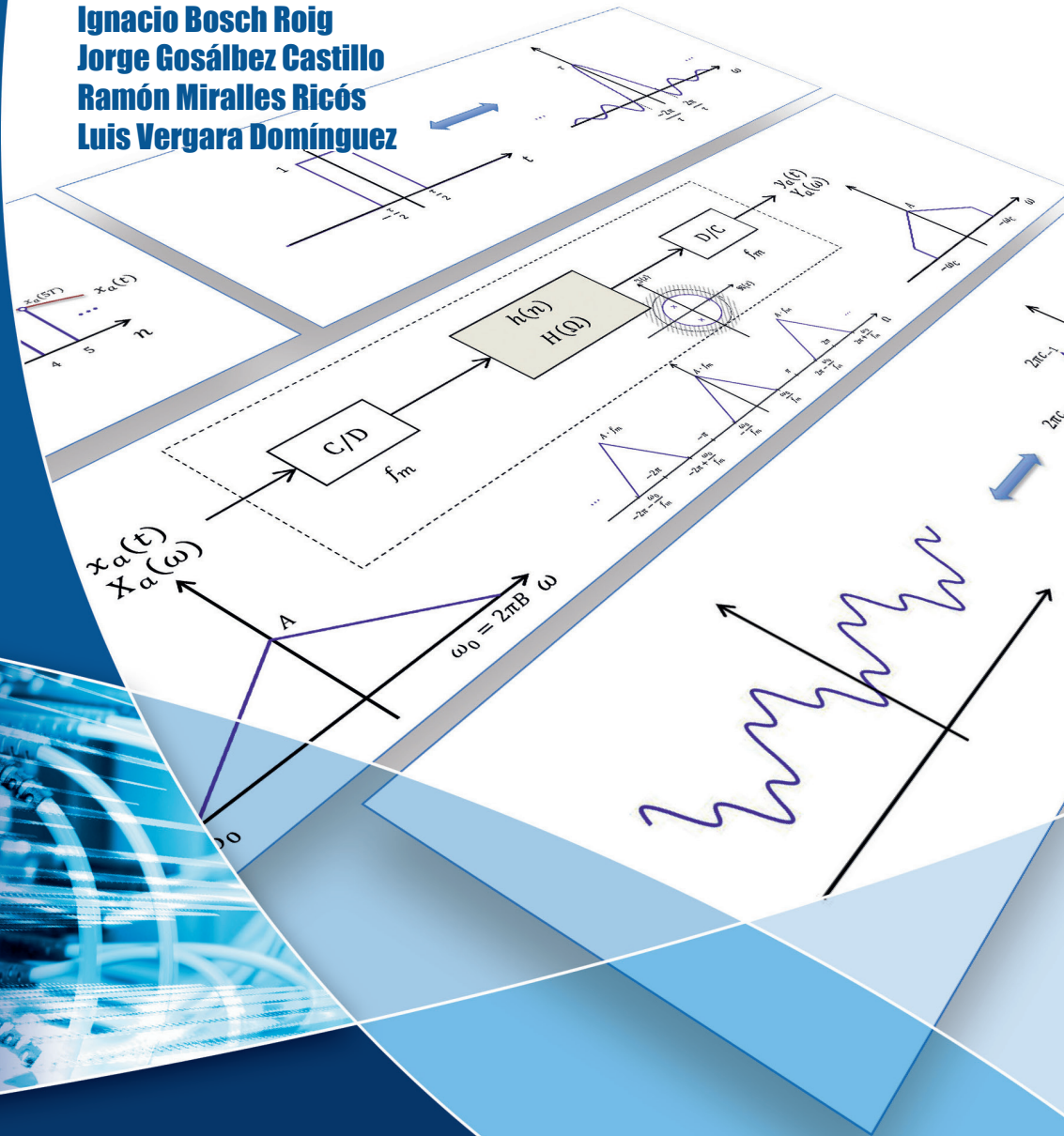


Señales y Sistemas

Teoría y problemas

Ignacio Bosch Roig
Jorge Gosálbez Castillo
Ramón Miralles Ricós
Luis Vergara Domínguez



Ignacio Bosch Roig
Jorge Gosálbez
Ramón Miralles
Luis Vergara Domínguez

Señales y Sistemas

Teoría y problemas



Editorial
Universitat Politècnica
de València

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Comunicaciones de la Universitat Politècnica de València

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: BOSCH ROIG [et al] (2015). *Señales y Sistemas: teoría y problemas*. Valencia: Universitat Politècnica de València

© Ignacio Bosch Roig
Jorge Gosálbez Castillo
Ramón Miralles Ricós
Luis Vergara Domínguez

© 2015, de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València
venta: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0377_04_01_18

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-410-4
Impreso bajo demanda

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo edicion@editorial.upv.es

Impreso en España

Resumen

El presente libro es una guía para el estudio y la autoevaluación de los conceptos más básicos relacionados con el tratamiento de señales y sistemas en el ámbito de las Telecomunicaciones. Su orientación es principalmente práctica y está dirigida a la resolución de problemas introduciendo previamente los conceptos teóricos necesarios. De esta forma y en líneas generales, el principal objetivo es dotar al lector de un material básico de consulta que le oriente por el mundo de las señales y los sistemas, tanto desde el punto de vista continuo como discreto, así como temporalmente y en los diferentes dominios transformados de Fourier, Laplace, o Z.

