Juan Auñón López
José A. Ferri Aranda

GEOMETRÍA MÉTRICA Y DESCRIPTIVA

EJERCICIOS RESUELTOS Y COMENTADOS EN EL SIESTEMA DE PLANOS ACOTADOS

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

distribución: Telf. 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0056_05_02_06

Imprime: Byprint Percom, s.l.

ISBN: 978-84-9705-168-2
Impreso bajo demanda

Impreso en España

PRÓLOGO A LA PRIMERA EDICIÓN

Los sistemas de representación se estructuran con dos operaciones fundamentales:

- La representación gráfica de las formas del espacio.
- La reconstrucción espacial de los cuerpos y figuras a partir de su dibujo plano.

Esta doble función requiere de conocimientos que se incluyen, hoy en día, en áreas como la Geometría y Topología, la Matemática aplicada y la Expresión Gráfica propiamente dicha.

Los Sistemas de Representación son un ejemplo de un concepto mucho más amplio, la Geometría Aplicada al grafismo en la Ingeniería.

Los Profesores Auñón y Ferri nos presentan una serie de problemas que, configurados en torno al sistema de planos acotados, abren extensas posibilidades de resolución en otros sistemas más adecuados, las superficies radiadas y otras, en diédrica. Los problemas de Apolonio en la esfera, por otra parte, son susceptibles de diversas soluciones geométricas, lo que despertará en nuestros alumnos un interés por la geometría clásica.

Sirvan, por tanto, estos ejercicios para fomentar la agilidad mental del estudiante en la visión del espacio y, concomitante con ello, practicar una expresión gráfica útil a la Ingeniería.

Valencia, Junio 1998

Miguel A. Gil Sauri

Catedrático de Geometría Aplicada en la
Escuela de Caminos de Valencia

PRÓLOGO DE LOS AUTORES

La implantación de los nuevos planes de estudio en las Escuelas de Ingeniería ha supuesto una reducción de las horas lectivas asignadas a la Geometría Métrica y Descriptiva. Este recorte ha estado acompañado lógicamente de una disminución en los contenidos de los programas, que no obstante, requieren para su asimilación el mismo desarrollo de la visión espacial – necesaria por otra parte, para el ejercicio profesional del ingeniero -, que era antes adquirida paulatinamente en un periodo de tiempo superior.

En este contexto se plantea como objetivo principal de esta publicación, facilitar la asimilación de la disciplina en el corto período de tiempo disponible, a través de una colección de ejercicios tutorizados que permiten un proceso personalizado de aprendizaje.

Este libro intenta así poner a disposición de los alumnos de escuelas técnicas, una herramienta que complemente las clases recibidas y les permita dominar, desde el punto de vista de las aplicaciones prácticas en la ingeniería, la resolución de problemas geométricos espaciales en el Sistema de Planos Acotados.

Los ejercicios propuestos abarcan un amplio espectro de los principales contenidos teóricos de la Geometría Métrica y Descriptiva en el Sistema de Planos Acotados, siendo variados en su tipología y grado de dificultad. Así, junto a ejercicios de aplicación directa de la teoría, que permiten al alumno iniciarse con facilidad en el estudio de la materia, se ha incluido otros de los considerados "clásicos" en esta disciplina, a los que se añade un tercer grupo de problemas de mayor complejidad, que le ayudan a profundizar en el dominio de la geometría y sus aplicaciones en la ingeniería.

En la resolución propuesta de los ejercicios se ha huido de procedimientos singulares desconectados de los conocimientos teóricos, tratando de introducir por el contrario, un "método" que permita una aproximación más universal y científica a la disciplina.

En esta línea se ha incluido además de la resolución propiamente dicha, comentarios y croquis a los ejercicios. Los comentarios conectan los ejercicios con los conocimientos teóricos, y permiten la identificación de procedimientos con que abordar otros problemas afines. Los croquis presentados en muchos ejercicios facilitan la visión espacial del problema. El propósito de ambos es inducir a utilizar los principios y procedimientos de la geometría métrica del espacio en la resolución de los problemas, pasando más tarde a su desarrollo en el Sistema de Planos Acotados.

teórico de la materia. En el último capítulo se resuelven problemas de aplicación práctica a la ingeniería en los que comúnmente se utiliza el Sistema de Planos Acotados.

De este modo, se presenta en el primer capítulo los fundamentos del Sistema y la representación de los elementos fundamentales: punto, recta y plano. El segundo capítulo aborda las posiciones relativas en el espacio de estos elementos fundamentales: incidencia, paralelismo y perpendicularidad.

En el tercer capítulo se incluye los métodos de la Geometría Descriptiva (esencialmente abatimientos) y su aplicación a la determinación de distancias. El cuarto tema, se dedica a la determinación y condicionamiento de ángulos, así como a la resolución de triedros.

Los tres capítulos siguientes, se dedican al estudio de superficies. Aunque el estudio de las superficies suele abordarse utilizando otros sistemas de representación, como el diédrico – en algunos casos más adecuado para su descripción y análisis por utilizar la doble proyección -, en el área de la ingeniería civil es ampliamente utilizado el sistema de planos acotados, razón por la que se ha incluido una serie de ejercicios de las superficies más utilizadas en esta rama de la ingeniería. Así, el capítulo quinto se dedica a las formas poliédricas regulares y el sexto a las superficies radiadas, siendo la esfera el objeto del séptimo de los temas.

Por último, el capítulo octavo agrupa un extenso conjunto de problemas de aplicación práctica: sombras, cubiertas, representaciones de la superficie topográfica, resolución de plataformas, problemas de geología estructural, obras lineales, y representación de grandes obras de fábrica.

Colaboradores:

1ª edición: Francisco Fabra Collado

2ª edición: Fernando Rodríguez Vercher

Valencia, marzo de 2002

LOS AUTORES

CONVENCIONES Y NOTACIÓN

En los problemas que componen el presente libro se ha utilizado las convenciones clásicas de los sistemas de representación. Se destacan por su importancia las siguientes:

Unidades, origen y escala de la representación: Por defecto y salvo indicación en contrario las unidades referentes a las magnitudes y/o coordenadas son metros y la escala de representación 1:100. El origen de coordenadas se sitúa en la esquina inferior izquierda del recuadro de las láminas. Los ejes, tal como se indican, corresponden: el eje X al borde inferior y el eje Y al borde izquierdo. El eje Z, corresponde al eje vertical cuyo sentido positivo es hacia la parte superior.

Notación de elementos: Los puntos y rectas se representan por letras mayúsculas para indicar los elementos en el espacio, y la correspondiente minúscula para indicar su proyección. Cuando el elemento está abatido se utiliza mayúsculas entre paréntesis. Generalmente se utiliza las primeras letras del abecedario para indicar puntos; las letras R, S y T para las rectas y las letras P, Q, W o bien α, β, γ, π para indicar los planos. Estos últimos se representan por su línea de máxima pendiente graduada y se nombran por la letra correspondiente.

En numerosos problemas planteados se ha utilizado la notación simplificada para definir un plano por tres puntos, cada uno de ellos situado en un eje coordenado. Así por ejemplo la notación P [3, 5, 4] es la forma simplificada de expresar el plano que pasa por los puntos : [(3;0;0) (0;5;0) (0;0;4)]; este plano corresponde al representado en la figura 1.

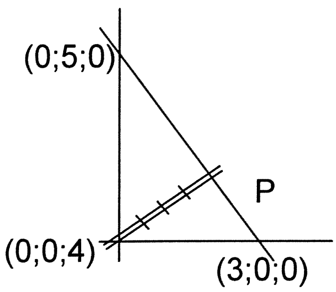


Fig 1

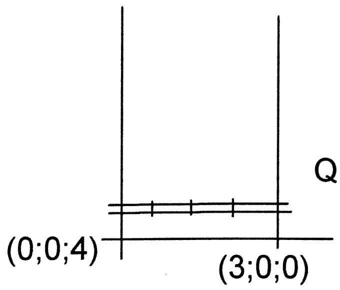


Fig 2

La traza del plano se obtiene uniendo los puntos situados en los ejes X e Y cuya cota es 0 y la graduación se realiza trazando una recta perpendicular a dicha traza por el origen y dividiendo el segmento en tantas partes como el valor de la cota del punto.

Un caso particular, y que aparece con frecuencia, son los planos paralelos a alguno de los ejes coordenados ; en este caso la coordenada correspondiente es ∞. La figura 2 representa, como ejemplo de este último caso, el plano Q [3; ∞; 4] que es un plano paralelo al eje Y.

ÍNDICE

CAPÍTULO I

FUNDAMENTOS DEL SISTEMA. REPRESENTACIÓN DE PUNTO, RECTA Y PLANO

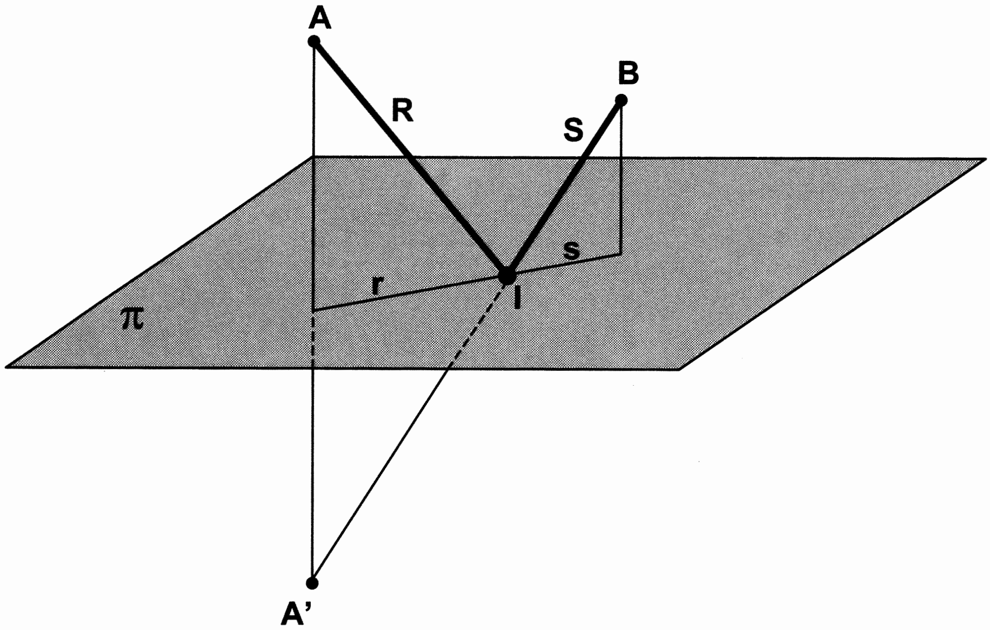
I.1. *Dados los puntos A(3; 5; 6) y B(10; 18; 2), determínese la trayectoria mas corta para ir de A hasta B pasando por un punto de cota cero.*

