



# Lecciones breves de Mecánica orbital

José A. Morano



edUPV

Universitat Politècnica de València

---

# Lecciones breves sobre Mecánica orbital

---

José Antonio Morano Fernández

Colección *Académica* [http://tiny.cc/edUPV\\_aca](http://tiny.cc/edUPV_aca)

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:

Moraño Fernández, José Antonio (2023). *Lecciones breves sobre Mecánica orbital*.

Valencia: edUPV

© José Antonio Moraño Fernández

© 2023, edUPV

Venta: [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 6515\_01\_01\_01

ISBN: 978-84-1396-120-0 (versión impresa)

ISBN: 978-84-1396-121-7 (versión electrónica)

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

edUPV se compromete con la ecoimpresión y utiliza papeles de proveedores que cumplen con los estándares de sostenibilidad medioambiental  
<https://editorialupv.webs.upv.es/compromiso-medioambiental/>

La Editorial UPV autoriza la reproducción, traducción y difusión parcial de la presente publicación con fines científicos, educativos y de investigación que no sean comerciales ni de lucro, siempre que se identifique y se reconozca debidamente a la Editorial UPV, la publicación y los autores. La autorización para reproducir, difundir o traducir el presente estudio, o compilar o crear obras derivadas del mismo en cualquier forma, con fines comerciales/lucrativos o sin ánimo de lucro, deberá solicitarse por escrito al correo [edicion@editorial.upv.es](mailto:edicion@editorial.upv.es)

# Autor

**JOSÉ ANTONIO MORANO FERNÁNDEZ**

Profesor del Departamento de Matemática Aplicada en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño (ETSID) en la UPV desde 1998. Desde entonces ha impartido docencia en prácticamente la totalidad de las titulaciones de la ETSID. Actualmente imparte docencia en asignaturas relacionadas con el estudio de órbitas y la mecánica orbital para el grado de ingeniería aeroespacial y el más-ter de ingeniería aeronáutica. Ha publicado numerosos trabajos en revistas y congresos y varios textos en esta editorial. En 2011 le fue concedido el Premio a la Excelencia Docente por el Consejo Social y la Generalitat Valenciana.

# Resumen

El texto consta de 25 capítulos o sesiones dedicados al estudio del movimiento orbital de naves y satélites. Los dos primeros temas presentan los puntos y elementos más importantes de la esfera celeste y los sistemas de coordenadas y tiempos más utilizados. Un segundo bloque de doce temas se dedica a la obtención y resolución de las ecuaciones del movimiento orbital, mostrando los tipos de órbitas y sus características, así como la relación entre el tiempo y la posición orbital. Los últimos once capítulos describen como realizar maniobras y transferencias entre órbitas incluyendo un estudio aproximado del lanzamiento. Cada tema está orientado a explicar un objetivo específico de la dinámica orbital incluyendo ejemplos que ayudan a su comprensión y que facilitan la elección de los procesos de cálculo.

# Prólogo

La Mecánica orbital es la disciplina centrada en comprender y analizar las trayectorias espaciales de satélites, naves y cuerpos celestes. También incluye el estudio de maniobras y transferencias orbitales considerando que son la aplicación de uno o más impulsos para modificar la órbita inicial.

En este texto se presentan las nociones más básicas de la Mecánica orbital junto con ciertos procedimientos de cálculo de parámetros y ecuaciones que permiten identificar los diferentes tipos de órbitas, estudiar sus características y/o realizar modificaciones en ellas.

Cada capítulo puede considerarse una sesión de aprendizaje (clase) para entender y conocer un tema específico de la Dinámica orbital. El enfoque es muy práctico, apoyando las exposiciones con numerosos ejemplos donde las expresiones utilizadas están referenciadas y donde se destacan con un recuadro aquellas que son de uso frecuente en Astrodinámica.

En cada tema se presentan explicaciones que proporcionan una primera aproximación al objetivo específico de ese capítulo, dejando al lector la posibilidad de profundizar en aquellos que le lleguen a interesar de manera especial.

El autor



# Índice general

<b>Prólogo</b>	<b>i</b>
<b>1 La esfera celeste y sistemas de coordenadas</b>	<b>1</b>
1.1 Introducción y objetivos . . . . .	1
1.2 Elementos destacados en la esfera celeste . . . . .	2
1.3 Sistema de referencia Heliocéntrico-Eclíptico, $(\lambda, \beta)$ . . . . .	4
1.4 Sistema de referencia Geocéntrico-Ecuatorial, $(\alpha, \delta)$ . . . . .	5
1.5 Sistema de referencia Topocéntrico-Horizontal, $(El, Az)$ . . . . .	7
1.6 Otros sistemas de referencia . . . . .	10
1.7 Cierre . . . . .	10
<b>2 Tiempos y cambios de coordenadas</b>	<b>11</b>
2.1 Introducción y objetivos . . . . .	11
2.2 Tiempo Universal (UT), Día juliano (JD) y Tiempo Sidéreo Local ( $\Theta_L$ o $TSL$ ). . . . .	12
2.3 Paso de Geocéntrico-Ecuatoriales a Heliocéntrico-Eclípticas y viceversa. . . . .	17
2.4 Paso de Geocéntrico-Ecuatorial a Topocéntrico-Horizontal y viceversa. . . . .	19
2.5 Cierre . . . . .	22
<b>3 Ecuaciones del movimiento</b>	<b>23</b>
3.1 Introducción y objetivos . . . . .	23
3.2 Ecuaciones del movimiento de dos cuerpos . . . . .	24

