$

P5: Expressió genèrica per al càlcul d'eixos sota càrregues estàtiques

Elaboreu una equació de disseny sota càrregues estàtiques d'un arbre sotmès a flexió, torsió i càrrega axial, en què la solució siga el coeficient de seguretat n , prenent com a paràmetres T , M , S_{ut} , d , considerant el comportament del material com dúctil i emprant les teories de Von Mises per a materials dúctils i Mohr modificada per als fràgils.

Resolució

1. Determinació dels components d'esforç:

- Flexió: $\sigma_{x_1} = \frac{M_y}{I_{yy}}c = \frac{32M}{\pi d^3}$
- Tracció: $\sigma_{x_2} = \frac{F}{A} = \frac{4F}{\pi d^2}$
- Torsió: $\tau_{xz} = \frac{T}{I_0}c = \frac{16T}{\pi d^3}$

2. Coeficient de seguretat segons la teoria de Von Mises:

$$\begin{aligned}\sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 + 6\tau_{xz}^2}{2}} = \sqrt{\sigma_x^2 + 3\tau_{xz}^2}\end{aligned}$$

La tensió equivalent de Von Mises es pot determinar a través dels parells flector i torsor en un punt de diàmetre conegut, per mitjà de l'equació següent:

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\left(\frac{32M}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2}\right)^2 + 3\left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{32}{\pi d^3} \sqrt{\left(M + \frac{Fd}{8}\right)^2 + \frac{3}{4}T^2}$$

La condició de resistència requereix que no se supere el límit de fluència o ruptura, segons el càlcul a realitzar, $\sigma_{eq} \leq \frac{S_x}{n}$. Per tant:

$$\frac{32}{\pi d^3} \sqrt{\left(M + \frac{Fd}{8}\right)^2 + \frac{3}{4}T^2} \leq \frac{S_x}{n}$$

Aïllant n tenim:

$$n \leq \frac{S_x}{\frac{32}{\pi d^3} \sqrt{\left(M + \frac{Fd}{8}\right)^2 + \frac{3}{4}T^2}}$$

On:

S_x es el límit de resistència a la fluència o a la ruptura, segons el càlcul a realitzar.

3. Coeficient de seguretat segons la teoria de Mohr modificada:

Aquest requereix del càlcul previ de les tensions principals. Aplicant les equacions de Mohr tenim:

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2} = \\ &= \frac{\frac{32M}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\frac{32M}{\pi d^3} + \frac{4F}{\pi d^2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{16T}{\pi d^3}\right)^2} = \\ &= \frac{16}{\pi d^3} \left[M + \frac{Fd}{8} \pm \sqrt{\left(M + \frac{Fd}{8}\right)^2 + \frac{3}{4}T^2} \right] \end{aligned}$$

Una vegada calculades les tensions principals, apliquem la teoria de fallada de Mohr modificada. Per a l'aplicació d'aquesta teoria, hem de conèixer el quadrant en què ens trobem. Per a continuar operant algebraicament, farem un poc d'abstracció per a determinar en quin quadrant ens trobem. L'equació anterior podem reescriure-la com:

$$\sigma_{1,2} = K \left(a \pm \sqrt{a^2 + b^2} \right)$$

Revisant l'equació, podem veure que σ_1 ha de ser positiva, i, per tant, la primera tensió principal és de tracció. D'altra banda, $\sqrt{a^2 + b^2} > 0$, després $a - \sqrt{a^2 + b^2} < 0$, i, per tant, la segona tensió principal σ_2 ha de ser negativa i, doncs, de compressió. Una tensió principal positiva i una altra negativa ens enquadra dins del quart quadrant de la teoria de Coulomb-Mohr.

Adicionalment, del raonament anterior podem determinar fàcilment que $|\sigma_1| > |\sigma_2|$, amb la qual cosa, ens situem en la primera zona de la teoria, on la tensió límit ve definida per l'equació següent: $\sigma_1 \leq S_{ut}/n$.