Resolución:

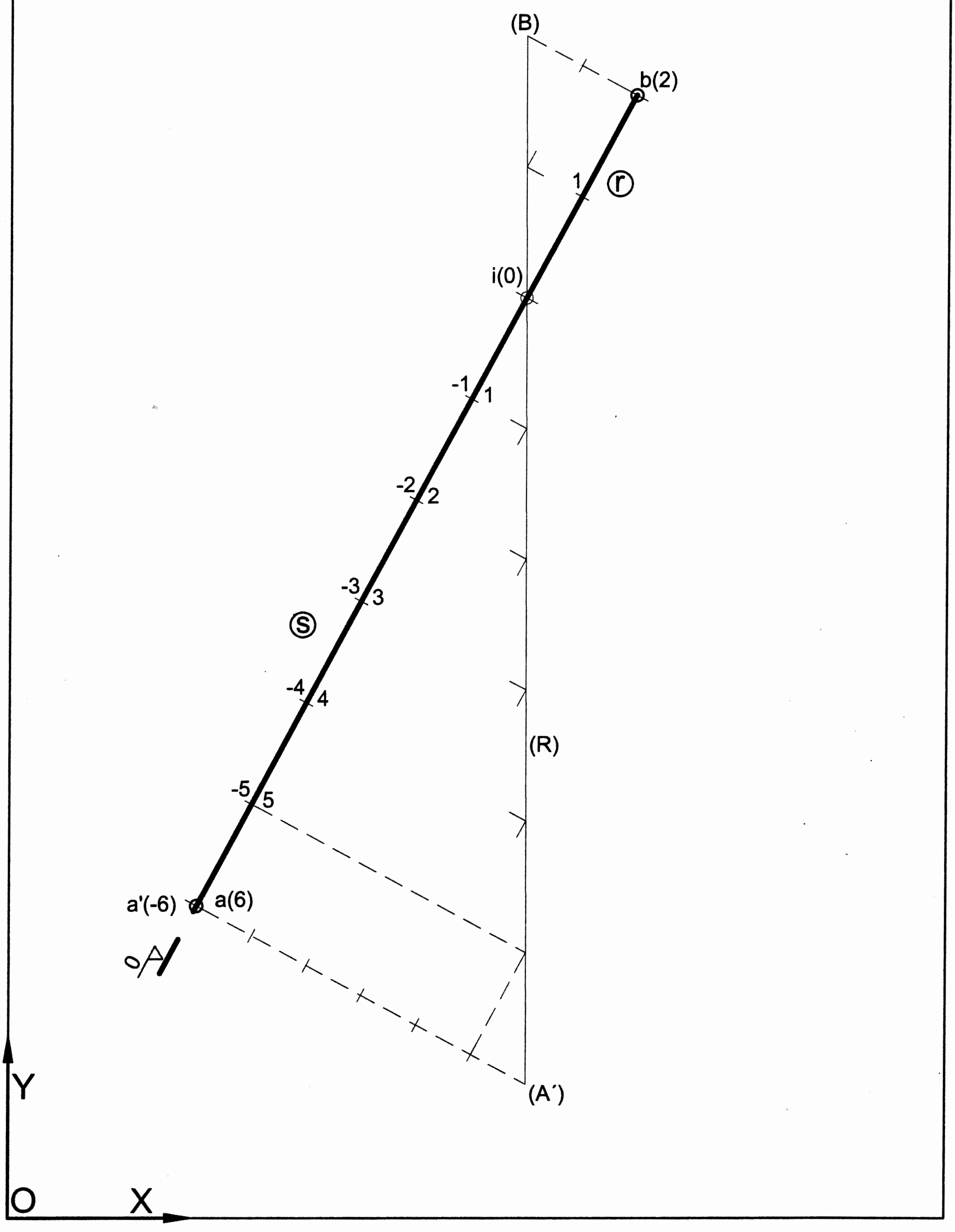
Que la trayectoria pase por un punto de cota cero, es equivalente a que pase por el plano de comparación. El trayecto mas corto está, obviamente, en el plano proyectante del segmento AB (que no se dibuja).

Si se determina el punto A', simétrico del A respecto del plano de comparación, el camino más corto para ir de A' a B es el segmento de recta A'B, y puesto que AI = A'I, siendo I la traza de la recta A'B, el camino pedido es el AIB. (Ver croquis).

En acotados, A' tendrá la misma proyección que A y cota opuesta. Se traza el segmento A'B y se gradúa, determinando la traza I del mismo. Las rectas R y S tienen la misma proyección acotada por estar en el mismo plano proyectante, aunque crecen en sentido contrario.



I.1



I.2. Dada la recta R definida por los puntos: M(20; 26; 3) y N(65; 60; 18'5) (datos en metros), se pide:

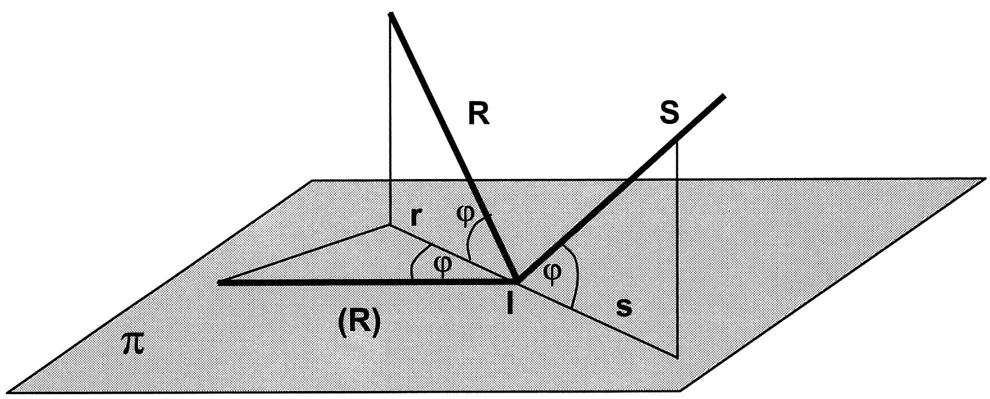
- ***Representar la recta a escala 1:500, graduándola.***
- ***Obtener gráficamente el ángulo que forma con el plano de comparación, su pendiente y el módulo.***
- ***Trazar la recta S simétrica de la R respecto al plano de comparación.***

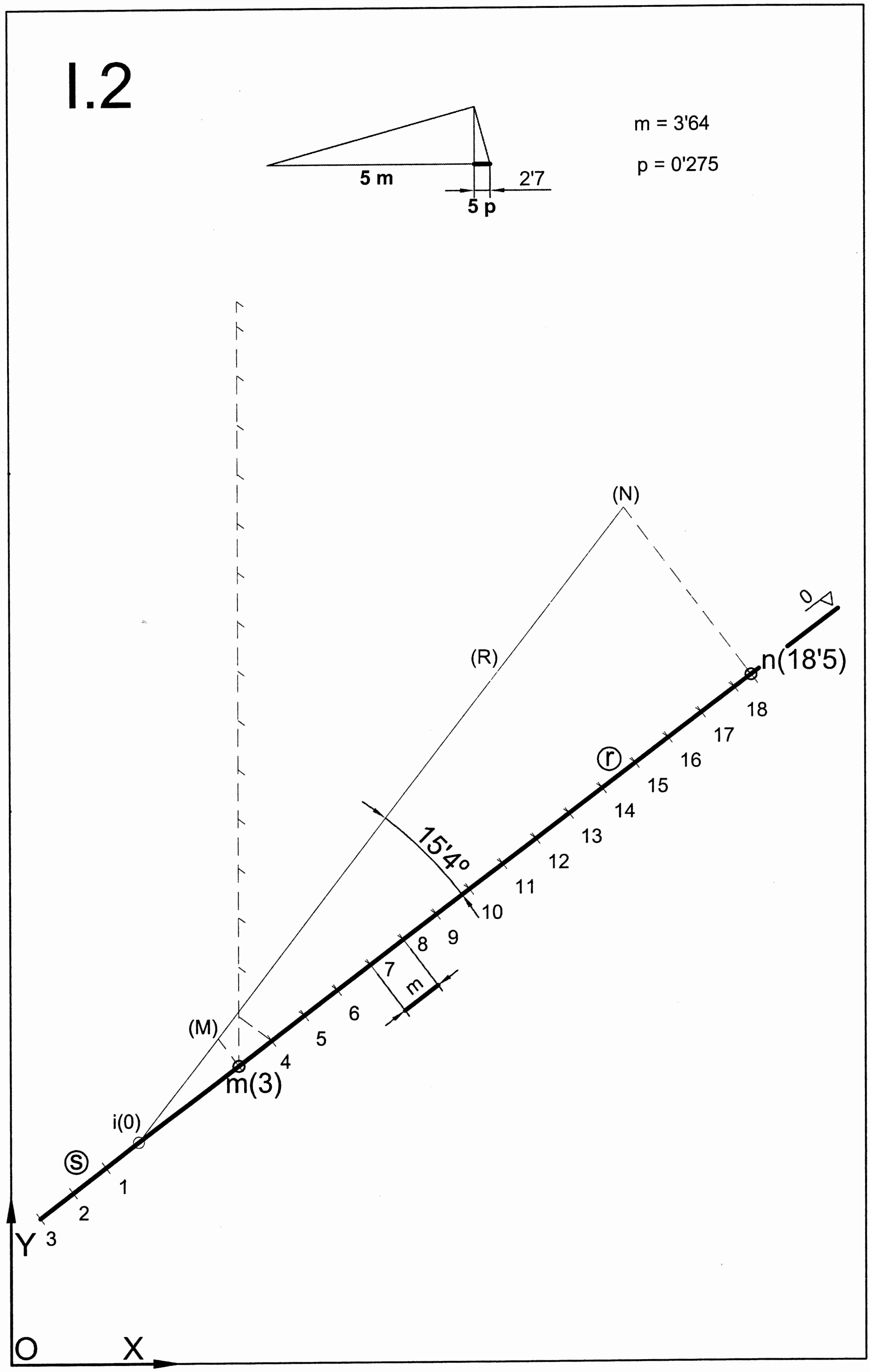
Resolución:

La proyección de la recta R se obtiene uniendo los puntos M y N que se representan aplicando a sus coordenadas la escala pedida. Para graduarla se divide el segmento MN en 16 partes (la diferencia de cotas entre los puntos es de 15'5 m), 15 de ellas de igual longitud y otra de tamaño la mitad de las anteriores.(Recuérdese que en la proyección ortogonal se conserva la proporcionalidad).