El libro presenta teoría, cuestiones y problemas, de forma ordenada por capítulos. En el primer capítulo, se desarrollan los conceptos básicos de señales y sistemas desde el punto de vista continuo, para justificar la existencia de señales básicas elementales y sistemas lineales e invariantes temporalmente, introduciendo el concepto de convolución continua. En el segundo capítulo, pasamos al análisis de Fourier de las señales continuas y la respuesta en frecuencia equivalente, para finalizar con algunos aspectos prácticos de la Transformada de Laplace. En el tercer capítulo, se recapitulan los conceptos ya estudiados de señales y sistemas pero desde el punto de vista discreto, para en el cuarto y último capítulo abarcar el análisis de Fourier de secuencias discretas, introduciendo el concepto de muestreo y transformada Z para el diseño de filtros digitales.

Los autores

Índice

Capítulo 1. Señales y Sistemas continuos	9
1.1 Concepto de señal	9
1.1.1 Tipos de señales	10
1.2 Señales elementales y periódicas	11
1.2.1 Señales elementales	12
1.2.2 Señales periódicas	13
1.3 Energía y potencia	15
1.4 Transformada de la variable independiente	16
1.5 Concepto de sistema	19
1.6 Clasificación de sistemas	20
1.7 Sistemas lineales e invariantes temporales	22
1.7.1 Interpretación gráfica de la convolución	23
1.7.2 Propiedades de los SLI	26
1.8 Sistemas descritos por ecuaciones diferenciales	27
1.9 Ejercicios	29
Capítulo 2. Transformada de Fourier	33
2.1 Definición	33
2.2 Ejemplos de transformadas	34
2.2.1 Tabla de pares transformados	39
2.3 Propiedades	39
2.4 Transformada de Fourier de señales periódicas	40
2.5 Respuesta en frecuencia	42
2.6 Sistemas racionales: Transformada de Laplace	45
2.7 Ejercicios	49
Capítulo 3. Señales y sistemas discretos	55
3.1 Concepto de señal discreta	55
3.2 Secuencias elementales	57
3.3 Sistemas discretos	59
3.4 Sistemas descritos por ecuaciones en diferencias	61

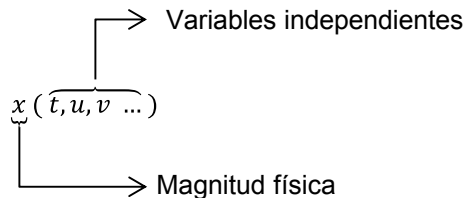
3.5 Ejercicios	63
Capítulo 4. Transformada de Fourier de secuencias	67
4.1 Definición	67
4.2 Transformadas de secuencias básicas	68
4.3 Propiedades de la Transformada de Fourier Discreta (TFN)	71
4.4 Transformada de Fourier de secuencias periódicas	72
4.5 Muestreo de señales continuas	74
4.6 Sistemas discretos racionales: Transformada z	79
4.7 Ejercicios	82
Capítulo 5. Problemas resueltos por capítulos	89
Problemas resueltos del capítulo 1	89
Problemas resueltos del capítulo 2	130
Problemas resueltos del capítulo 3	172
Problemas resueltos del capítulo 4	194
Anexo A. Operaciones con números complejos	231
Definición y representación de un número complejo	231
Otras relaciones interesantes:	232
Operaciones con complejos	232
Anexo B. Ejemplo de convolución de dos señales triangulares	235
Bibliografía	245

Capítulo 1. Señales y Sistemas continuos

En este primer capítulo se presentan los conceptos fundamentales en el ámbito de señales y sistemas. Se verá que es una señal así como su representación matemática, aspecto básico para seguir el resto del libro. Se tratarán los diferentes conceptos de las señales, como es periodicidad, energía, potencia y transformación de la variable independiente. También se explicará el concepto de sistema, el cual ofrece una respuesta o señal de salida ante una excitación o señal de entrada. Se expondrán los parámetros que los caracterizan, haciendo especial hincapié en los sistemas lineales e invariantes ya que este tipo de sistemas modelan muchos de los fenómenos de la naturaleza y gracias a la operación matemática de convolución, es posible obtener su respuesta ante cualquier señal de entrada. Por último, veremos la relación entre los sistemas lineales e invariantes y los sistemas descritos por ecuaciones diferenciales.

1.1 Concepto de señal

Las señales son magnitudes físicas (voltaje, corriente eléctrica, presión sonora, intensidad lumínica, temperatura, cotización en bolsa, índice bursátil DOW Jones,...) que dependen de una o más variables independientes (tiempo, espacio,...).



La utilidad de las señales en el ámbito de las Telecomunicaciones, es que pueden transmitir información. Algunos ejemplos de señales pueden ser:

- Presión sonora en función del tiempo
- Presión sonora en función del tiempo y el espacio: mapas de ruido
- Voltaje en un punto de un circuito
- Evolución de la temperatura con el tiempo
- Fotografía (variación de la luminosidad en función de la posición)
- Vídeo (variación de la luminosidad en función de posición y tiempo)
- Señal electromagnética radiada por una antena
- Señales biomédicas (ECG, EEG...)