3.3	Ecuación del movimiento relativo . . . . .	28
3.4	Cierre . . . . .	30
<b>4</b>	<b>Parámetros constantes de una órbita kepleriana</b>	<b>31</b>
4.1	Introducción y objetivos . . . . .	31
4.2	Conservación del momento angular de una órbita, $\vec{h}$ . . . . .	32
4.3	Conservación de la velocidad areolar o Ley de las Áreas . . . . .	36
4.4	Conservación de la Energía de una órbita, $\xi$ . . . . .	37
4.5	Constancia del vector de Laplace y de excentricidad, $\vec{e}$ . . . . .	38
4.6	Cierre . . . . .	40
<b>5</b>	<b>La ecuación orbital en polares</b>	<b>41</b>
5.1	Introducción y objetivos . . . . .	41
5.2	La ecuación del movimiento en coordenadas polares . . . . .	42
5.3	Consecuencia 1: Geometría de las órbitas resultantes . . . . .	43
5.4	Consecuencia 2: Expresión de las componentes de la velocidad en función de $\theta$ . . . . .	45
5.5	Consecuencia 3: El ángulo de vuelo en función de $\theta$ . . . . .	46
5.6	Consecuencia 4: La energía en función de otros parámetros. . . . .	46
5.7	Cierre . . . . .	48
<b>6</b>	<b>Análisis y ejemplos de órbitas circulares</b>	<b>49</b>
6.1	Introducción y objetivos . . . . .	49
6.2	Características de las órbitas circulares ( $e = 0$ ). . . . .	49
6.3	Ejemplos de órbitas que suelen ser circulares . . . . .	50
6.4	Cierre . . . . .	56
<b>7</b>	<b>Análisis y ejemplos de órbitas elípticas</b>	<b>57</b>
7.1	Introducción y objetivos . . . . .	57
7.2	Características de las órbitas elípticas ( $0 < e < 1$ ). . . . .	58
7.3	Ejemplos de uso de órbitas elípticas . . . . .	64
7.4	Cierre . . . . .	66
<b>8</b>	<b>Análisis y ejemplos de órbitas parabólicas</b>	<b>67</b>
8.1	Introducción y objetivos . . . . .	67
8.2	Características de las órbitas parabólicas ( $e = 1$ ). . . . .	67
8.3	Ejemplos de órbitas parabólicas . . . . .	69
8.4	Cierre . . . . .	70
<b>9</b>	<b>Análisis y ejemplos de órbitas hiperbólicas</b>	<b>71</b>
9.1	Introducción y objetivos . . . . .	71

9.2	Características de las órbitas hiperbólicas ( $e > 1$ ). . . . .	72
9.3	Ejemplos . . . . .	77
9.4	Cierre . . . . .	80
<b>10</b>	<b>El tiempo de vuelo en órbitas elípticas</b>	<b>81</b>
10.1	Introducción y objetivos . . . . .	81
10.2	Tiempo de paso por el periapsis, ( $t_p$ ). . . . .	82
10.3	Ecuación de tiempos para órbitas elípticas, ( $0 < e < 1$ ) . . . . .	83
10.4	Cierre . . . . .	90
<b>11</b>	<b>El tiempo de vuelo en órbitas parabólicas</b>	<b>91</b>
11.1	Introducción y objetivos . . . . .	91
11.2	Ecuación de tiempos para órbitas parabólicas, ( $e = 1$ ) . . . . .	92
11.3	Cierre . . . . .	96
<b>12</b>	<b>El tiempo de vuelo en órbitas hiperbólicas</b>	<b>97</b>
12.1	Introducción y objetivos . . . . .	97
12.2	Ecuación de tiempos para órbitas hiperbólicas, ( $e > 1$ ) . . . . .	98
12.3	Cierre . . . . .	106
<b>13</b>	<b>Órbitas en tres dimensiones: Elementos orbitales</b>	<b>107</b>
13.1	Introducción y objetivos . . . . .	107
13.2	Elementos orbitales clásicos (COEs) . . . . .	108
13.3	Obtención de los elementos a partir del vector estado . . . . .	109
13.4	Sistema de referencia Perifocal . . . . .	113
13.5	Conversión de elementos a coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales	115
13.6	Cierre . . . . .	116
<b>14</b>	<b>Efectos del achatamiento terrestre sobre las órbitas</b>	<b>117</b>
14.1	Introducción . . . . .	117
14.2	¿Qué es el achatamiento terrestre? . . . . .	118
14.3	Consecuencias del achatamiento terrestre . . . . .	120
14.4	Aplicación de la Precesión del nodo: Órbitas Heliosíncronas . . . . .	122
14.5	Aplicación del Avance del perigeo: Órbitas MOLNIYA . . . . .	123
14.6	Cierre . . . . .	126
<b>15</b>	<b>Maniobras orbitales impulsivas</b>	<b>127</b>
15.1	Introducción y objetivos . . . . .	127
15.2	Maniobras impulsivas . . . . .	128
15.3	Maniobras simples . . . . .	129
15.4	Cierre . . . . .	134

<b>16</b>	<b>Transferencia de Hohmann</b>	<b>135</b>
16.1	Introducción y objetivos . . . . .	135
16.2	Transferencia de Hohmann entre órbitas circulares . . . . .	136
16.3	Análisis de la transferencia de Hohmann . . . . .	139
16.4	Transferencia de Hohmann entre órbitas elípticas . . . . .	140
16.5	Cierre . . . . .	142
<b>17</b>	<b>Variaciones de la transferencia de Hohmann: Segmentada y Bielíptica</b>	<b>143</b>
17.1	Introducción y objetivos . . . . .	143
17.2	Transferencia de Hohmann Segmentada . . . . .	144
17.3	Transferencia Bielíptica entre órbitas circulares . . . . .	146
17.4	Cierre . . . . .	154
<b>18</b>	<b>Maniobra impulsiva general coplanaria (No-Hohmann)</b>	<b>155</b>
18.1	Introducción y objetivos . . . . .	155
18.2	Variación del vector velocidad en órbitas coplanarias . . . . .	156
18.3	Aplicación: Rotación de la línea de ápsides . . . . .	159
18.4	Cierre . . . . .	166
<b>19</b>	<b>Maniobras de cambio de plano</b>	<b>167</b>
19.1	Introducción . . . . .	167
19.2	Maniobras con cambio de plano . . . . .	168
19.3	Cambios de plano en órbitas circulares . . . . .	175
19.4	Cierre . . . . .	178
<b>20</b>	<b>Rendezvous con transferencias de Hohmann</b>	<b>179</b>
20.1	Introducción y objetivos . . . . .	179
20.2	Maniobras de fase . . . . .	180
20.3	Oportunidad de rendezvous con transferencias de Hohmann . . . . .	184
20.4	Cierre . . . . .	192
<b>21</b>	<b>El problema de Lambert en transferencias orbitales</b>	<b>193</b>
21.1	Introducción y objetivos . . . . .	193
21.2	El problema de Lambert . . . . .	195
21.3	Algoritmo del problema de Lambert . . . . .	198
21.4	Aplicación: Maniobra de aproximación . . . . .	201
21.5	Cierre . . . . .	204