El ángulo entre una recta y el plano de comparación, es el que forma la recta R en el espacio con su proyección r (ver croquis). El valor del módulo o intervalo se obtiene al medir la distancia recorrida en horizontal para alcanzar una diferencia de cota de una unidad. La pendiente se obtiene sabiendo que es inversa al módulo, mediante la construcción auxiliar de la lámina basada en el teorema de la altura de un triángulo rectángulo. (Se ha utilizado 5 veces el módulo y se ha obtenido por tanto 5 veces la pendiente).

La recta S, simétrica a la R, tendrá la misma dirección y pendiente opuesta a la R.



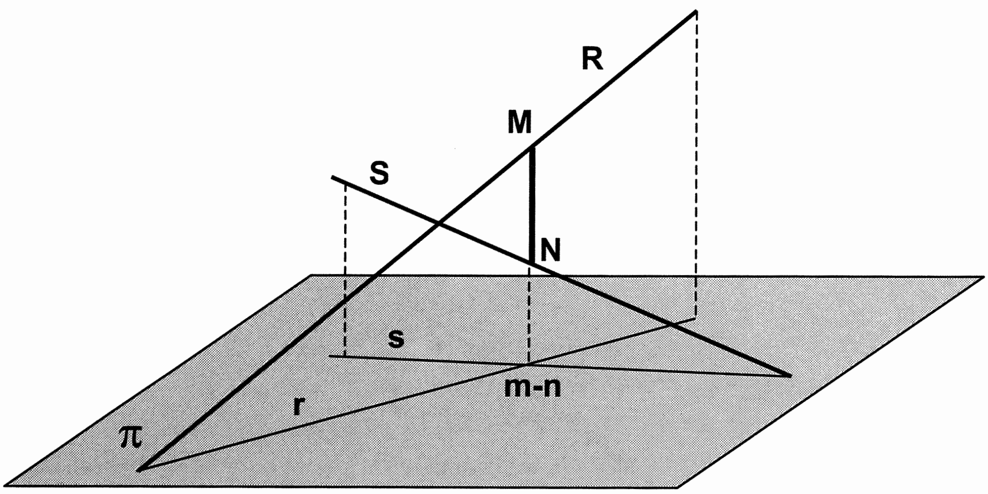

I.2
5 m
2'7
5 p
m = 3'64
p = 0'275
(N)
(R)
n(18'5)
0
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
7
m
6
5
4
m(3)
(M)
i(0)
s
r
15'4º
1
2
3
Y
O
X

I.3. Calcúlese la profundidad del pozo vertical que une 2 galerías cuyos ejes son las rectas R[(2; 9; 0'5) (13; 10; 5)] y S[(3; 18; 3'5) (11; 4; 0)].

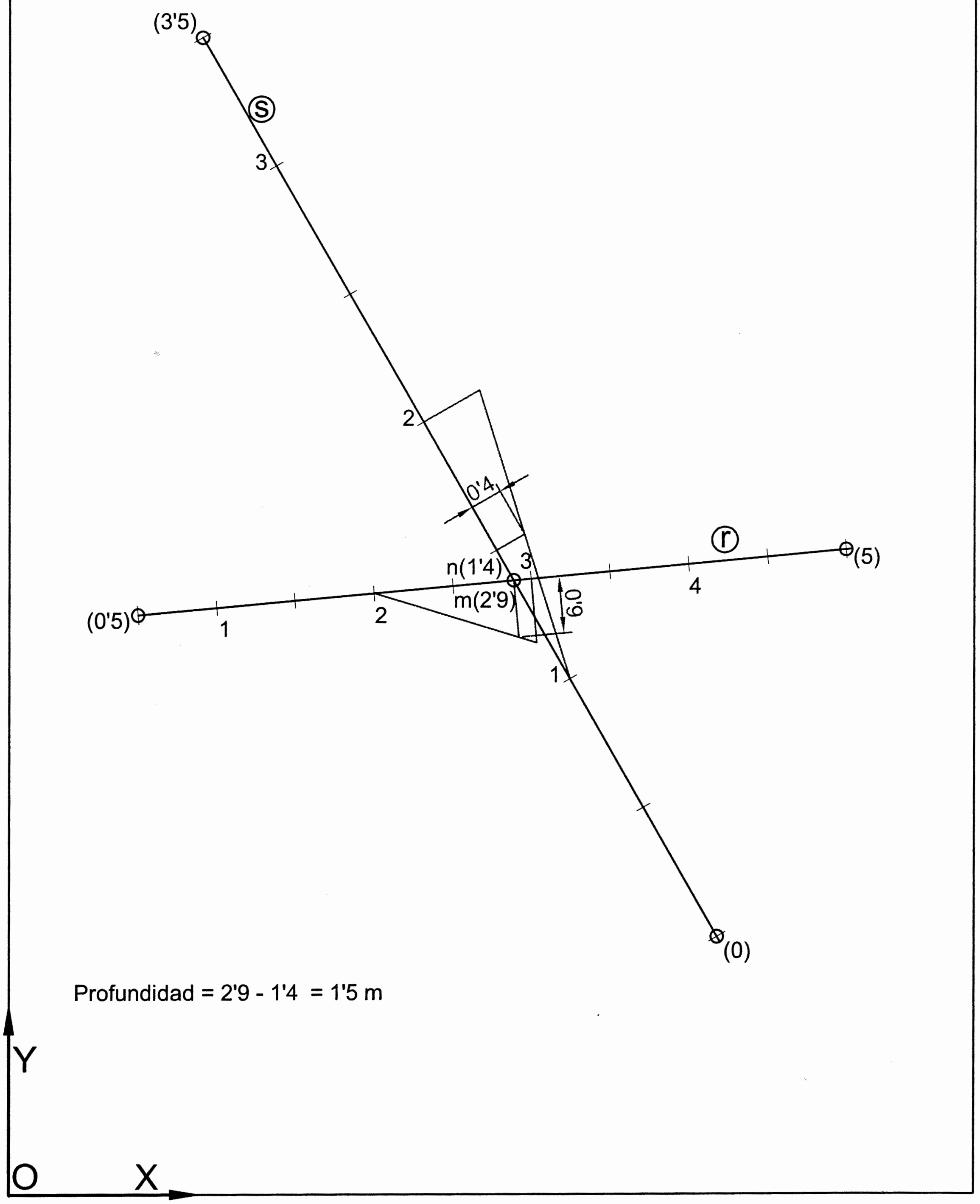
Resolución:

Las rectas R y S se cruzan en el espacio. La profundidad del pozo pedida vendrá dada por la diferencia de cotas de los puntos de las rectas R y S cuya proyección coincide. Se trata, por tanto, de hallar las cotas de los puntos M de R y N de S situados en la vertical en que ambas rectas se cruzan y obtener el desnivel entre ambos.

Bastará, por tanto, con graduar ambas rectas y determinar las cotas de M y N mediante interpolación lineal, en la forma que se indica en la lámina.



I.3



Profundidad = 2'9 - 1'4 = 1'5 m

I.4. Dados lo puntos A(10; 30; 20) B(30; 30; 20) C(70; 60; 0) D(110; 60; 10) E(140; 80; 60) y F(140; 120; 60) (datos en metros), se pide:

- ***Representar a escala 1:1000 la poligonal formada por los puntos.***
- ***Graduar los diferentes segmentos indicando la pendiente de cada uno.***
- ***Trazar la recta AF graduándola y obteniendo su pendiente.***

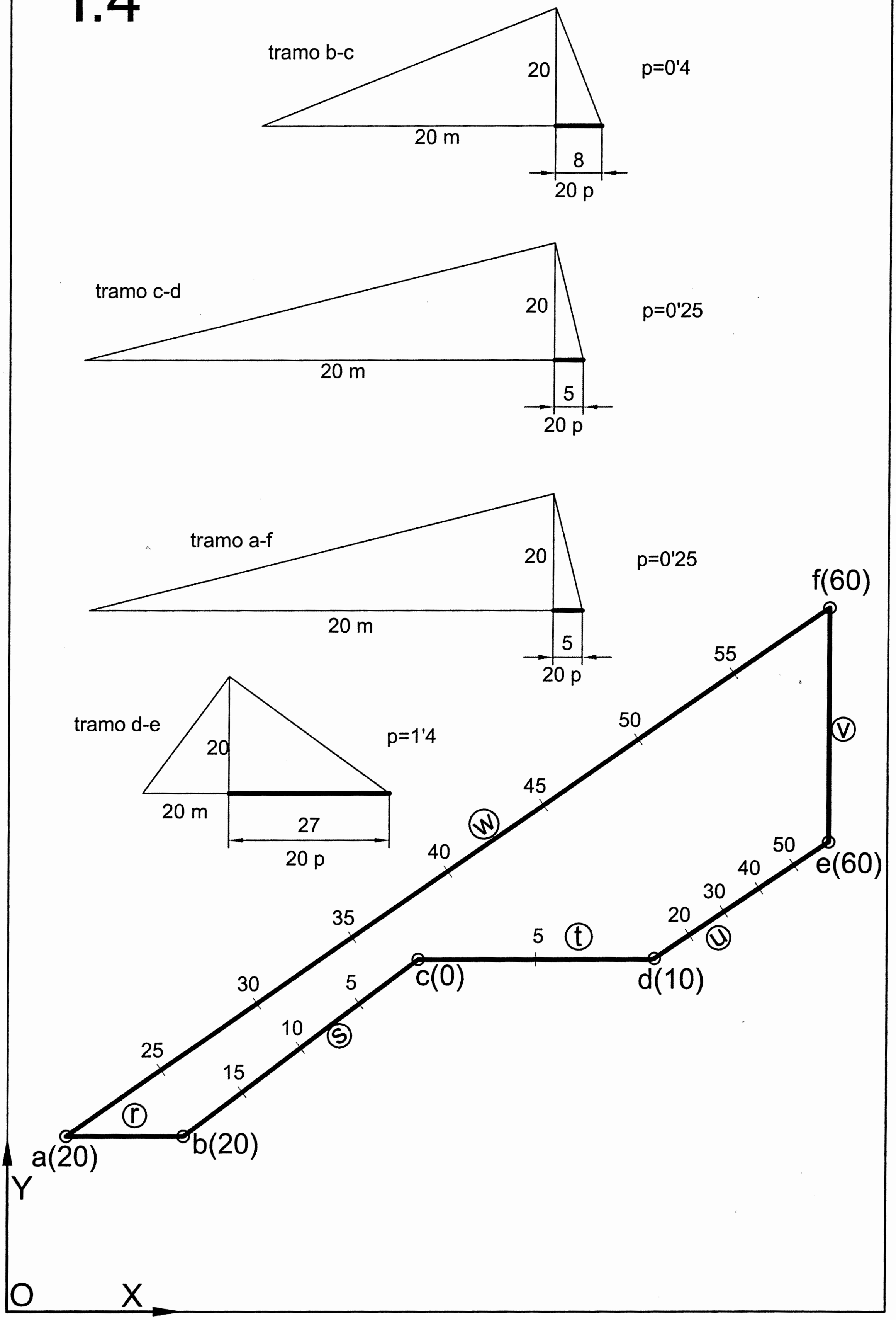
Resolución:

Se trata de un problema compuesto de varios como el ya realizado en I.2.