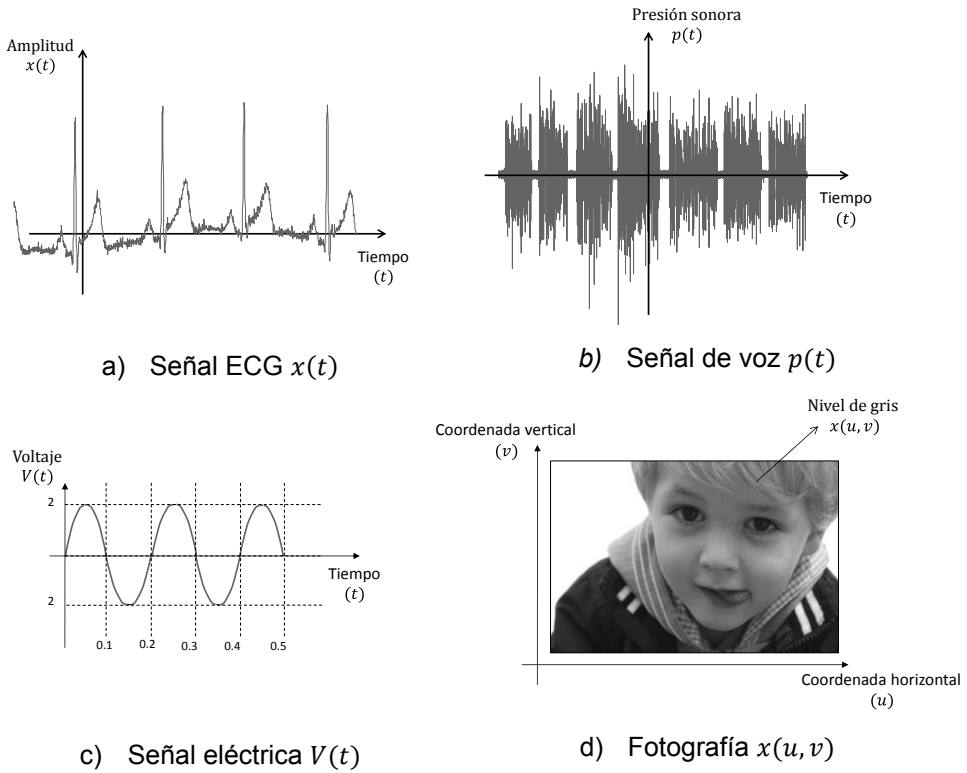


Figura 1. Ejemplos de señales

1.1.1 Tipos de señales

Existen multitud de posibilidades a la hora de clasificar las señales, pero atendiendo a la variable independiente podemos clasificar las señales como señales unidimensionales o multidimensionales y señales continuas o discretas.

Las señales unidimensionales son aquellas cuyo valor, x , depende únicamente de una sola variable independiente, normalmente tiempo, t (Figura 1. a, b, c). Mientras que las señales multidimensionales dependen de dos o más variables independientes (Figura 1.d).

Las señales continuas son aquellas cuya variable o variables independientes son continuas y pueden tomar cualquier valor real y por tanto la señal está definida para sucesiones continuas de la variable independiente. Por otro lado, las

señales discretas son aquellas cuya variable o variables independientes sólo pueden tomar un conjunto de valores finito y por lo tanto el valor de la señal sólo está definido para ese conjunto de valores. Normalmente, para la variable independiente de las señales discretas se emplea la letra n , y coge valores enteros.

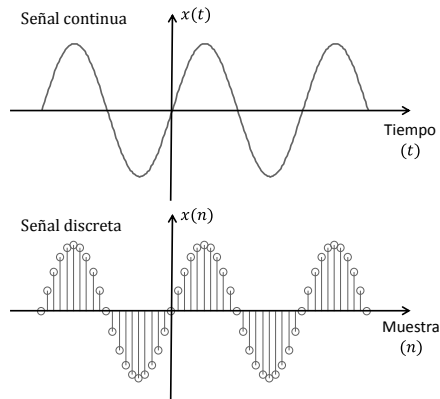


Figura 2. Señal continua y señal discreta

En el resto del texto, asumiremos señales unidimensionales. Para el caso continuo la variable independiente estará asociada a tiempo t , mientras que para el caso discreto se empleará n .

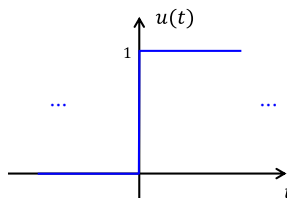
1.2 Señales elementales y periódicas

En este apartado se definirá un conjunto de señales elementales que servirán como base para señales más complejas y así modelar fenómenos físicos y de comunicaciones. Así mismo, también se hará el modelo matemático de las señales periódicas, definiendo sus principales propiedades.