<b>22</b>	<b>Tiempo y lugar para el lanzamiento de satélites</b>	<b>205</b>
22.1	Introducción y objetivos . . . . .	205
22.2	Inclinaciones accesibles desde una base . . . . .	206
22.3	Direcciones/azimuts de lanzamiento . . . . .	208
22.4	Hora del lanzamiento . . . . .	209
22.5	Cierre . . . . .	212
<b>23</b>	<b>Impulso requerido para una inserción en órbita</b>	<b>213</b>
23.1	Introducción y objetivos . . . . .	213
23.2	Velocidad subyacente de un lanzamiento . . . . .	214
23.3	Velocidad para compensar las pérdidas gravitatorias . . . . .	216
23.4	Velocidad de inserción en órbita . . . . .	217
23.5	Impulso requerido para el lanzamiento . . . . .	219
23.6	Cierre . . . . .	220
<b>24</b>	<b>Rendimiento del lanzamiento de un cohete: Etapas</b>	<b>221</b>
24.1	Introducción y objetivos . . . . .	221
24.2	Rendimiento de los cohetes de alto empuje . . . . .	222
24.3	Lanzamiento en una sola etapa . . . . .	223
24.4	Lanzamiento en dos etapas . . . . .	224
24.5	Lanzamiento en tres o más etapas . . . . .	232
24.6	Cierre . . . . .	232
<b>25</b>	<b>Maniobra orbital no impulsiva</b>	<b>233</b>
25.1	Introducción y objetivos . . . . .	233
25.2	Expresión vectorial del movimiento con empuje continuo . . . . .	234
25.3	Expresión escalar de $r$ con bajo empuje . . . . .	236
25.4	Aplicación: Transferencias con impulso prolongado . . . . .	239
25.5	Cierre . . . . .	244
<b>Bibliografía</b>		<b>245</b>



## Capítulo 1

# La esfera celeste y sistemas de coordenadas

### 1.1 Introducción y objetivos

Entre los sistemas de coordenadas utilizados en la mecánica orbital, se van a destacar los tres principales:

- Heliocéntrico/Baricéntrico/Geocéntrico - Eclíptico
- Geocéntrico - Ecuatorial
- Topocéntrico - Horizontal

Los sistemas son elegidos para que los diferentes tipos de movimiento sean fáciles de visualizar y calcular. La elección de un sistema de coordenadas adecuado puede simplificar mucho la resolución de un problema. Cada sistema queda definido por:

#### Un Origen, un Plano y una Dirección de referencia

Cualquier sistema de referencia ligado a las estrellas fijas se considera inercial.<sup>1</sup> Incluso se consideran inerciales los sistemas con Origen en la Tierra y ejes dirigidos a estrellas fijas, pues el error cometido es de una pequeña aceleración centrífuga<sup>2</sup> que no es considerada en las primeras aproximaciones de los cálculos.

---

<sup>1</sup>Realmente no es así porque el Sol se mueve alrededor del centro de la Galaxia.

<sup>2</sup>  $\|\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r})\| \approx \omega^2 r \approx \left(\frac{2\pi}{365.86164}\right)^2 \cdot 150 \cdot 10^9 \approx 0.006 \text{ m/s}^2 \ll 9.81 \text{ m/s}^2$

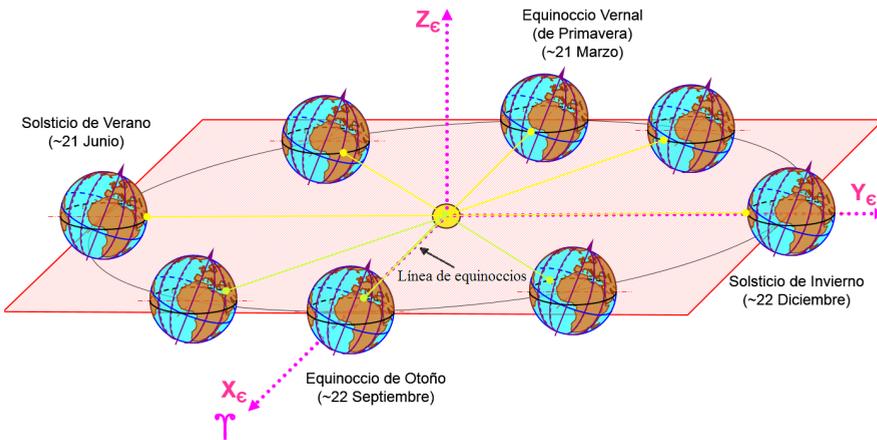
El **objetivo** de este capítulo es que, tras leerlo con atención, **seas capaz de**:

- Reconocer y ubicar correctamente los puntos y elementos más destacados de la Esfera Celeste.
- Distinguir y utilizar los sistemas de coordenadas más importantes empleados en Mecánica Orbital (Heliocéntrico, Geocéntrico y Topocéntrico) tanto sus expresiones cartesianas como las angulares.
- Convertir sin ambigüedades las coordenadas cartesianas en angulares y viceversa en cualquiera de los sistemas anteriores.
- Situar en el espacio tridimensional un objeto por sus coordenadas.

## 1.2 Elementos destacados en la esfera celeste

Antes de definir los sistemas de coordenadas utilizados para describir las órbitas de satélites debemos conocer algunos elementos necesarios para su definición.

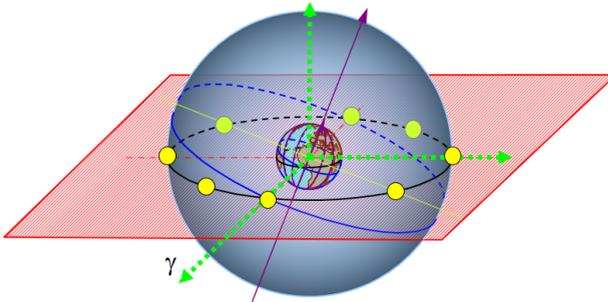
La  **eclíptica**  es el plano de la órbita que la Tierra describe en su movimiento alrededor del Sol (ver figura 1.1)



**Figura 1.1:** La eclíptica es el plano que contiene la órbita terrestre

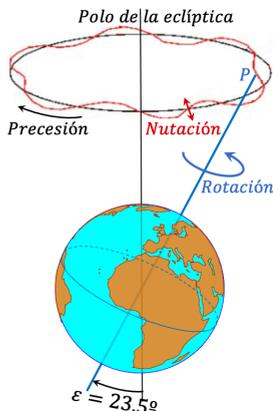
En la figura se puede observar que el eje de rotación de la Tierra no es perpendicular a la eclíptica y forma con ésta un ángulo que se conoce como **oblicuidad de la eclíptica** y cuyo valor es de  $\epsilon = 23.4^\circ$ . Por tanto, el plano ecuatorial y el de la eclíptica intersectan en una recta conocida como **línea de equinoccios**.