El tramo AB es horizontal y por tanto de pendiente nula (módulo infinito). El tramo BC se divide en 4 partes (equidistancia de 5 m), el CD en 2 partes, el DE en 5, el EF es horizontal y el AF en 8.

La pendiente en cada uno de los tramos es inversa al módulo correspondiente y se obtiene gráficamente utilizando el teorema de la altura en un triángulo rectángulo. Así, se construye triángulos rectángulos de altura 20 m de modo que uno de los segmentos en que la altura divide a la hipotenusa sea igual a 20 veces el módulo, por lo que aplicando el citado teorema, el otro segmento de la hipotenusa será 20 veces la pendiente. (Ver construcciones auxiliares).

I.4


tramo b-c
20
p=0'4
20 m
8
20 p
tramo c-d
20
p=0'25
20 m
5
20 p
tramo a-f
20
p=0'25
20 m
5
20 p
tramo d-e
20
p=1'4
20 m
27
20 p
f(60)
e(60)
d(10)
c(0)
b(20)
a(20)
r
s
t
u
v
w
25
30
35
40
45
50
55
15
10
5
20
30
40
50
Y
O
X

I.5. Dados los puntos: A(5; 4; 6) B(14; 15; 8) y C(5; 18; 20'6), se pide:

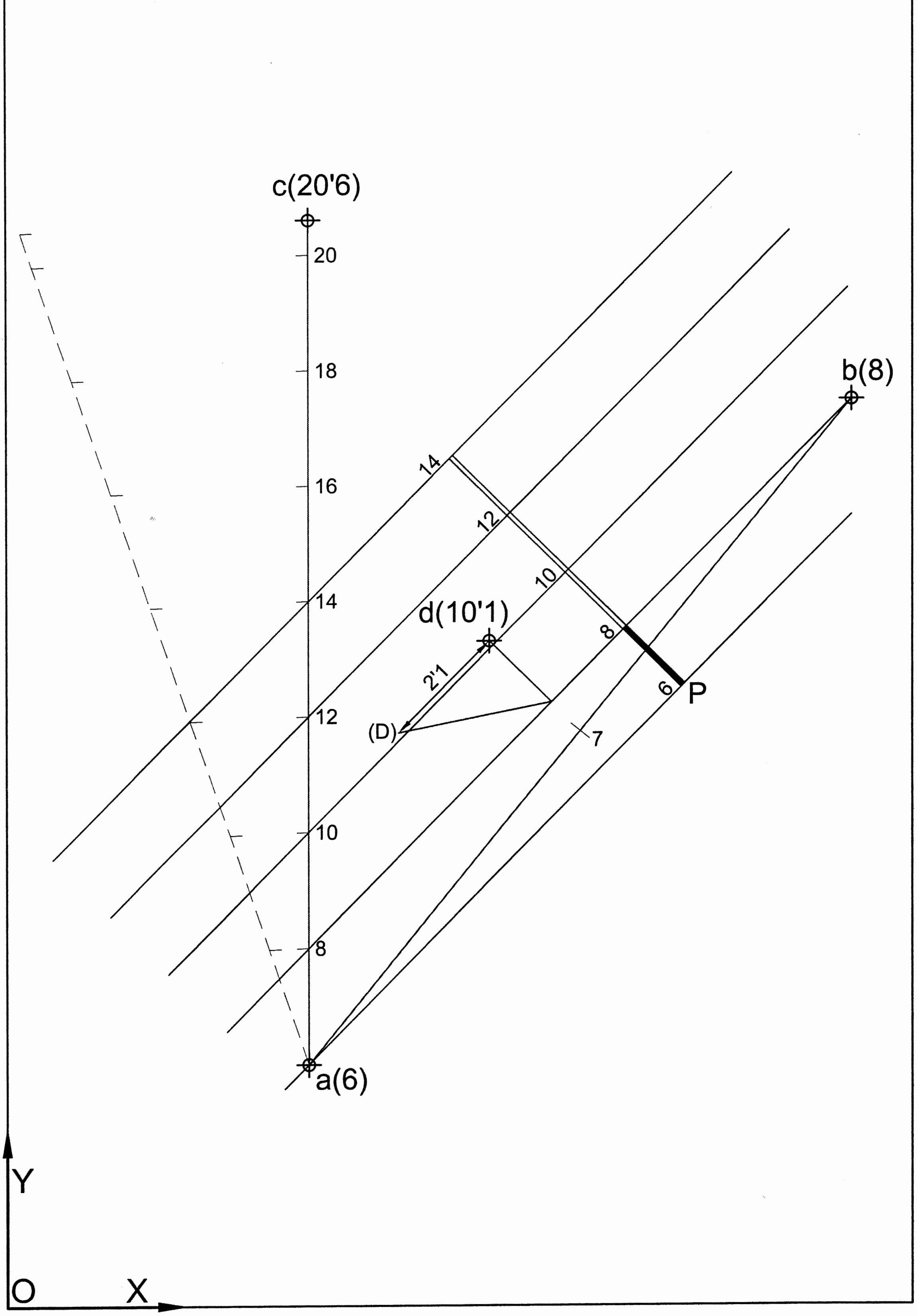
- ***Determinar el plano definido por ellos.***
- ***Representar las líneas de nivel cada 2 metros.***
- ***Determinar la cota del punto D(8; 11; z) para que pertenezca al plano.***

Resolución:

Se eligen dos de las rectas definidas por los 3 puntos, las AB y AC por ejemplo, se gradúan y se unen 2 de los puntos de igual cota de estas rectas (los de cota 8), obteniendo la dirección de las horizontales de plano. La l.m.p. del plano será la recta perpendicular a las horizontales del mismo plano y su graduación vendrá definida por las citadas horizontales.

La cota del punto D se obtiene a partir de la horizontal de plano que pasa por el punto. Se traza el segmento de l.m.p que va desde la horizontal de cota 8 hasta el punto D y se mide el desnivel entre ambos puntos.

I.5



I.6. Dados los puntos A(12; 6; 3) B(13; 13; 9) y C(1; 15; 12), se pide:

- ***Determinar el plano definido por los puntos por su l.m.p. graduada.***
- ***Representar las rectas del plano de pendiente mínima, cada metro.***
- ***Trazar una recta sobre dicho plano que pase por B y tenga pendiente 0'8.***

Resolución:

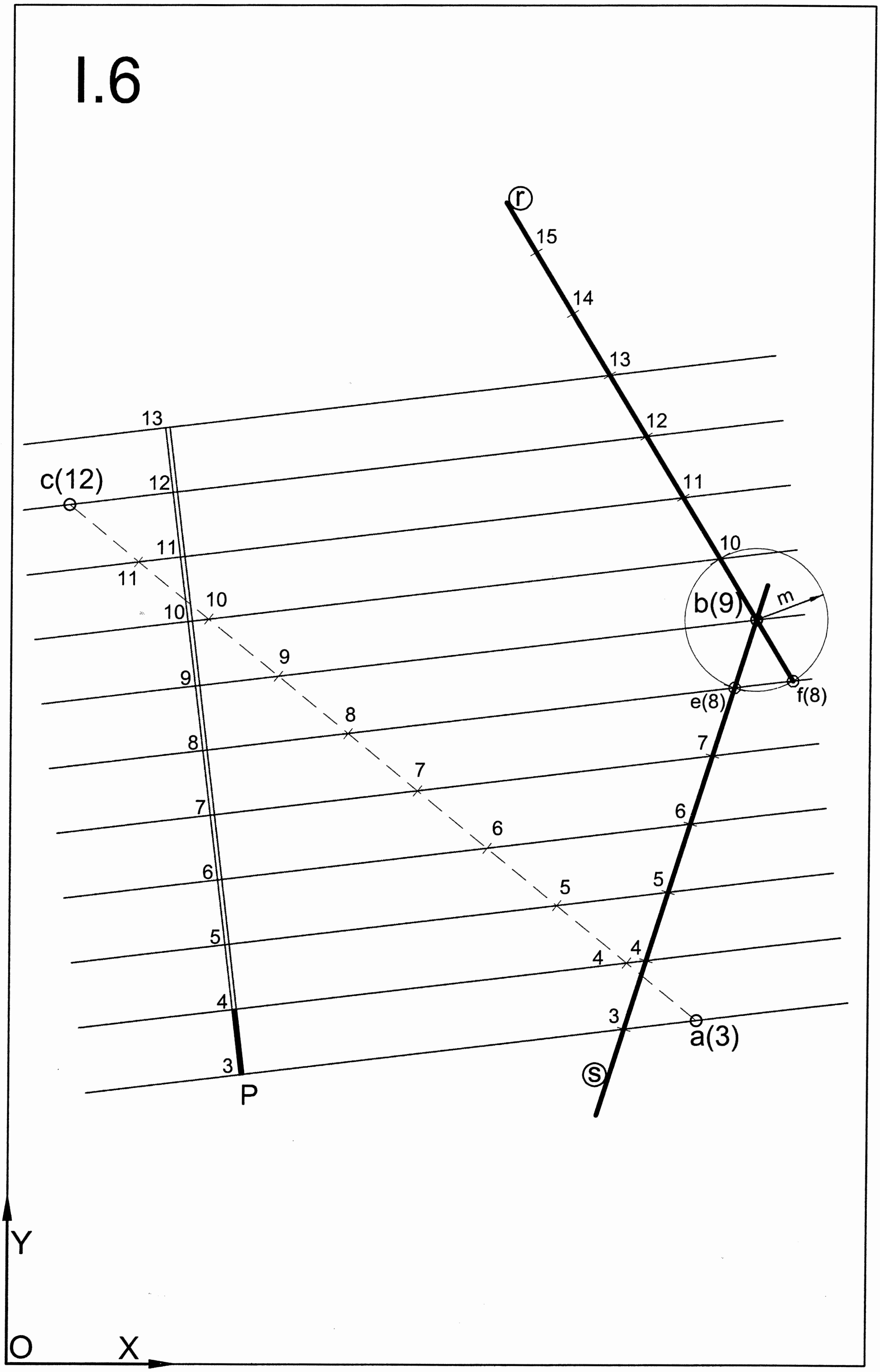
El primer apartado se resuelve de modo similar al ejercicio anterior. Se gradúa AC y se une el punto B con el de igual cota (9) de la recta AC para determinar la dirección de las horizontales de plano. La l.m.p. será ortogonal a la anterior y se gradúa a partir de la graduación de la recta.