1.2.1 Señales elementales

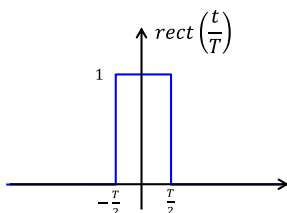
Escalón unidad

$$u(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t > 0 \\ 0 & , \quad t < 0 \end{cases}$$



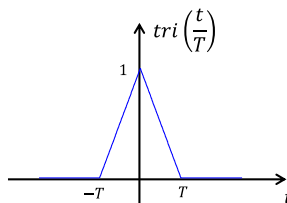
Pulso rectangular

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \Pi\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1 & , \quad |t| < \frac{T}{2} \\ 0 & , \quad |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$



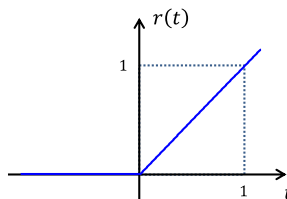
Pulso triangular

$$\text{tri}\left(\frac{t}{T}\right) = \Lambda\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} \frac{t}{T} + 1 & , \quad -T \leq t \leq 0 \\ -\frac{t}{T} + 1 & , \quad 0 \leq t \leq T \end{cases}$$



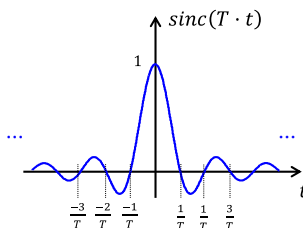
Función rampa

$$r(t) = t \cdot u(t)$$



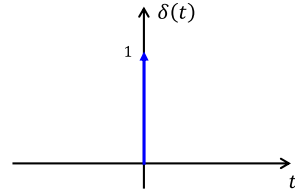
Función sinc

$$\text{sinc}(Tt) = \frac{\sin(Tt\pi)}{Tt\pi}$$



Función delta de Dirac o impulso unidad

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \text{rect}\left(\frac{t}{\epsilon}\right)$$



- $\delta(0) = \infty, \delta(t) = 0 \forall t \neq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
- $x(t) \cdot \delta(t - t_0) = x(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$
- $\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t)$ por lo que $\frac{du(t)}{dt} = \delta(t)$
- $\int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \cdot \int_{t_1}^{t_2} \delta(t - t_0) dt = \begin{matrix} x(t_0), & \text{si } t_1 < t_0 < t_2 \\ 0, & \text{resto} \end{matrix}$

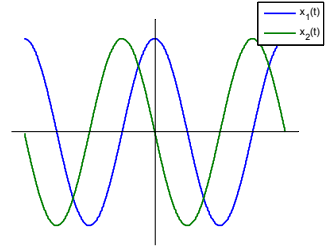
Sinusoidal compleja: $x(t) = Ae^{j(\omega_0 t + \phi)}$

Parte real

$$x_1(t) = \Re\{x(t)\} = A \cos(\omega_0 t + \phi)$$

Parte imaginaria

$$x_2(t) = \Im\{x(t)\} = A \sin(\omega_0 t + \phi)$$



1.2.2 Señales periódicas

Las señales periódicas son aquellas que se repiten cada T segundos. Matemáticamente una señal periódica es aquella que cumple:

$$x(t) = x(t + nT) \quad -\infty < t < \infty$$

Siendo n entero y T su periodo fundamental. Las señales periódicas suelen aparecer en la resolución de problemas físicos, aunque en la realidad no pueden existir por el intervalo en el que deben estar definidas ($-\infty < t < \infty$), a no ser que se acote el intervalo de observación.

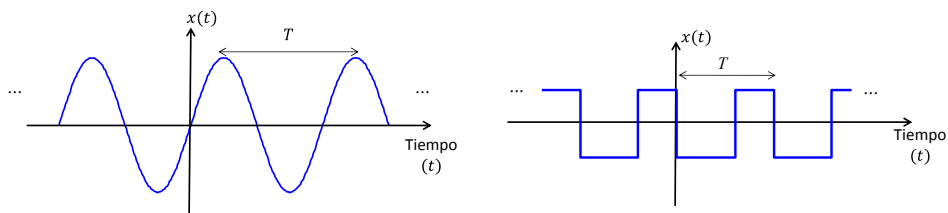


Figura 3. Ejemplos de señales periódicas

Las exponenciales complejas¹ y señales sinusoidales son por definición señales periódicas.

La combinación de dos señales continuas periódicas pueden ser o no periódicas. Para ello, se tiene que cumplir que el cociente de los periodos individuales se pueda escribir de manera racional:

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$$

Ejemplo

Sean $x_1(t)$ y $x_2(t)$ dos señales periódicas de periodo T_1 y T_2 respectivamente. ¿Será $y(t) = a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t)$ una señal periódica?

Para que $y(t)$ sea periódica se debe cumplir que

$$y(t) = y(t + T)$$

$$a \cdot x_1(t) + b \cdot x_2(t) = a \cdot x_1(t + T) + b \cdot x_2(t + T)$$

Como $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son periódicas:

$$x_1(t) = x_1(t + nT_1)$$

$$x_2(t) = x_2(t + mT_2)$$

Identificando términos vemos que:

$$\left. \begin{array}{l} nT_1 = T \\ mT_2 = T \end{array} \right\} nT_1 = mT_2 \rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$$

¹ En el Anexo A, se recuerdan los conceptos básicos de las operaciones con números complejos

1.3 Energía y potencia

A partir de una señal $x(t)$, se definen los siguientes conceptos:

Potencia instantánea $|x(t)|^2$

Energía $E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$

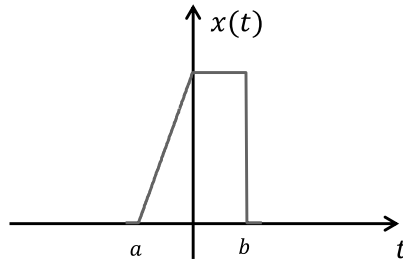
Potencia media $P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt$