El equinoccio vernal se produce el primer día de primavera cuando visto desde la Tierra el Sol cruza el Ecuador de Sur a Norte en lo que se llama movimiento aparente del Sol (ver figura 1.2). La posición del Sol en ese instante define un punto en el cielo,  $\gamma$ , llamado **Punto Vernal** o **Punto Aries**<sup>3</sup> (ver figuras 1.1 y 1.2). En el equinoccio el día y la noche duran lo mismo y de ahí su nombre. Hay otro equinoccio cuando el Sol aparenta cruzar el Ecuador de Norte a Sur al que se le conoce como equinoccio de otoño o Punto Libra ( $\Omega$ ) el cual se produce medio año después del vernal.



**Figura 1.2:** El Sol en su movimiento aparente cruza el plano del ecuador dos veces al año.

En la mayoría de los casos se considera que el punto vernal está fijo en el espacio pero en realidad está girando lentamente. Este giro se debe a que la Tierra no es esférica y a la atracción de la Luna y el Sol. El eje de rotación de la Tierra gira hacia el oeste a razón de  $1.4^\circ$  por siglo alrededor del vector normal a la eclíptica, dando una vuelta completa cada 26000 años. Este efecto se conoce como **precesión de los equinoccios** y se puede ver en la figura 1.3.



**Figura 1.3:** El eje de rotación gira alrededor del eje eclíptico (precesión) y también sufre una especie de bamboleo (nutación).

<sup>3</sup> Hace unos 4000 años el punto vernal se encontraba en la constelación de Aries y de ahí su nombre pero, actualmente se encuentra entre Piscis y Acuario

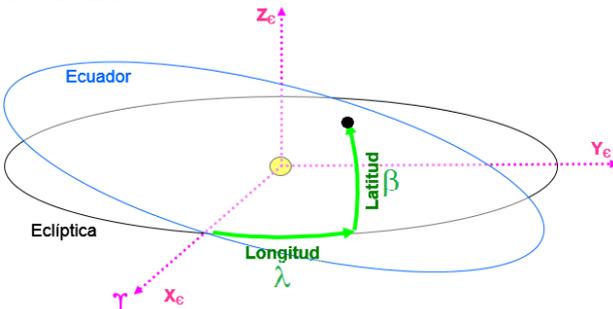
En esa misma figura se puede ver que la acción de la Luna añade un efecto sobre la precesión llamado **nutación**, que hace que la oblicuidad de la eclíptica sufra un pequeño bamboleo con una amplitud de  $0.0025^\circ$  cada 18.6 años.

### 1.3 Sistema de referencia Heliocéntrico-Eclíptico, $(\lambda, \beta)$

El sistema **Heliocéntrico-Eclíptico** es utilizado en misiones interplanetarias cuando las naves escapan de las esferas de influencia de los planetas. Este sistema queda definido por:

- Origen: El Sol.
- Plano de referencia: El plano de la eclíptica.
- Dirección fija: La dirección del punto vernal.

En este sistema, como se puede ver en la figura 1.4, el Ecuador queda inclinado respecto de la eclíptica. El eje  $X$  apunta al Punto Vernal, el eje  $Z$  es perpendicular al plano de la eclíptica y el eje  $Y$  se elige para formar el triedro a derecha.



**Figura 1.4:** El sistema Heliocéntrico-Eclíptico: Coordenadas cartesianas y angulares

Además de estas coordenadas rectangulares se pueden definir dos medidas angulares (figura 1.4): La **Longitud eclíptica** ( $\lambda$ ) es el ángulo medido sobre la Eclíptica desde el Punto Vernal hacia el Este y, la conocida como **Latitud eclíptica** ( $\beta$ ) que es el ángulo medido desde ésta y perpendicularmente a ella.

**Nota 1.3.1** Si consideramos este sistema de coordenadas eclíptico, manteniendo los mismos ejes, pero teniendo como Origen el Baricentro del Sistema Solar se le denomina **Baricéntrico-Eclíptico** y si el origen de las coordenadas es la Tierra, **Geocéntrico-Eclíptico**. Todos estos sistemas de referencia Eclípticos se consideran habitualmente inerciales porque se referencian respecto al Punto Vernal.

**EJEMPLO 1.3.1** Halla la expresión de las coordenadas rectangulares eclípticas  $(X_\varepsilon, Y_\varepsilon, Z_\varepsilon)$  en función de las angulares  $(r, \lambda, \beta)$ .

Utiliza esta expresión para hallar las coordenadas eclípticas rectangulares de la sonda Juno cuando sus coordenadas angulares eran:

$$r = 2.0383 \text{ U.A.}; \lambda = 26^\circ 54' 46'' \text{ y } \beta = -7^\circ 47' 31''$$

**Solución:** Observando la figura 1.4 se deduce que

$$\begin{cases} X_\varepsilon = r \cos \beta \cos \lambda \\ Y_\varepsilon = r \cos \beta \sen \lambda \\ Z_\varepsilon = r \sen \beta \end{cases} \quad (1.1)$$

Calculando  $r$  en  $km$ ,  $1 \text{ U.A.} = 149.6 \cdot 10^6 \text{ km}$ , y aplicando estas igualdades al caso de Juno se obtiene:

$$\begin{aligned} r &= 2.0383 * 149.6 \cdot 10^6 = 3.0493 \cdot 10^8 \text{ km} \\ X_\varepsilon &= r \cos \beta \cos \lambda = 3.0493 \cdot 10^8 \cos(26.9128^\circ) \cos(-7.79203^\circ) = 2.69391 \cdot 10^8 \\ Y_\varepsilon &= r \cos \beta \sen \lambda = 3.0493 \cdot 10^8 \cos(26.9128^\circ) \sen(-7.79203^\circ) = 1.36745 \cdot 10^8 \\ Z_\varepsilon &= r \sen \beta = 3.0493 \cdot 10^8 \cos(26.9128^\circ) = -4.13412 \cdot 10^7 \end{aligned}$$

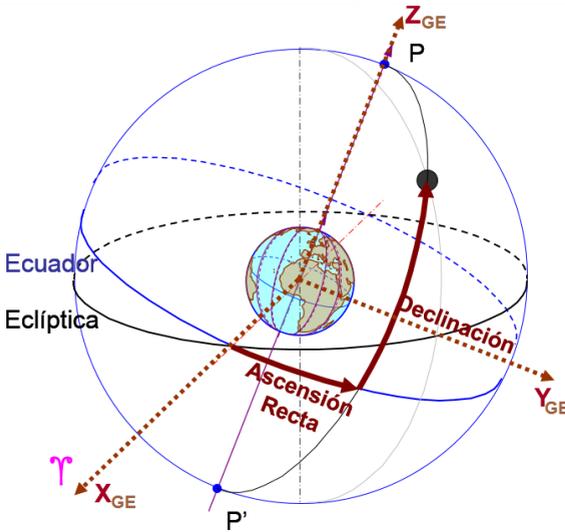
## 1.4 Sistema de referencia Geocéntrico-Ecuatorial, $(\alpha, \delta)$

El sistema de coordenadas más utilizado para satélites artificiales es el llamado **Geocéntrico-Ecuatorial** (figura 1.5) c aracterizado por:

- Origen: El centro de masas del cuerpo central<sup>4</sup>.
- Plano de referencia: El plano ecuatorial
- Dirección fija: La dirección del punto vernal.