Las rectas de pendiente mínima de un plano, son las horizontales del mismo.

El último apartado se resuelve trazando una circunferencia con centro en B y radio el módulo de la recta (1/0'8), y hallando los puntos de intersección de la circunferencia con la horizontal de plano cuya cota difiera en una unidad de la del punto B. El punto B y los E y F hallados, determinan las dos rectas, R y S, solución al problema pedido. En efecto las rectas R y S cumplen los requisitos pedidos: tienen la pendiente que se pide (puesto que tienen el módulo inverso) y pertenecen al plano.

Los problemas de este tipo tienen numerosas aplicaciones en la Ingeniería Civil y de un modo general pueden tener 2 soluciones (como en este caso), una (si la circunferencia de radio m es tangente a las líneas de nivel del plano) o ninguna, dependiendo de que el valor del módulo m de la recta pedida sea mayor, igual o menor que el del plano P. Si el módulo es igual la solución única será la l.m.p. de P que pase por el plano. Si el módulo es menor (la circunferencia de radio m no cortaría a las horizontales contiguas) lógicamente no hay solución, cosa que puede intuirse sin más que pensar que no se puede "meter" una recta en un plano cuando la pendiente de la recta es mayor que la máxima que se da en el plano (la de su l.m.p.).

I.6



r
15
14
13
12
11
10
b(9)
m
e(8)
f(8)
7
6
5
4
3
a(3)
s
c(12)
13
12
11
11
10
10
9
9
8
8
7
7
6
6
5
5
4
4
3
P
Y
O
X

I.7. Dada la recta R[(2; 8; 4) (12; 18; 15)], se pide:

- ***Trazar un plano de pendiente 3 que contenga a R.***
- ***Determinar el plano de menor pendiente que puede contener a dicha recta.***

Resolución:

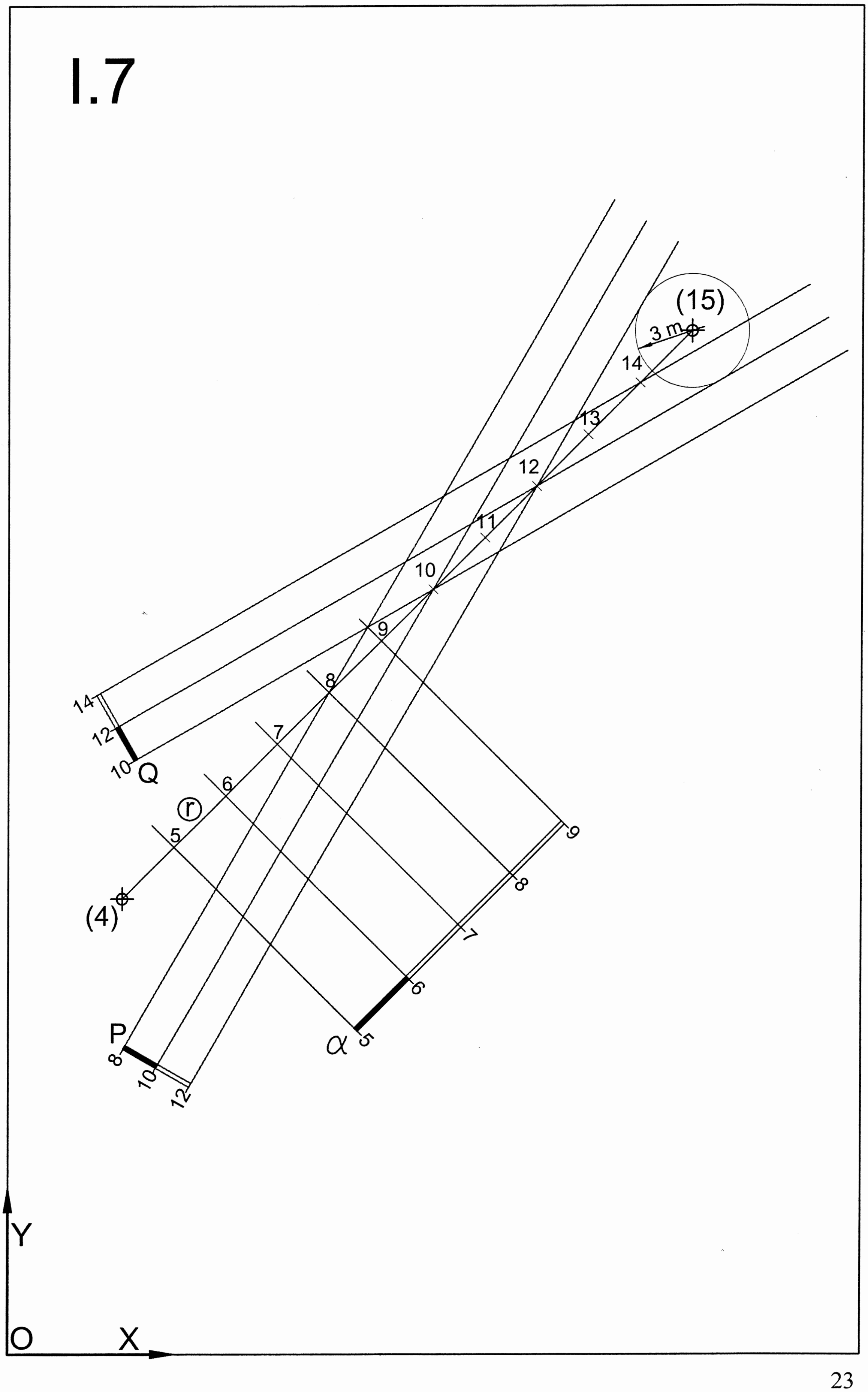
Con centro en uno de los puntos de la recta graduada R, se traza una circunferencia de radio el módulo del plano pedido, 1/3 (o de n veces 1/3 sí éste resulta muy pequeño). Las tangentes a la circunferencia desde los puntos de la recta R que difieran en una unidad de cota (o en n unidades), darán la dirección de las horizontales de los planos solución P y Q.

Efectivamente los planos P y Q obtenidos con esta construcción cumplen las condiciones pedidas: Tienen de pendiente 3 (módulo 1/3) y contienen a la recta puesto que las horizontales se trazan pasando por los puntos de cota correspondiente de la recta.

Los problemas de este tipo tienen múltiples aplicaciones en la Ingeniería Civil (resolución de plataformas, planos de caída de tierras en caminos etc.) y de un modo general pueden tener 2 soluciones (como en este caso), una (si el módulo del plano que se pide es igual al de la recta) o ninguna (si el módulo del plano es mayor que el de la recta). Si el módulo es igual la solución única será un plano cuya l.m.p. sea la recta dada R. Si el módulo del plano pedido es mayor (no se podrían trazar las tangentes a la circunferencia desde un punto interior) lógicamente no hay solución.

El plano α de menor pendiente que puede contener a la recta, es el que tiene a la misma como l.m.p.

I.7

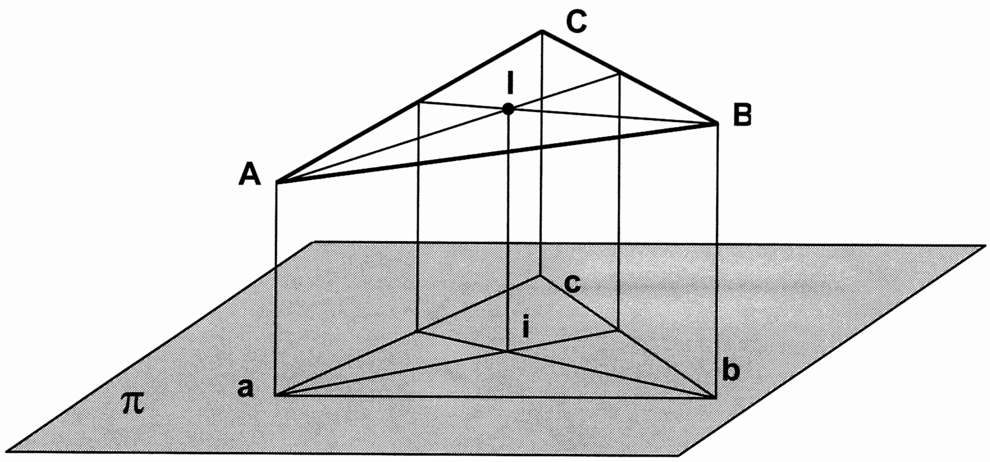


I.8. Determínese la posición y cota del baricentro del triángulo cuyos vértices son: A(7; 8; 6) B(14; 16; 14) y C(1; 15; 3).