Substituint la primera tensió principal i aïllant el gruix, tenim el següent:

$$\frac{16}{\pi d^3} \left[M + \frac{Pd}{8} + \sqrt{\left(M + \frac{Pd}{8} \right)^2 + T^2} \right] \leq \frac{S_{ut}}{n}$$
$$n \leq \frac{S_{ut}}{\frac{16}{\pi d^3} \left[M + \frac{Pd}{8} + \sqrt{\left(M + \frac{Pd}{8} \right)^2 + T^2} \right]}$$

P6: Depòsit de GLP

Es vol dissenyar un depòsit com el de la figura, per a emmagatzemar gas propà (GLP), a una pressió de 20 bars (kg/cm^2), emprant, per a això, xapes d'acer de construcció, laminat en calent S 275JR ($S_y = 275 \text{ MPa}$, $S_{ut} = 450 \text{ MPa}$, $K_{IC} = 75 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$), que s'han de corbar i s'han de soldar conformant la geometria del depòsit. La pressió de prova ha de ser de 26 bars.

A partir de les dades anteriors, es vol determinar, per a la superfície cilíndrica, el següent:

1. El gruix que han de tenir les xapes per a suportar la pressió de prova amb $n_{\text{ruptura}} = 1,5$.
2. El gruix que han de tenir les xapes, que ens permeta detectar una clivella en la direcció axial, de 2 mm com a màxim, abans que es produïska la ruptura del depòsit.
3. En quina direcció és més probable que es desenvolupen aquestes clivelles? Raonar la resposta.

Notes:

- Resoleu-ho emprant la teoria de Von Mises.
- Arredonar els gruixos en mm a l'enter superior.

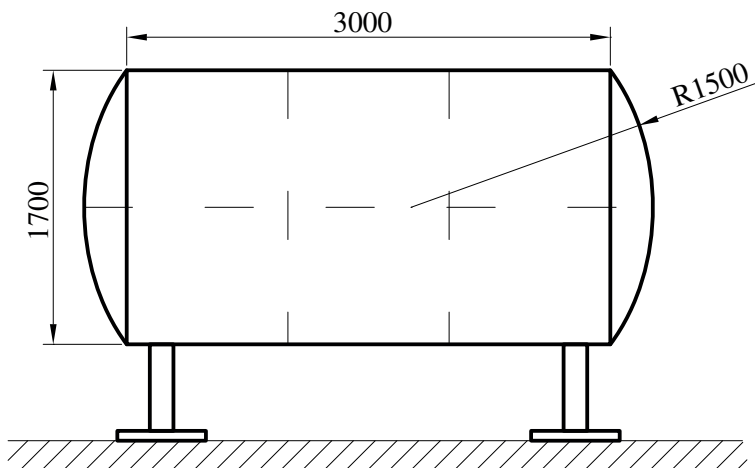


Figura 1.4: Depòsit de GLP

Resolució

1. Gruix necessari per a suportar 26 bars ($\approx 2,6$ MPa) amb $n_{ruptura} = 1,5$

(a) Tensió equivalent:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_{axial} = \frac{pR}{2e} \\ \sigma_2 &= \sigma_{tangencial} = \frac{pR}{e} \\ \sigma_{eq} &= \sqrt{\frac{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\left(\frac{pR}{2e} - \frac{pR}{e}\right)^2 + \left(\frac{pR}{2e} - 0\right)^2 + \left(\frac{pR}{e} - 0\right)^2}{2}} = \\ &= \sqrt{\frac{\left(-\frac{pR}{2e}\right)^2 + \left(\frac{pR}{2e}\right)^2 + 4\left(\frac{pR}{2e}\right)^2}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{e}\end{aligned}$$

(b) Comparació amb la tensió de ruptura:

$$\begin{aligned}n &\leq \frac{S_{ut}}{\sigma_{eq}} = \frac{S_{ut}}{\frac{\sqrt{3}}{2} \frac{pR}{e}} \\ e &\geq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{npR}{S_{ut}}\end{aligned}$$

Substituint numèricament, tenim el següent:

$$e \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{1,5 \cdot 2,6 \cdot 850}{450} = 6,38 \text{ mm} \approx 7 \text{ mm}$$

2. Gruix necessari per a detectar una clivella de 2 mm abans de la fallada catastròfica.

(a) clavilla axial

$$K_I = Y\sigma_{tangencial}\sqrt{\pi a} \leq K_{IC}$$

Substituint el valor de $\sigma_{tangencial}$ tenim el següent:

$$\begin{aligned}\frac{pR}{e} Y\sqrt{\pi a} &\leq K_{IC} \\ e &\geq Y\sqrt{\pi a} \frac{pR}{K_{IC}}\end{aligned}$$

Para seguir leyendo haga click aquí