A partir de ahí se considera como eje  $X$  también la dirección del punto vernal, pero como eje  $Z$  el eje de rotación de la Tierra (Norte como dirección positiva) y el eje  $Y$  de forma que se verifique el triedro a derecha  $(X_{GE}, Y_{GE}, Z_{GE}$  en figura 1.5). Estos ejes se consideran fijos respecto a las estrellas y por tanto inerciales.

<sup>4</sup>Normalmente, pero no siempre, la Tierra



**Figura 1.5:** El sistema de referencia Geocéntrico-Ecuatorial: Coordenadas cartesianas y angulares

En este caso también se pueden definir coordenadas angulares: El ángulo medido sobre el Ecuador desde la dirección del punto vernal hacia el este se conoce como **Ascensión Recta** (*RA* o  $\alpha$ ) que se indica en grados aunque los astrónomos suelen medirla en horas. El ángulo medido desde el Ecuador y de forma perpendicular a éste se conoce como **Declinación** ( $\delta$ ) que se considera positiva hacia el Norte y negativa hacia el Sur por lo que  $-90^\circ \leq \delta \leq 90^\circ$ . A estas coordenadas se les llama también **Coordenadas Absolutas**.

**EJEMPLO 1.4.1** La expresión del vector posición en el sistema geocéntrico-ecuatorial ( $X_{GE}, Y_{GE}, Z_{GE}$ ) en función de las angulares ( $r, \alpha, \delta$ ) se obtiene análogamente a como se hizo en el ejemplo 1.3.1

$$\begin{aligned} X_{GE} &= r \cos \delta \cos \alpha \\ Y_{GE} &= r \cos \delta \sen \alpha \\ Z_{GE} &= r \sin \delta \end{aligned} \tag{1.2}$$

Deduce las expresiones necesarias para obtener las coordenadas angulares en función de las rectangulares y utilízalas para hallar las coordenadas Geocéntricas Absolutas de la Estación Espacial Internacional (ISS) cuyo vector posición es  $\vec{r}_{GE} = (-5472, -1805, 3509) \text{ km}$ .

**Solución:** La distancia y la declinación se pueden calcular directamente

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \|\vec{r}\| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \\ \delta &= \arcsin\left(\frac{Z}{r}\right) \end{aligned}} \quad (1.3)$$

pero para la ascensión recta será necesario distinguir si es menor o mayor de  $180^\circ$  viendo el signo de  $Y$

$$\boxed{\alpha = \begin{cases} \arccos\left(\frac{X/r}{\cos \delta}\right) & (Y \geq 0) \\ 360^\circ - \arccos\left(\frac{X/r}{\cos \delta}\right) & (Y < 0) \end{cases}} \quad (1.4)$$

Sustituyendo los valores de la ISS en (1.3) resulta

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{5472^2 + 1805^2 + 3509^2} = 6746.4 \text{ km} \\ \delta &= \arcsin\left(\frac{3509}{6746.4}\right) = 31.34^\circ \end{aligned}$$

Para la ascensión recta se utiliza (1.4) que, considerando que  $Y = -1805 < 0$ :

$$\alpha = 360^\circ - \arccos\left(\frac{-5472/6746.4}{\cos 31.34^\circ}\right) = 198.26^\circ$$

Aunque  $\vec{r}$  permite calcular  $\alpha$  y  $\delta$ , el problema recíproco (obtener  $\vec{r}$  a partir de  $\alpha$  y  $\delta$ ) no se puede resolver sin conocer la distancia  $r$ .

## 1.5 Sistema de referencia Topocéntrico-Horizontal, (El, Az)

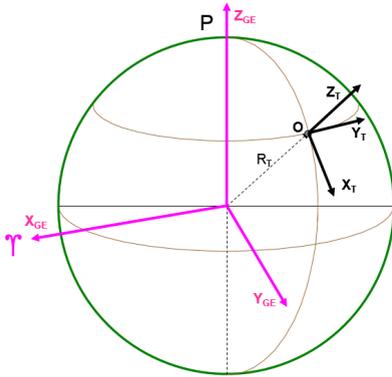
Es un sistema de coordenadas locales también llamado **Local-Horizontal** o **Altazimutal**. Se caracteriza por usar los siguientes elementos:

- Origen: El observador
- Plano de referencia: El plano del Horizonte celeste del observador
- Dirección fija: La dirección Sur-horizontal que es la del punto intersección entre el meridiano del lugar<sup>5</sup> y el Horizonte.

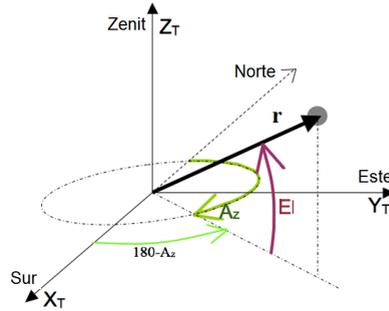
---

<sup>5</sup>También conocido como meridiano del observador que se define como el círculo máximo que pasa por los polos y por el zenit del observador

Centrado en el observador se considera como eje  $X$  la dirección Sur sobre el horizonte, el eje  $Z$  la dirección del Zenit y, en consecuencia, el eje  $Y$  apunta al Este ( $X_T, Y_T, Z_T$  en figura 1.6). Estos ejes NO se consideran fijos respecto a las estrellas (giran con la rotación terrestre) y por tanto este sistema no es inercial.