Potencia media (particularizada para señales periódicas) $P = \frac{1}{T_0} \int_{\langle T_0 \rangle} |x(t)|^2 dt$

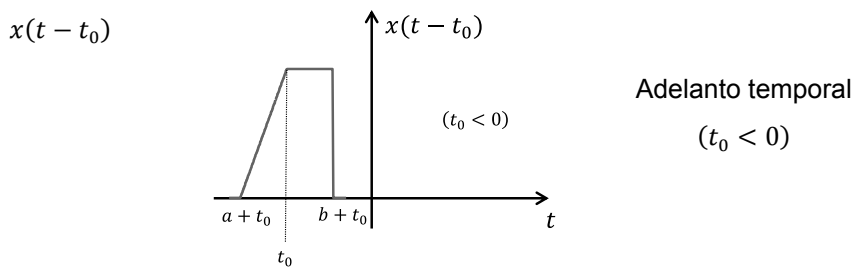
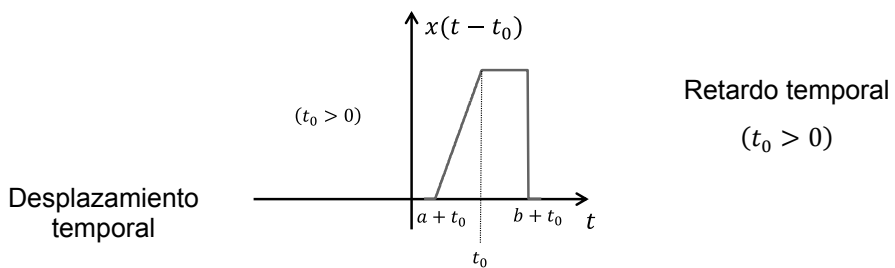
- Señal definida en energía o de energía finita ($0 < E < \infty$)
 - Las señales de duración finita son de energía finita (salvo la función impulso)
 - Las señales de duración infinita pueden presentar energía finita o infinita
 - Las señales periódicas siempre presentan energía infinita
- Señal definida en potencia ($0 < P < \infty$)
 - Ocurre cuando $E = \infty$
 - Señales periódicas siempre están definidas en potencia

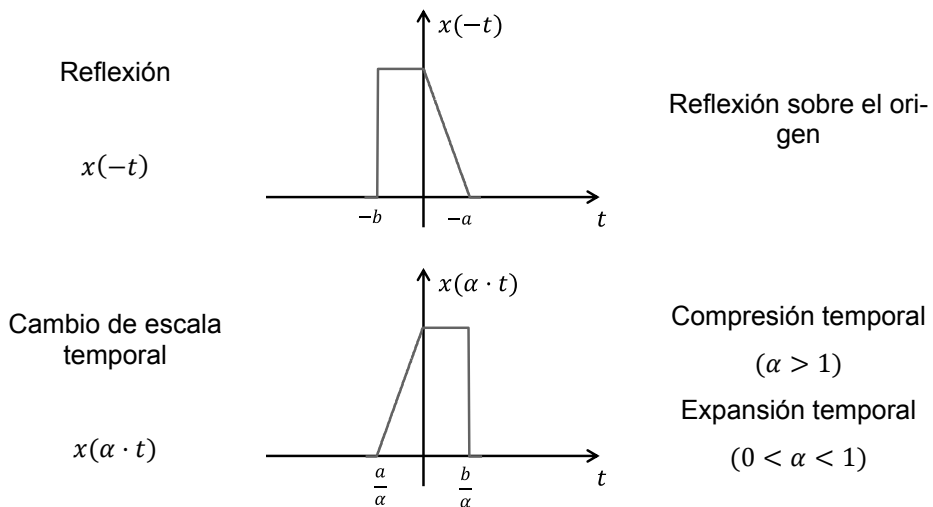
1.4 Transformada de la variable independiente

La transformación de la variable independiente t de una señal nos permiten modelar muchos de los fenómenos físicos que sufre una señal en la naturaleza. Sea la señal $x(t)$ representada en la siguiente figura:

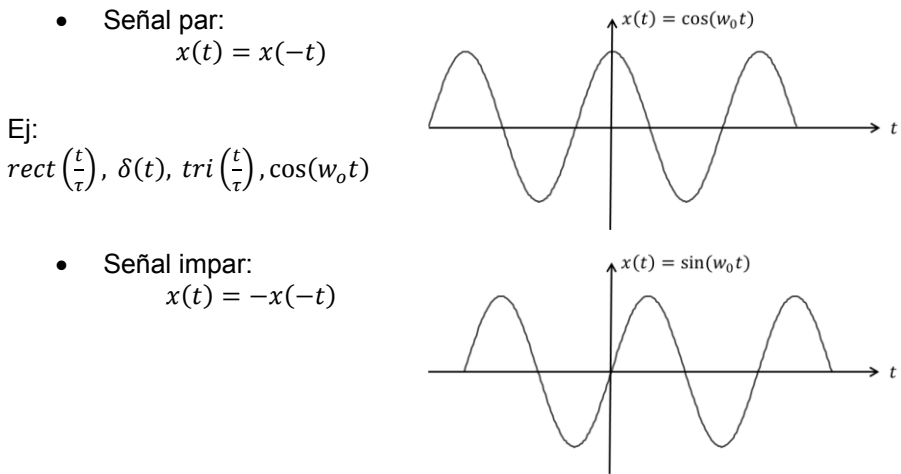


Se definen las siguientes transformaciones:





A partir de la propiedad de reflexión se puede definir el concepto de señal par o impar:



- Cualquier señal, se puede escribir como combinación lineal de una señal par e impar

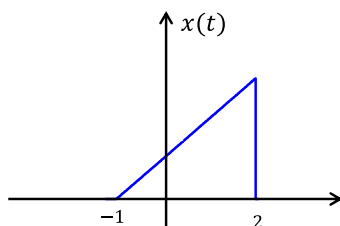
- $x(t) = x_{par}(t) + x_{impar}(t)$
 - $x_{par}(t) = \frac{x(t)+x(-t)}{2}$
 - $x_{impar}(t) = \frac{x(t)-x(-t)}{2}$

Combinación de las tres transformaciones. A partir de una señal $x(\alpha \cdot t - \beta)$, debemos aplicar las tres transformaciones en el siguiente orden:

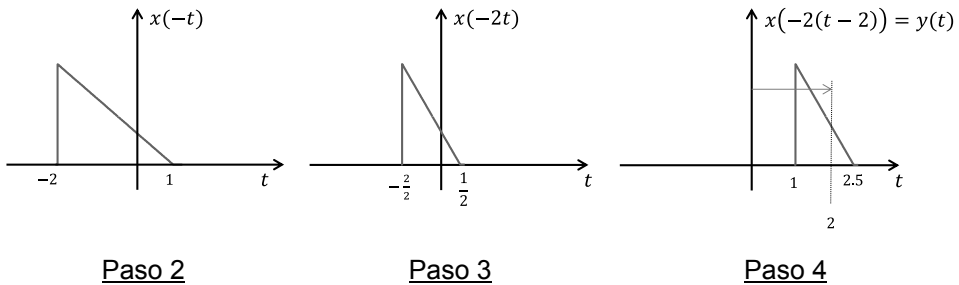
- **Paso 1.** Rescribir la transformación $x(\alpha \cdot t - \beta)$ como $x\left(\alpha\left(t - \frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$
- **Paso 2. Reflexión de la señal original.** Se analiza el signo de α .
 - Si $\text{sign}(\alpha) = 1$ la señal no sufre reflexión
 - Si $\text{sign}(\alpha) = -1$ la señal sufre reflexión
- **Paso 3. Compresión de la señal obtenida en Paso 2,** para lo cual se analiza el módulo de α
 - Si $|\alpha| > 1$, comprimimos la señal por el factor $|\alpha|$
 - Si $|\alpha| < 1$, expandimos la señal por el factor $\frac{1}{|\alpha|}$
- **Paso 4. Desplazamiento de la señal obtenida en Paso 3,** para lo cual se analiza $\frac{\beta}{\alpha}$
 - Si $\frac{\beta}{\alpha} > 0$, retardo temporal, (desplazamiento a la derecha)
 - Si $\frac{\beta}{\alpha} < 0$, adelanto temporal, (desplazamiento a la izquierda)

Ejemplo

Dibujar la señal $y(t)$ la cual se obtiene como $x(-2 \cdot t + 4)$ siendo $x(t)$ la representada en la siguiente figura:

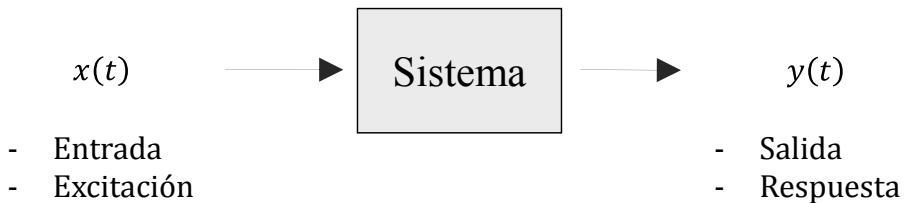


- **Paso 1.** Reescribimos $x(t)$ como $x(-2(t - 2))$ e identificamos:
 - $\alpha = -2$ y $\frac{\beta}{\alpha} = 2$
- **Paso 2.** Reflexión de la señal original:
 - Como $\text{sign}(\alpha) = \text{sign}(-2) = -1$, la señal sufre reflexión
- **Paso 3.** Compresión de la señal obtenida en el Paso 2
 - Como $|\alpha| = 2 > 1$, comprimimos la señal por el factor $|\alpha|$
- **Paso 4.** Desplazamiento de la señal obtenida en el Paso 3
 - Como $\frac{\beta}{\alpha} = 2 > 0$, retardo temporal de 2 segundos, (desplazamiento a la derecha)

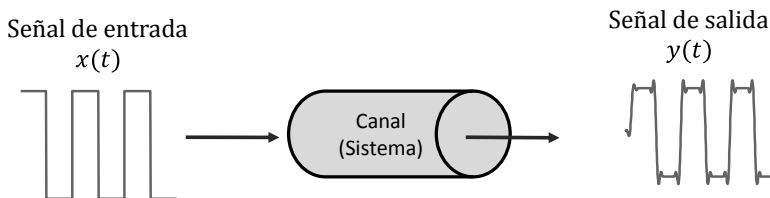


1.5 Concepto de sistema

La mayoría de los fenómenos físicos se pueden modelar como la respuesta ante una excitación. Bajo este planteamiento, la excitación corresponde a una señal, $x(t)$, la cual es la señal de entrada a un “sistema”. Este sistema dará una señal de salida, $y(t)$, que será su respuesta ante la señal de entrada o excitación. Esto está representado en el siguiente esquema:



Algunos ejemplos típicos los podemos encontrar en un canal de comunicaciones, donde podemos interpretar la señal de entrada, $x(t)$, como la señal que se desea transmitir. El sistema será el canal de comunicaciones y su respuesta ante la señal de entrada, $x(t)$, será la señal de salida $y(t)$. Dicha señal de salida vendrá condicionada por la señal de entrada y por la naturaleza del propio canal de comunicaciones.



1.6 Clasificación de sistemas

Podemos relacionar la señal de entrada y salida a través de una función matemática de la forma:

$$y(t) = f\{x(t)\}$$

Donde $f\{\cdot\}$ corresponderá a la transformación matemática. De esta forma, podemos definir las siguientes características de los sistemas:

- Sistema lineal. Cumple el principio de superposición

Si a la entrada tenemos $x_1(t)$, a la salida tendremos: $y_1(t) = f\{x_1(t)\}$

Si a la entrada tenemos $x_2(t)$, a la salida tendremos: $y_2(t) = f\{x_2(t)\}$

Si ahora a la entrada tenemos una combinación lineal de $x_1(t)$ y $x_2(t)$

$$x(t) = \alpha \cdot x_1(t) + \beta \cdot x_2(t)$$

Si el sistema es lineal a la salida tendremos la misma combinación lineal:

$$y(t) = a \cdot f\{x_1(t)\} + b \cdot f\{x_2(t)\} = a \cdot y_1(t) + b \cdot y_2(t)$$

- Sistema invariante temporal. Un desplazamiento temporal de la entrada implica el mismo desplazamiento temporal de la señal salida

Si a la entrada tenemos $x_1(t)$, a la salida tendremos: $y_1(t) = f\{x_1(t)\}$

Si ahora a la entrada tenemos $x_2(t) = x_1(t \pm t_0)$, a la salida deberemos tener $y_2(t) = f\{x_2(t)\} = y_1(t \pm t_0)$

- Sistema con memoria. Es aquel cuya salida para un instante de tiempo dado depende de valores de la señal de entrada de otros instantes de tiempo

$$y(t_0) = f\{x(t)\}, \forall t$$

Es decir que será sin memoria si $y(t_0) = f\{x(t)\}$, sólo para $t = t_0$.

- Sistema causal / no causal

- Causal o no anticipativo. Sistema cuya salida $y(t)$ para un instante de tiempo t_0 , sólo depende de la entrada para ese instante de tiempo o pasado, no futura.

- $y(t_0)$ sólo depende de $x(t)$ para $t \leq t_0$

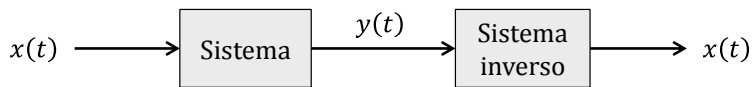
- Sistema anticausal (o anticipativo). Sistema cuya salida $y(t)$ para un instante de tiempo t_0 , sólo depende de la entrada para instantes de tiempos futuros

- $y(t_0)$ sólo depende de $x(t)$ para $t > t_0$

- Sistema no causal. Sistema que su salida depende de la entrada futura y/o entrada pasada. Todos los sistemas anticausales son no causales, pero no al revés.
- Sistema invertible. Sistema que a partir de la señal de salida se puede recuperar la señal de entrada. No todos los sistemas son invertibles.

$$y(t) = f\{x(t)\}$$

$$x(t) = f^{-1}\{y(t)\}$$



- Sistema estable. Es aquel que ante una entrada acotada, su salida también lo es

$$|x(t)| < B_1 < \infty \rightarrow |y(t)| < B_2 < \infty$$

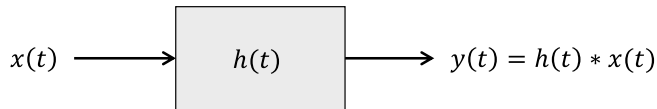
1.7 Sistemas lineales e invariantes temporales

Entre todos los tipos de sistemas, los sistemas lineales e invariantes (SLI) son muy usados dentro del ámbito de la ingeniería ya que modelan multitud de fenómenos físicos (propagación, reverberación, filtros...) y vienen perfectamente caracterizados por su respuesta al impulso $h(t)$.

La respuesta al impulso es la señal de salida de un SLI cuando tiene como señal de entrada la función $\delta(t)$.



A partir de la respuesta al impulso, $h(t)$, y la operación matemática de convolución (*), podemos calcular la señal salida de un SLI ante cualquier entrada tal y como se muestra en la siguiente figura.