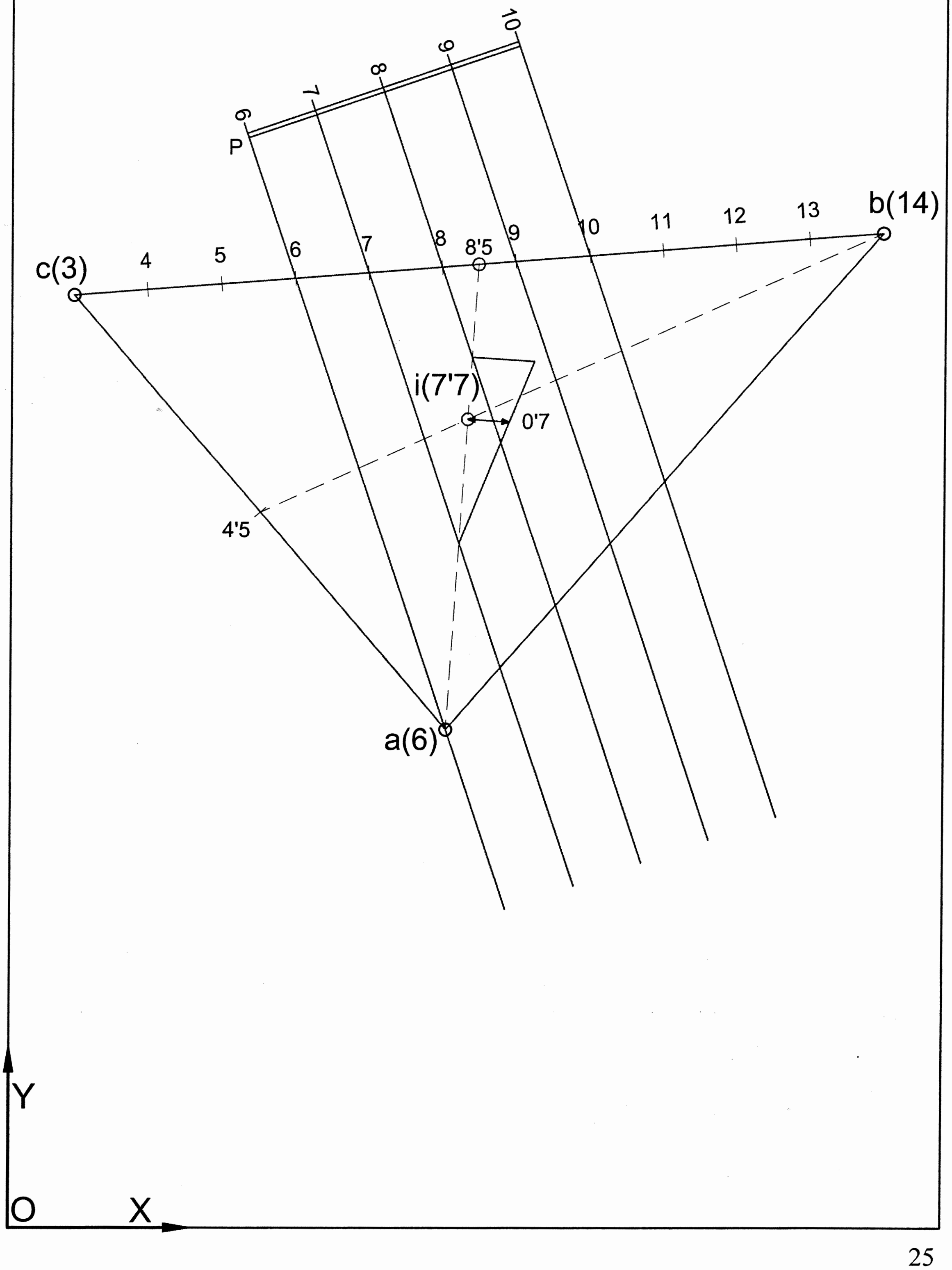
Resolución:

Puesto que en la proyección cilíndrica se conserva la proporcionalidad y los centros, la proyección acotada del baricentro es el punto de intersección de las rectas que unen las proyecciones de los vértices del triángulo con los puntos medios de los lados opuestos.

La cota del baricentro puede obtenerse graduando una de las cevianas. En el ejercicio se gradúa la mediana que parte de A y se determina la cota de I con la construcción del triángulo entre los puntos de cota 7 y 8. En el ejercicio resuelto se ha determinado también (aunque es innecesario) el plano P definido por los puntos A, B y C que contiene al triángulo.



I.8

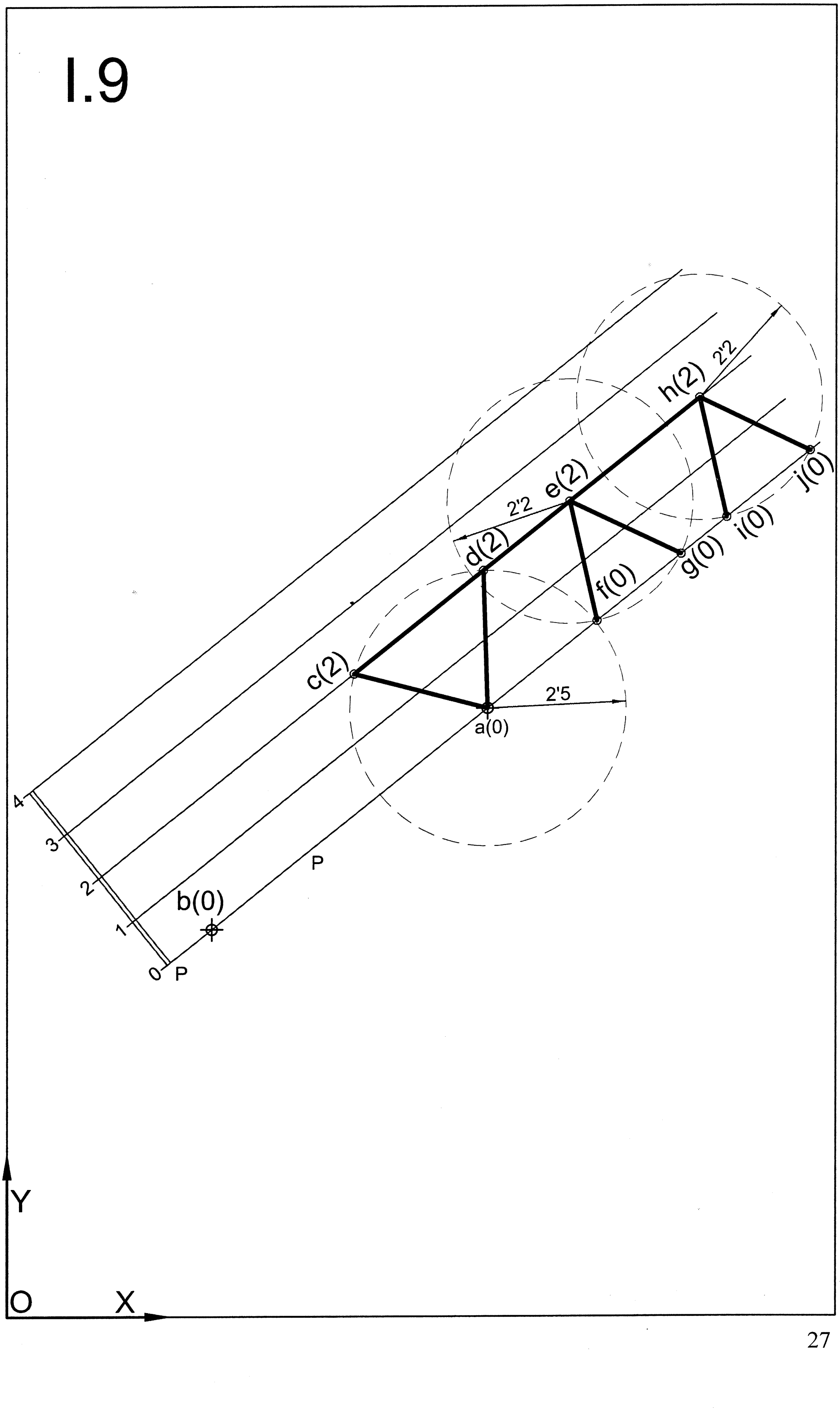


I.9. Un peatón está situado en el punto A(8'7; 11; 0) del plano P, que pasa por A y B(3'5; 7; 0), y de módulo m = 1, creciente en cota hacia la izquierda del papel. A continuación, sube por este plano con una pendiente de 0'8 hasta llegar a la cota 2, desplazándose, desde este punto y horizontalmente hacia la derecha del papel durante 5 m, y descendiendo, a continuación, con pendiente de 0'9 hasta llegar de nuevo al plano de comparación. Determínese las trayectorias posibles del peatón.

Resolución:

Se trata de resolver diferentes problemas del tipo " Por un punto de un plano, trazar rectas de pendiente dada contenidas en él", ya vistos en ejercicios anteriores. Los gráficos del ejercicio resuelto son suficientemente expresivos, siendo innecesarias explicaciones adicionales. Las trayectorias pedidas son las: A - C - E - F; A - C - E - G; A - D - H - I; y A - D - H - J.

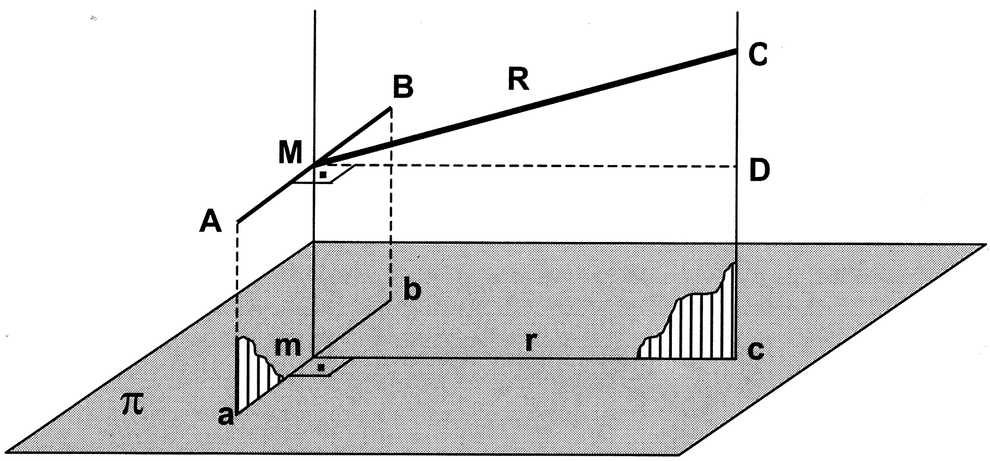
Los radios 2´5 y 2´2 utilizados en el ejercicio se corresponden con el doble de los correspondientes módulos (2 x 1/0´8) y (2 x 1/0´9).