**Figura 1.6:** Sistema de referencia Topocéntrico (triángulo negro)



**Figura 1.7:** Coordenadas Altazimutales (Topocéntricas angulares)

En el sistema topocéntrico también se definen dos coordenadas angulares (ver figura 1.7): El **Azimut** ( $Az$ ) que se mide hacia el Este sobre el Horizonte desde la dirección Norte<sup>6</sup> y la **Elevación** o **Altura** ( $El$  o  $h$ ) que es el ángulo entre la dirección del objeto y el plano del horizonte. En algunas ocasiones se usa en lugar de la elevación, su complementario, que se conoce como distancia cenital. En este sistema las coordenadas son locales (los valores de las coordenadas de un mismo punto cambian al cambiar el observador).

**EJEMPLO 1.5.1** Encuentra las expresiones de las coordenadas topográficas rectangulares en función de las angulares. Deduce también las recíprocas.

Utiliza esas expresiones para hallar:

a)  $(X_T, Y_T, Z_T)$  de la ISS observada desde un observatorio de Chile con las coordenadas angulares

$$Az = 330.257^\circ; \quad El = 56.161^\circ; \quad dist = 488 \text{ km}$$

b) Las coordenadas altazimutales ( $Az, El, dist$ ) de la ISS si las coordenadas topocéntricas desde la ETSID el 14 de Abril de 2020 son  $(-1329, -432.4, 273.1)$  km.

<sup>6</sup>En Astronomía se mide habitualmente desde el Sur

**Solución:** A partir de la figura 1.7 se deduce

$$\begin{aligned} X_T &= r \cos(El) \cos(180^\circ - Az) = -r \cos(El) \cos(Az) \\ Y_T &= r \cos(El) \sin(180^\circ - Az) = r \cos(El) \sin(Az) \\ Z_T &= r \sin(El) = r \sin(El) \end{aligned} \quad (1.5)$$

y con un proceso similar al utilizado en el ejemplo 1.4.1 se obtiene

$$\boxed{\begin{aligned} r &= \|\vec{r}\| = \sqrt{X_T^2 + Y_T^2 + Z_T^2} \\ El &= \arcsin\left(\frac{Z_T}{r}\right) \\ Az &= \begin{cases} \arccos\left(\frac{-X_T/r}{\cos(El)}\right) & (Y_T \geq 0) \\ 360^\circ - \arccos\left(\frac{-X_T/r}{\cos(El)}\right) & (Y_T < 0) \end{cases} \end{aligned}} \quad (1.6)$$

a) Sustituyendo en (1.5) los datos de la ISS resulta

$$\begin{aligned} X_T &= -6378 \cos(56.161^\circ) \cos(330.257^\circ) = -235.955 \text{ km} \\ Y_T &= 6378 \cos(56.161^\circ) \sin(330.257^\circ) = -134.805 \text{ km} \\ Z_T &= 6378 \sin(56.161^\circ) = 405.336 \text{ km} \end{aligned}$$

b) Utilizando las expresiones de (1.6) se obtiene

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(-1329)^2 + (-432.4)^2 + 273.1^2} = 1424 \text{ km} \\ El &= \arcsin\left(\frac{273.1}{1424}\right) = 11.06^\circ \end{aligned}$$

como  $Y_T = -432.1 < 0$

$$Az = 360^\circ - \arccos\left(\frac{1329/1424}{\cos(11.06^\circ)}\right) = 341.98^\circ.$$

## 1.6 Otros sistemas de referencia

En ocasiones se utilizan otros sistemas de referencia como:

- Sistema de referencia Local-Ecuatorial u Horario,  $(H, \delta)$ . Es un sistema semilocal con origen en el centro de la Tierra, plano de referencia en plano ecuatorial y como dirección principal la de la intersección del meridiano del lugar con el Ecuador.

Las coordenadas angulares son: El **Ángulo Horario** ( $H$ ) que se mide hacia el Oeste sobre el Ecuador desde el meridiano del lugar y la **Declinación** ( $\delta$ ) que coincide con la declinación geocéntrico-ecuatorial. Se dice que es semilocal porque el ángulo horario es local pero la declinación es universal.

- Sistema de referencia Geográfico cuyos ángulos son la **Longitud** ( $\lambda$ ) y la **Latitud** ( $\phi$ ) **geográficas**. Este sistema ha sido utilizado durante siglos para localizar posiciones en la superficie de la Tierra y en Mecánica Orbital se usa en las 'Ground tracks' o trazas de los satélites que suelen representarse en este sistema de coordenadas utilizando para ello una proyección Mercator o cilíndrica de la superficie terrestre.
- Sistema de referencia Galáctico. Es un sistema utilizado en Astronomía pero que en Mecánica Orbital no suele utilizarse.

## 1.7 Cierre

Hemos conocido los tres principales sistemas de coordenadas utilizados en Mecánica Orbital (Heliocéntrico, Geocéntrico y Topocéntrico). En cada uno de ellos se han expuesto las coordenadas cartesianas y las angulares y se han deducido las expresiones que permiten cambiar de cartesianas a angulares y viceversa en cada uno de los sistemas.

## Capítulo 2

# Tiempos y cambios de coordenadas

### 2.1 Introducción y objetivos

En el Capítulo 1 se han presentado las características de los sistemas de referencia más utilizados en Astrodinámica:

- Heliocéntrico - Eclíptico
- Geocéntrico - Ecuatorial
- Topocéntrico - Horizontal

En éste, se van a deducir las fórmulas que permiten cambiar las coordenadas de un cuerpo entre estos sistemas de referencia (secciones 2.3 y 2.4). Cuando en el cambio intervenga el sistema Topocéntrico, necesitaremos conocer el Tiempo Sidéreo Local que se define con antelación en la sección 2.2 explicando el método empleado para su estimación.

En la deducción de las fórmulas de los cambios de coordenadas necesitaremos recordar las **Matrices de Rotación** que permiten hallar las nuevas coordenadas de un vector en un sistema de referencia que ha girado un ángulo  $\alpha$  alrededor de uno de los ejes respecto de otro sistema. Si el giro es alrededor de  $X, Y, Z$  las matrices de rotación son respectivamente:

$$R_X(\alpha) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; R_Y(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$R_Z(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Estas matrices son ortogonales por lo que sus inversas, que calculan las coordenadas cuando el giro se hace con el ángulo opuesto, coinciden con sus traspuestas, es decir:

$$R_W(\alpha)^{-1} = R_W(-\alpha) = (R_W(\alpha))^t$$

Notar que las matrices de rotación así definidas son las inversas de las realizan la rotación de vectores alrededor de los ejes X, Y, o Z, en un sistema fijo.

El principal objetivo de este capítulo es conseguir que **seas capaz de**:

- Distinguir, relacionar y convertir los distintos tipos de tiempo: Tiempo Solar, Tiempo Universal (UT) y Tiempos Sidéreos.
- Calcular la fecha juliana para un instante concreto.
- Convertir coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales en Heliocéntrico-Eclípticas y viceversa.
- Convertir coordenadas Geocéntrico-Ecuatoriales en Topocéntrico-Horizontales y viceversa.