Es importante fijarse en el símbolo "*", ya que en este caso no representa una multiplicación, sino la operación de convolución, la cual se define como:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

La convolución presenta las siguientes propiedades:

Definición $x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t - \tau)d\tau$

Conmutativa $x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t)$

Asociativa $x_1(t) * x_2(t) * x_3(t) = (x_1(t) * x_2(t)) * x_3(t) = x_1(t) * (x_2(t) * x_3(t))$

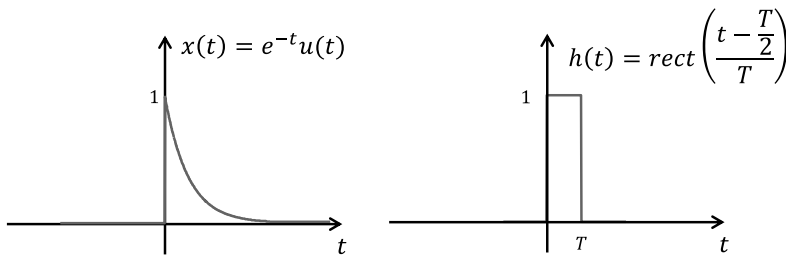
Distributiva $x_1(t) * (x_2(t) + x_3(t)) = x_1(t) * x_2(t) + x_1(t) * x_3(t)$

Convolución con delta $x_1(t) * \delta(t - t_0) = x_1(t - t_0)$

1.7.1 Interpretación gráfica de la convolución

A partir de la expresión de la convolución, se puede definir un método gráfico para realizar la convolución entre dos señales, el cual no es más que seguir la expresión analítica de la convolución².

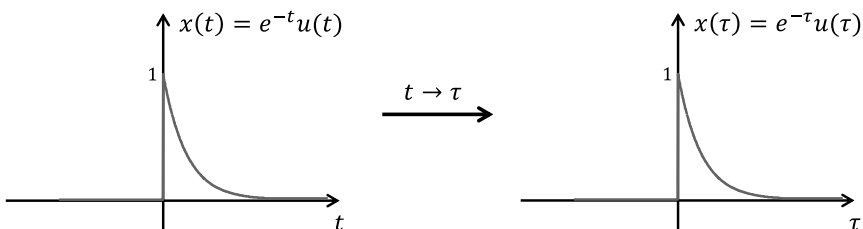
Partiendo de las siguientes señales, $x(t) = e^{-t}u(t)$ y $h(t) = \text{rect}\left(\frac{t-T}{T}\right)$ vamos a describir el proceso de convolución. En primer lugar representamos gráficamente las dos señales a convolucionar y después seguir los pasos descritos:



- **Paso 1.** Cambio de la variable ($t \rightarrow \tau$) de una de las dos señales. Gráficamente, la señal seleccionada no cambia.

$$x(t) \rightarrow x(\tau)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{Paso 1}} h(t - \tau) d\tau$$



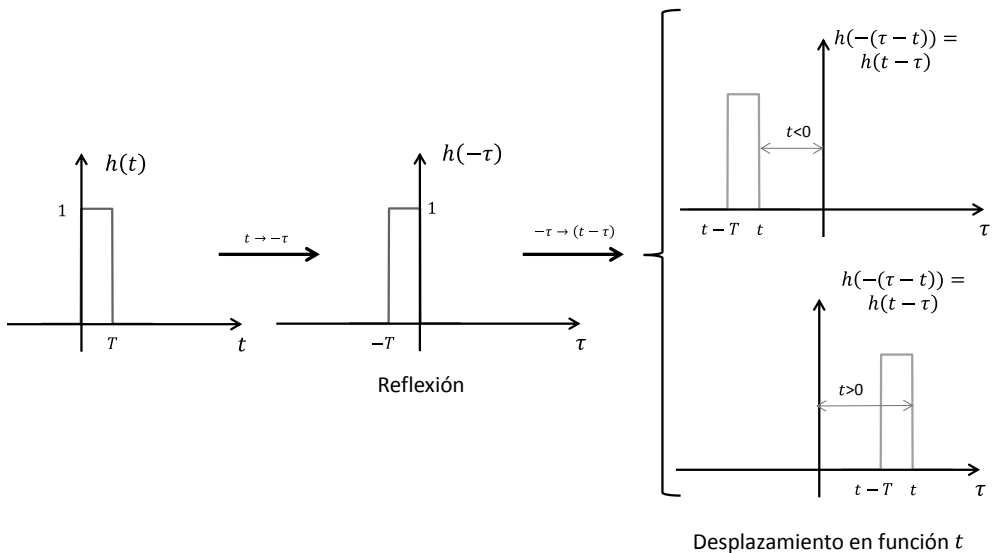
² En el Anexo B se ilustra un ejemplo del cálculo de la convolución de dos pulsos triangulares paso a paso

- **Paso 2.** Cambio de la variable independiente de la otra señal ($t \rightarrow (t - \tau)$):

$$h(t) \rightarrow h(t - \tau) = h(-(\tau - t)) = h \left(\underbrace{-}_{\text{Reflexión}} \left(\underbrace{\tau}_{\text{Variable independiente}} - \underbrace{t}_{\text{Desplazamiento}} \right) \right)$$

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{x(\tau)}_{\text{Paso 1}} \underbrace{h(t - \tau)}_{\text{Paso 2}} d\tau$$

En este caso, se producen dos efectos: reflexión y desplazamiento. Hay que ser conscientes que ahora la variable independiente es τ , mientras que la variable t se comporta como una “constante” que actúa como desplazamiento. Siguiendo los pasos descritos anteriormente, $h(t)$ quedaría gráficamente:



Para seguir leyendo haga click aquí