I.9
h(2)
2'2
j(0)
e(2)
2'2
i(0)
d(2)
g(0)
f(0)
c(2)
2'5
a(0)
4
3
2
1
0
P
b(0)
P
Y
O
X

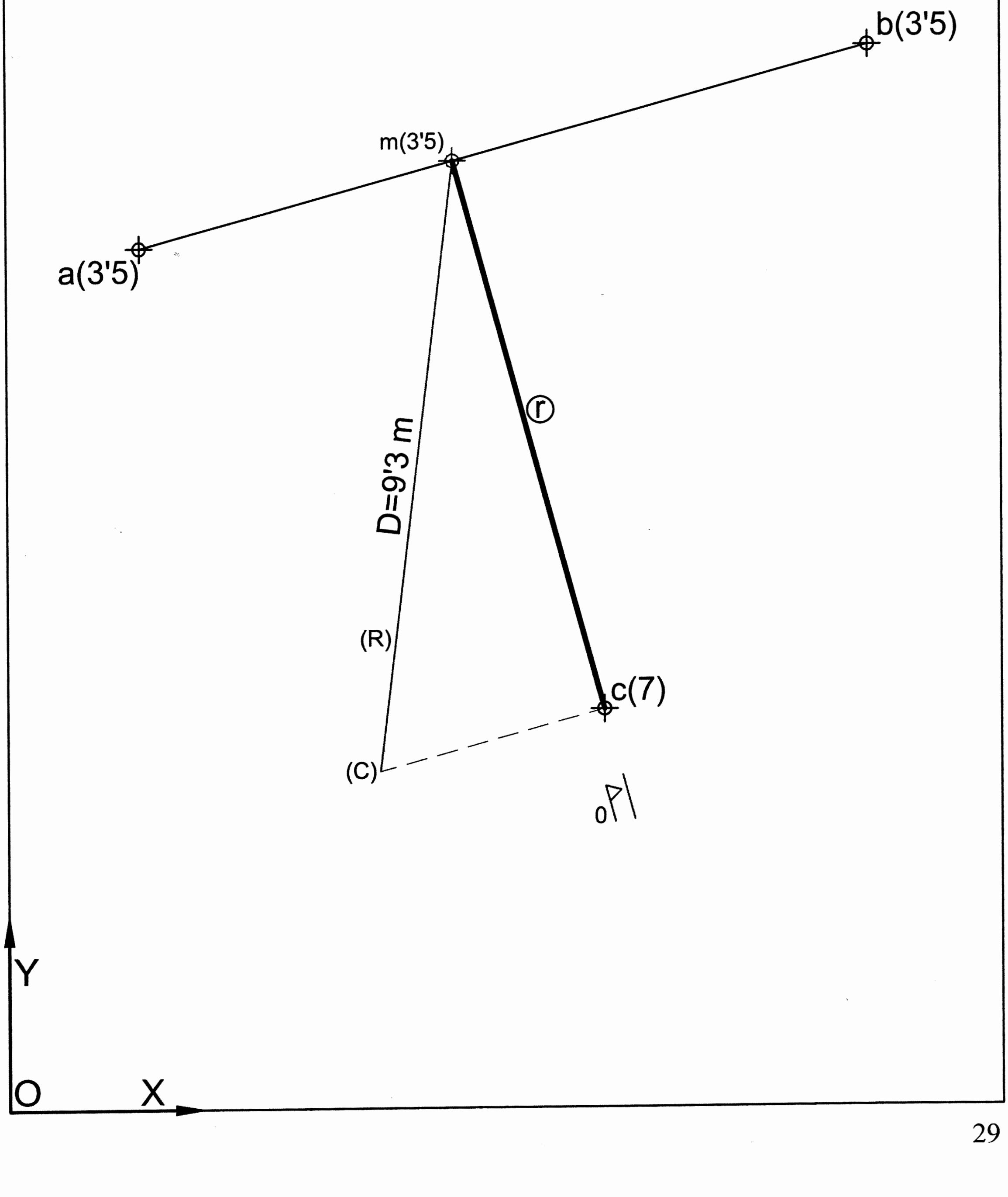
I.10. Determínese la mínima distancia entre la recta A(2; 13; 3'5) B(13; 16; 3'5) y el punto C(9; 6; 7).

Resolución:

La mínima distancia entre un punto y una recta, viene dada por la longitud del segmento de perpendicular a la recta, trazada desde el punto. Puesto que la recta AB es horizontal, por el teorema de las tres perpendiculares, el ángulo de 90° entre la recta AB y su perpendicular R por C se conservará en sus proyecciones sobre el plano de comparación. La distancia se obtiene abatiendo el plano proyectante de la recta R trazada.



I.10



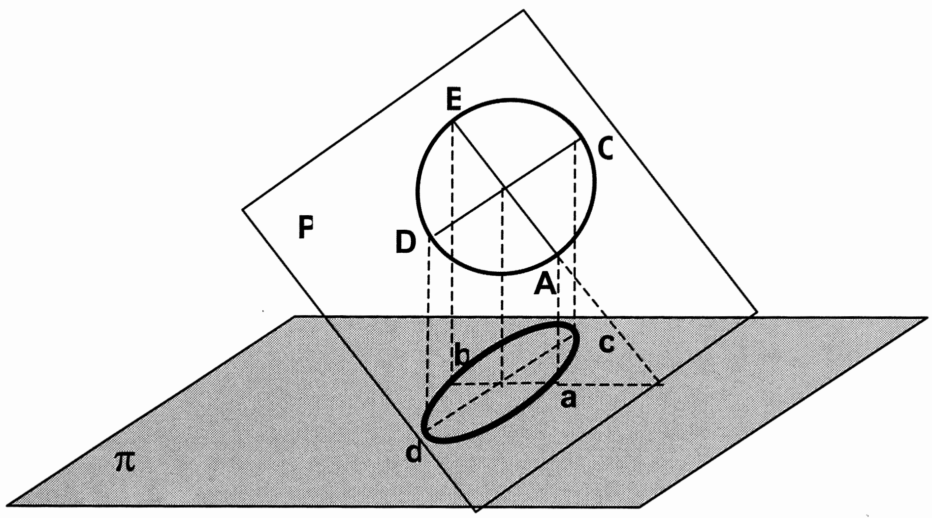
I.11. La proyección del segmento AB, es el eje menor de la elipse con que se proyecta una circunferencia de radio 5 cm. Determínese la proyección de la circunferencia. Datos: A(10; 10; 2'5) B(4; 13; z). El segmento crece en cota de A a B. Unidades en cm. Escala 1:1.

Resolución:

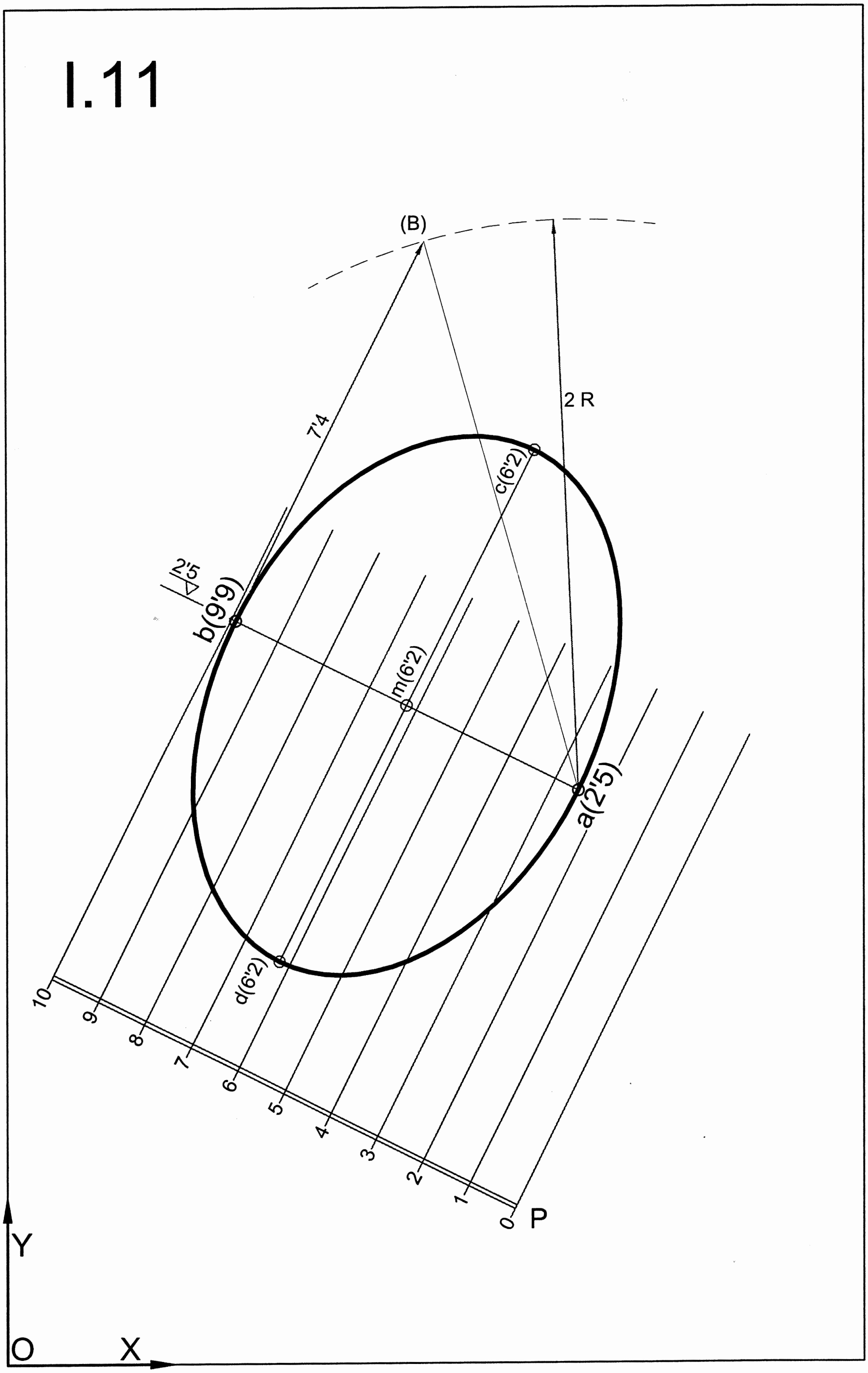
Cualquier segmento que pase por el centro de una elipse y quede acotado por la misma es un eje de la elipse. Ahora bien los ejes principales de la elipse son 2 ejes conjugados de la misma que forman 90º entre sí, y que se corresponden con los ejes de mayor y menor longitud de la misma.

Cuando la elipse procede de la proyección de una circunferencia (que obviamente estará contenida en un plano), el par de diámetros de la circunferencia cuya proyección da los ejes principales de la elipse serán un diámetro horizontal (magnitud máxima al proyectarse) y otro en la dirección de l.m.p. del plano (magnitud mínima al proyectarse). Por ello, si ab es el eje menor de la elipse proyección de la circunferencia, la dirección de ab será la de las l.m.p. del plano en que se sitúa la circunferencia (ver croquis), por lo que el diámetro perpendicular a él por su punto medio será una recta horizontal del citado plano. La proyección del eje mayor de la elipse es, por tanto, un segmento perpendicular al ab (teorema de las tres perpendiculares) trazado por su punto medio, cuya longitud es 5 cm y de cota, la media de las de A y B. La construcción de la elipse a partir de sus ejes principales es elemental.