## 2.2 Tiempo Universal (UT), Día juliano (JD) y Tiempo Sidéreo Local ( $\Theta_L$ o $TSL$ )

Para conocer la órbita de un satélite es necesario conocer el tiempo de cada observación. Existen diferentes formas de medir el tiempo de las que vamos a destacar las más utilizadas.

El tiempo que utilizamos en la vida diaria se llama **Tiempo Solar** porque se relaciona con el movimiento del Sol en la Esfera Celeste. Así, un **día solar**

(24 horas) es el tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del Sol por el meridiano del lugar.

Otra medida del tiempo fundamental en Astrodinámica es el **Tiempo Universal (UT)**. El UT se fija cuando a mediodía cruza el Sol por el meridiano de Greenwich ( $\lambda = 0^\circ$ ). A partir del UT se puede obtener el **tiempo civil** de un lugar sin más que añadir 1 hora por cada huso horario ( $15^\circ$ ) comprendido entre Greenwich y el lugar (midiendo hacia el este).

También es importante conocer el término **Día Juliano (JD)** que es el número de días transcurrido desde el mediodía<sup>1</sup> del 1 de enero del año 4713 a.C. hasta la fecha fijada. Para hallar el día juliano de un instante ( $y, m, d, h$ ) debemos hallar primero el JD a las 0h UT ( $J_0$ ) mediante la expresión<sup>2</sup>:

$$J_0 = 367y - ENT \left[ \frac{7(y + ENT(\frac{m+9}{12}))}{4} \right] + ENT \left( \frac{275m}{9} \right) + d + 1721013.5 \quad (2.1)$$

y sumarle las horas expresadas en días. Por tanto

$$JD = J_0 + \frac{h}{24} \quad (2.2)$$

**Nota 2.2.1:** La mayoría de software de cálculo permiten calcular el día juliano de un instante mediante un solo comando. Por ejemplo `JulianDate` en `MATHEMATICA` o `juliandate` en `Matlab`.

**EJEMPLO 2.2.1** *Calcula los días julianos que corresponden al 9 de Febrero de 2020 a las 20:15:50 (UT) y a una fecha que se usa a menudo como referencia, mediodía del 1 de Enero de 2000, conocida como  $J_{2000}$ .*

**Solución:** En ambos casos, aplicando (2.1) y (2.2), debemos hallar primero su correspondiente  $J_0$  y luego sumarle la UT expresada en días:

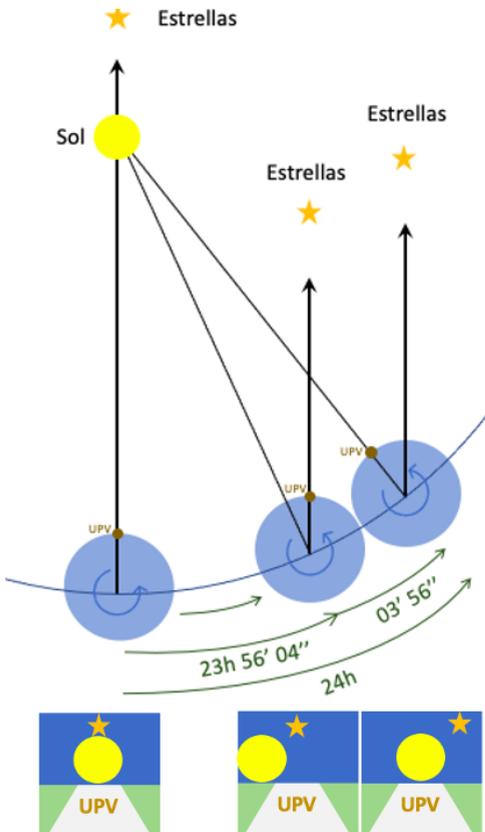
<sup>1</sup>Se mide desde el mediodía porque las observaciones astronómicas eran mayoritariamente nocturnas y se quería evitar tener un cambio de fecha en las series de observaciones

<sup>2</sup>Válida entre 1901 y 2099

$$JD = 2458888.5 + \frac{20 + \frac{15}{60} + \frac{50}{3600}}{24} = 2458889.344$$

$$J_{2000} = 2451544.5 + \frac{12}{24} = 2451545.0$$

El **Tiempo Sidéreo** es el medido por la rotación de la Tierra respecto a las estrellas fijas definiendo de esta manera el **día sidéreo** (24 horas sidéreas): tiempo transcurrido en completar la Tierra una vuelta completa sobre sí misma respecto a las estrellas. Ver figura 2.1.



**Figura 2.1:** Debido al movimiento de traslación, la Tierra tarda más en hacer una rotación respecto al Sol que respecto a las estrellas.

Como consecuencia de la definición el día sidéreo es más corto que el día solar (23h 56') y si la Tierra gira  $360^\circ$  en un día sidéreo entonces, gira  $360.986^\circ$  en un día solar.

Para saber la situación de un punto en un instante respecto al Sistema de referencia Geocéntrico-Ecuatorial es necesario conocer el tiempo sidéreo de un lugar. Se llama **Tiempo Sidéreo Local** ( $\Theta_L$  o TSL) u **Hora Sidérea Local** de un lugar al tiempo transcurrido desde que el meridiano del lugar pasó sobre el Punto Vernal, es decir, el ángulo medido hacia el Este desde el Punto Vernal hasta el meridiano del lugar expresado en horas). En consecuencia,  $\Theta_L$  es el ángulo horario que forma el Punto Vernal con el Meridiano del observador.

Para calcular la hora sidérea ( $\Theta_L$ ) de un lugar con longitud geográfica  $\lambda$  en un momento determinado UT, basta sumar la hora sidérea de Greenwich  $\Theta_G$ , que deberá ser calculada previamente, y la longitud positiva (al Este). A continuación se muestra el proceso a seguir para hacer ese cálculo.

### **Cálculo del TSL ( $\Theta_L$ ) para un lugar y momento determinados**

Paso 1: Determinar  $J_0$  para la fecha mediante la ecuación (2.1)

Paso 2: Calcular el tiempo  $T_0$  en siglos julianos entre  $J_0$  y  $J_{2000}$ :

$$T_0 = \frac{J_0 - J_{2000}}{36525}$$

Paso 3: Hallar el tiempo sidéreo en Greenwich a las 0h UT con la expresión:

$$\Theta_{G_0} = 100.4606184 + 36000.77004 T_0 + 0.000387933 T_0^2 - 2.583 \cdot 10^{-8} T_0^3 \quad (\text{grados})$$

Si  $\Theta_{G_0} \notin [0^\circ, 360^\circ]$  debemos sumar/restar múltiplos de  $360^\circ$  hasta conseguir estar en ese intervalo.