La cota del punto B se obtiene abatiendo el plano proyectante de AB y obligando a que la longitud del segmento abatido (AB) sea igual al diámetro de la circunferencia. La cota de los extremos del eje mayor de la elipse es la del punto medio de AB, centro de la elipse.



I.11

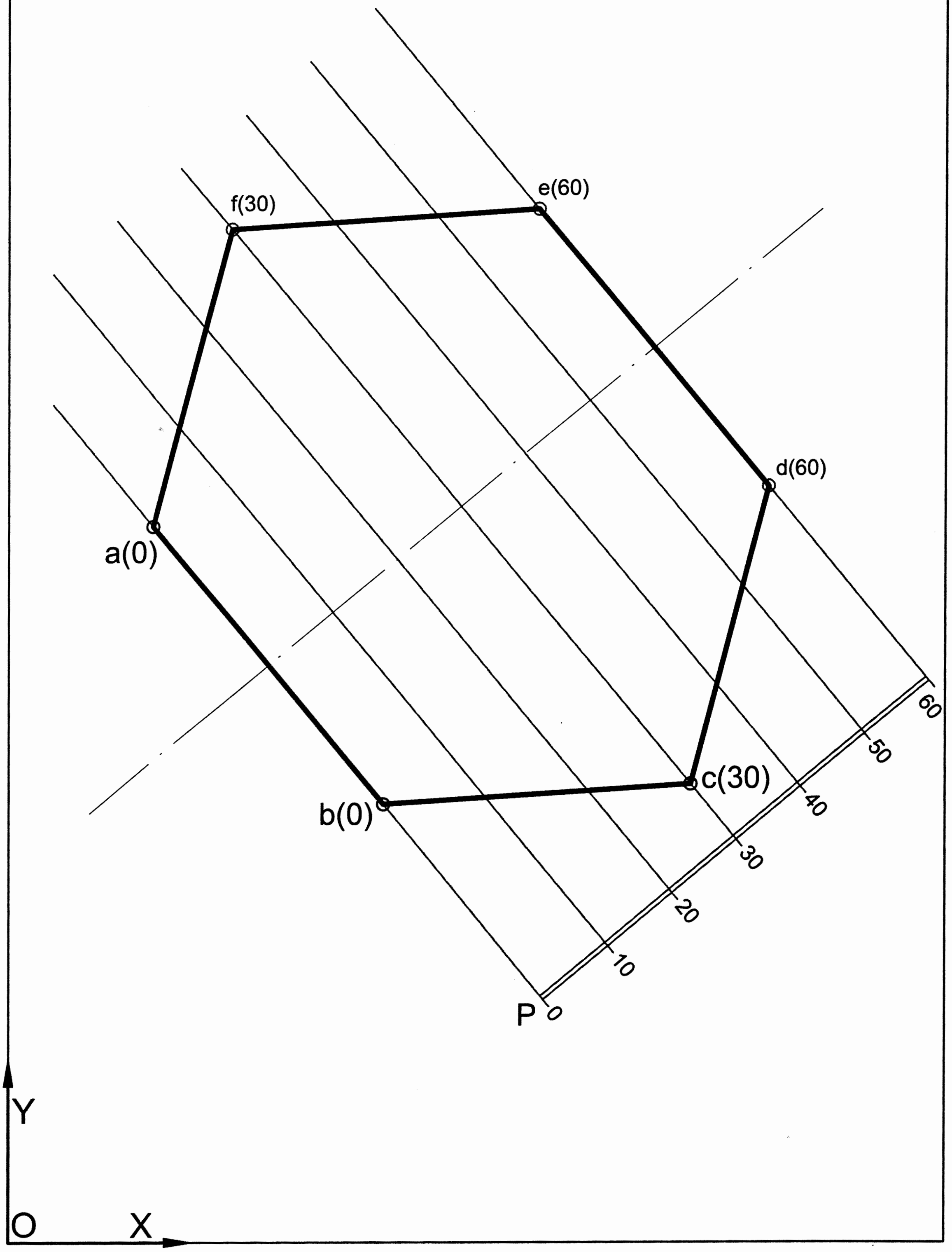


I.12. A(23'2; 114'5; 0) B(60; 70; 0) y C(109'2; 73'2; 30) son tres vértices de un hexágono regular. Determínese las proyecciones acotadas del hexágono. Unidades en mm. Escala E = 1:1.

Resolución:

Se representan los puntos A, B, y C y se obtiene el plano definido por los tres puntos. La simetría del hexágono respecto a la línea de máxima pendiente del plano, que pasa por el punto medio de AB y la conservación de la misma y del paralelismo entre rectas en la proyección cilíndrica ortogonal, permiten obtener la proyección del hexágono pedido y las cotas de sus vértices. Así, el punto F será el simétrico del C y tendrá su misma cota; los lados restantes se obtienen por paralelismo y las cotas de los vértices por su pertenencia al plano definido o aprovechando la simetría.

I.12



I.13. Dado el tronco de pirámide definido por los vértices de su base mayor A(2; 16; 0) B(11; 21; 0) C(13; 6; 0) D(6; 6; 0) y por su base menor E(7'6;14'4; 8) F(9'4; 15'4; 8) G(9'8; 12'4; 8) H(8'4; 12'4; 8), trácese el eje de un camino de pendiente p = 0'4 que parta del punto A y recorra las caras del tronco de pirámide en sentido contrario a las agujas del reloj hasta llegar a la base superior del mismo.

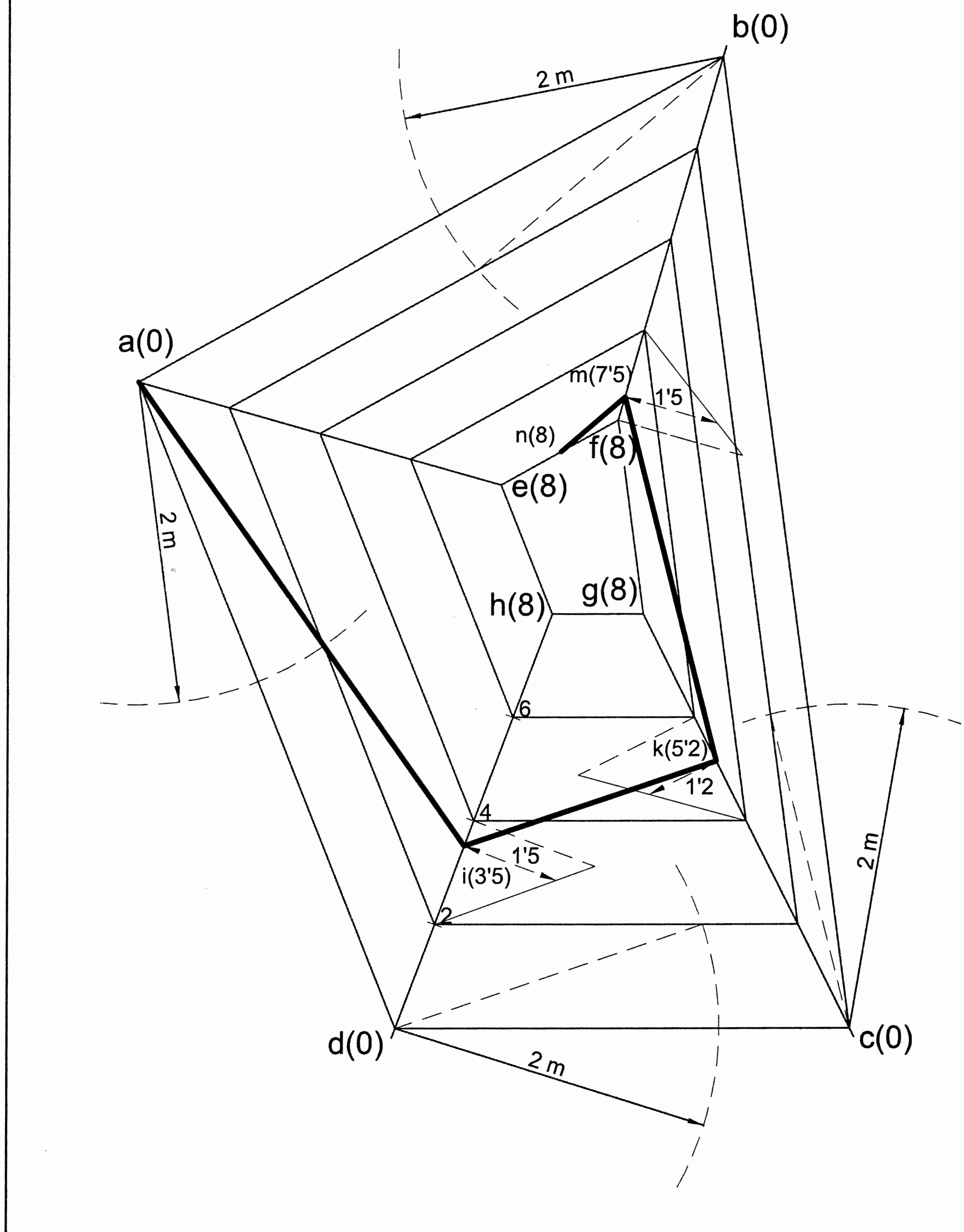
Resolución:

Se dibujan los puntos y uniendo los 4 vértices de la base mayor con los de la menor se obtiene el tronco de pirámide. A continuación se trazan las horizontales de plano) de las 4 caras del tronco de pirámide. Estas horizontales serán paralelas a las aristas de las bases (como la AD por ejemplo) y se trazan a partir de la graduación de una de sus aristas laterales (la DH por ejemplo).

El trazado del eje del camino pedido es la poligonal obtenida al trazar las rectas de pendiente dada que están contenidas en cada uno de los planos que forman las caras del tronco de pirámide. Puesto que se ha trazado las horizontales con equidistancia de 2 m, para determinar la dirección de los segmentos de la poligonal en cada cara de la pirámide se trazan arcos de radio 2 veces el módulo.

Las cotas de los vértices de la poligonal trazada se obtienen por interpolación lineal entre los puntos de cota entera de las aristas laterales más próximos a estos vértices.

I.13



Para seguir leyendo haga click aquí