Paso 4: Hallar la hora sidérea en Greenwich  $\Theta_G$  para la UT, teniendo en cuenta que la Tierra rota cada día solar más de  $360^\circ$  respecto a las estrellas:

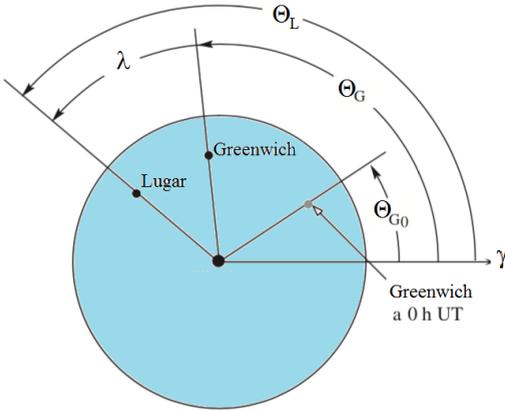
$$\Theta_G = \Theta_{G_0} + 360.98564724 \frac{UT}{24} \quad (\text{grados})$$

Paso 5: Hallar la hora sidérea local sumando la longitud geográfica en grados:

$$\Theta_L = \Theta_G + \lambda \quad (\text{grados})$$

(Si  $\Theta_L > 360^\circ$  debemos restar múltiplos de  $360^\circ$  hasta estar entre  $0^\circ$  y  $360^\circ$ )

Podemos ver una representación de estos ángulos en la figura 2.2.



**Figura 2.2:** Tiempos sidéreos (medidos desde  $\gamma$ ):  $\Theta_{G_0}$  (Hora sidérea en Greenwich a las 0h UT),  $\Theta_G$  (Hora sidérea en Greenwich) y  $\Theta_L$  (Hora sidérea del lugar).

**EJEMPLO 2.2.2** Halla la hora sidérea local en la UPV el 9 de Febrero de 2020 a las 20:15:50 UT.

**Solución:** Realizando todos los pasos indicados

Paso 1: Utilizando la igualdad (2.1):

$$J_0 = 2458888.5$$

Paso 2:

$$T_0 = \frac{J_0 - J_{2000}}{36525} = \frac{2458888.5 - 2451545.0}{36525} = 0.201054073$$

Paso 3: La hora sidérea de Greenwich a las 0 h de UT:

$$\begin{aligned} \Theta_{G_0} &= 100.4606184 + 36000.77004 T_0 + 0.000387933 T_0^2 - 2.583 \cdot 10^{-8} T_0^3 = \\ &= 7338.56^\circ \rightarrow 138.56207^\circ \end{aligned}$$

Paso 4: La hora sidérea de Greenwich a las 20 : 15 : 50 de UT:

$$\begin{aligned} \Theta_G &= \Theta_{G_0} + 360.98564724 \frac{20 + \frac{15}{60} + \frac{50}{3600}}{24} = \\ &= 138.56207 + 360.98564724 \frac{20.263889}{24} = 443.35261^\circ \end{aligned}$$

Paso 5: Como  $\lambda_{UPV} = 360^\circ - 0.343578^\circ = 359.65642^\circ$

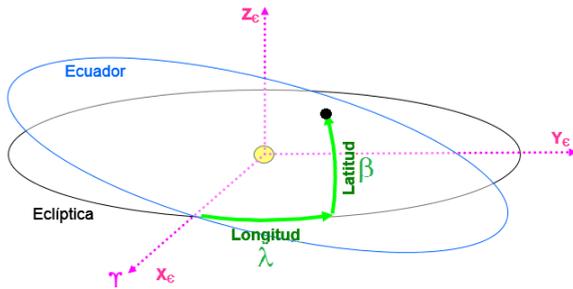
$$\Theta_L = \Theta_G + \lambda = 443.35261 + 359.65642 = 803.00903^\circ \rightarrow 83.00903^\circ \sim 5.53394 h$$

## 2.3 Paso de Geocéntrico-Ecuatoriales a Heliocéntrico-Eclípticas y viceversa

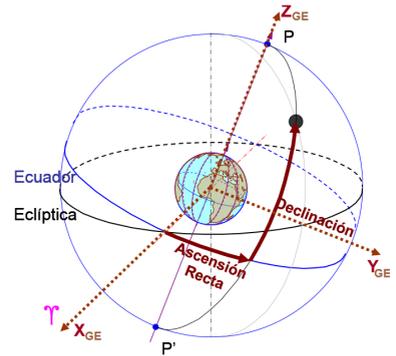
El sistema **Heliocéntrico-Eclíptico** es utilizado en misiones interplanetarias cuando las naves escapan de las esferas de influencia de los planetas y se caracteriza por estar centrado en el Sol, por tener como plano de referencia la Eclíptica y el eje principal  $X_e$  apuntando al Punto Vernal (figura 2.3).

Cuando estamos dentro de la esfera de influencia de la Tierra (SOI) el sistema utilizado es el **Geocéntrico-Ecuatorial** que está centrado en el centro de la Tierra, su plano de referencia es el plano ecuatorial y la dirección principal  $X_{GE}$  coincide con el Punto Vernal y por tanto con el eje  $X_e$  (figura 2.4).

Por tanto para cambiar las coordenadas de una nave  $S$  de **Geocéntrico-Ecuatoriales** a **Heliocéntrico-Eclípticas** será necesario hacer un giro de ángulo  $\varepsilon$  alrededor del eje  $X$  (común a ambos sistemas) para obtener geocéntrico-eclípticas y después sumar la posición heliocéntrico-eclíptica de la Tierra<sup>3</sup> para obtener las coordenadas heliocéntrico-eclípticas de  $S$  (figuras 2.3 y 2.4).



**Figura 2.3:** Sistema Heliocéntrico-Eclíptico



**Figura 2.4:** Sistema Geocéntrico-Ecuatorial

De esta manera si consideramos que las coordenadas geocéntrico-ecuatoriales de la nave son  $(X_{GE}, Y_{GE}, Z_{GE})_S$  la expresión de este cambio será:

<sup>3</sup>Calculada mediante efemérides

**Para seguir leyendo, inicie el  
proceso de compra, click aquí**